1 06.03.2013.

Зад.1 Разпределят се k различни частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:

а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;

б) клетките могат да съдържат произволен брой частици.

Зад.2 Разпределят се k неразличими частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:

а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;

б) клетките могат да съдържат произволен брой частици.

Зад.3 Десет души се нареждат в редица. Колко са подрежданията, при които три фиксирани лица се намират едно до друго.

Зад.4 Колко четирицифрени числа могат да се напишат от цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, ако:

а) цифрите участват по веднъж;

б) допуска се повтаряне на цифри;

в) не се допуска повтаряне и числото е нечетно.

Зад.5 Група от 12 студенти трябва да изпрати при декана делегация от четирима свои представители. По колко начина може да се избере състава, ако:

а) няма ограничения за участие в нея;

б) студентите A и B не трябва да участват заедно;

в) студентите C и D могат да участват само заедно.

Зад.6 Пет различни топки се разпределят в три различни кутии A, B, C. Да се намери броя на всички различни разпределения, при които:

а) кутията A е празна;

? б) само кутията A е празна;

в) точно една кутия е празна;

г) поне една кутия е празна;

д) няма празна кутия.

Зад.7 Нека Ω е множеството на всички наредени n—торки с повторение на цифрите 1,2, и 3. Да се намери броят на елементите на Ω, които:

а) започват с 1;

б) съдържат точно k пъти цифрата 2;

в) съдържат точно k пъти цифрата 1, при което започват и завършват с 1;

г) са съставени от k_1 единици, k_2 двойки и k_3 тройки.

Зад.8 Всяка стена на всяко едно от сто кубчета е или червена, или синя, или зелена. Нека 80 кубчета имат поне една червена стена, 85 кубчета поне една синя, 75 кубчета поне една зелена. Какъв е най-малкият брой кубчета, които имат стени от трите цвята.

изкл. ∅

$2^{n+k} - 2^n - 2^k + 1$ празно ∅ (!) 2^{n+k}

Зад.9 Дадено е множеството $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\}$. Колко са подмножествата на Ω, които съдържат поне един елемент a и поне един елемент b.

Зад.10 Куб, на който всички страни са боядисани в различни цветове, е разрязан на 1000 еднакви кубчета. Да се определи вероятността случайно избрано кубче да има точно две боядисани страни.

Зад.11 Да се определи вероятността контролният номер на първата срещната лека кола:

4. върху всичко.

а) да не съдържа еднакви цифри;

б) да има точно две еднакви цифри;

в) да има три еднакви цифри;

г) да има две двойки еднакви цифри; $C_4^2 \cdot C_{10}^2 / 10^4$

? д) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри.

Зад.12 От десет лотарийни билета два са печеливши. Да се определи вероятността, между изтеглени по случаен начин пет билета:

а) точно един да бъде печеливш;

б) да има два печеливши;

в) да има поне един печеливш.

Зад.13 При игра на тото 6 от 49 да се пресметнат вероятностите за печалба на шестица, петица, четворка и тройка.

Зад.14 С цел намаляване броят на игралните мачове, $2k$ отбора с жребий се разбиват на две групи. Да се определи вероятността двата най-силни отбора да са в различни групи.

Зад.15 Във влак с три вагона по случаен начин се качват седем пътника. Каква е вероятността в първият вагон да се качат четирима.

Зад.16 Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека.

Зад.17 Група от n човека се нарежда около кръгла маса. Каква е вероятността две фиксирани лица да се окажат едно до друго.

Зад.18 От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$, k пъти последователно се вади по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на изваждените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако:

а) изваждането е без връщане;

б) изваждането е с връщане.

Вариация – различни!

Всяка клетка може да съдържа най-много една частица.

k различни частици в n различни клетки.

Комбинация – неразличими!

k неразличими частици в n различни клетки.

Вариация – изчисляване броят на начините, по който могат от дадено множество от n на брой елемента да се изберат k на брой, като реда на избиране е от значение $n(n-1)\ldots(n-k+1)$

1. Наредба в извадката
2. повторение на елемента

ако е наредена – даш ∀ уча.

дъо – определяме

тки!

Задача 1. k различни частици в n различни клетки.

а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица.

①...ⓚ

|1|...|n|

Вариация → различни.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

б) клетките могат да съдържат произволен брой частици.

$$\tilde{V}_n^k = n^k$$

Задача 2. k неразличими частици в n различни клетки.

а) всяка клетка може да съдържа най много една частица.

Комбинация → неразличими.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

б) клетките могат да съдържат произволен брой частици.

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Задача 3. 10 души в редица. Подреждания -? при които три лица се намират едно до друго.

фиксирани

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Общо са 8. → 8!

Имаме 3 фиксирани → и тях да подредими → 3!

$8! \cdot 3! = 241\,190$

Задача 4. Колко четирицифрени числа могат да се напишат от цифрите 1, 2, 3, 4 и 5.

а) цифрите участват по веднъж.

① ② ③ ④ (сякаш са позиции)!

1 2 3 4 5

$$V_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5!$$

б) допуска се повтаряне на цифри.

$$\tilde{V}_5^4 = 5^4$$

в) не се допуска повтаряне и числото е нечетно.

$$V_3^1 \cdot V_4^3$$

2 3 4 5 $\boxed{1}$

1 2 4 5 $\boxed{3}$

1 2 3 4 $\boxed{5}$

Задача 5. 12 студента → изпрати при декана делегация от 4.

а) няма ограничение за участие в нея.

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!}$$

студент си е студент!

б) студентите A и B не трябва да участват заедно.

1 2 3 4 A 6 7 8 9 B 11 12

от 12 изваждаме A и B => остават ~~2~~. 10. => от тях избираме 4.

$\left(A\,|\,B\right)^1 \to$ ~~[illegible]~~.

$C_4^{10} + 2C_3^{10}$ $\qquad$ $C_{10}^{4} + 2C_{10}^{3}$

C_4^{10} → нито един

2 → един или друг

б) студентите C и D да участват само заедно!

C_{10}^{2} → когато ще са вътре.

$+$

C_{10}^{4} → когато няма да идват.

Задача 6. 5 топки – различни

3 кутии – различни (A, B, C).

а) кутия A е празна.

$\tilde{V}_2^5 = 2^5 = 32$

б) само кутия A е празна

$2^5 - 2 = 30$ → две кутии.

в) точно една кутия да е празна

$3 \cdot б) = 90$

г) поне една кутия да е празна

$3 \cdot 2^5 - 3 = 96 - 3 = 93$

д) няма празна кутия.

$\tilde{V}_3^5 - г) = 3^5 - 93 = 150$

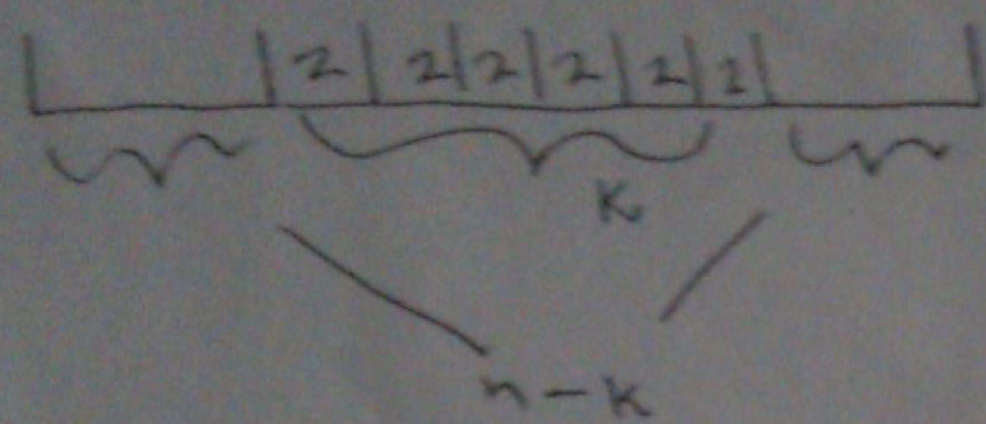
г) → махаме да има празни.

Задача 7. $\Omega \to 1, 2 \text{ и } 3$ n-ци, повторение.

а) започва с 1. $\boxed{1}\,\underbrace{\boxed{1\,2\,3\,|\,1\,2\,3\,|\,\ldots}}_{n-1}$

$1 \cdot V_{n-1}^{3}$

б) съдържащи точно k пъти цифрата 2.



$\tilde{V}_{n-k}^{2} \cdot C_{k}^{n}$

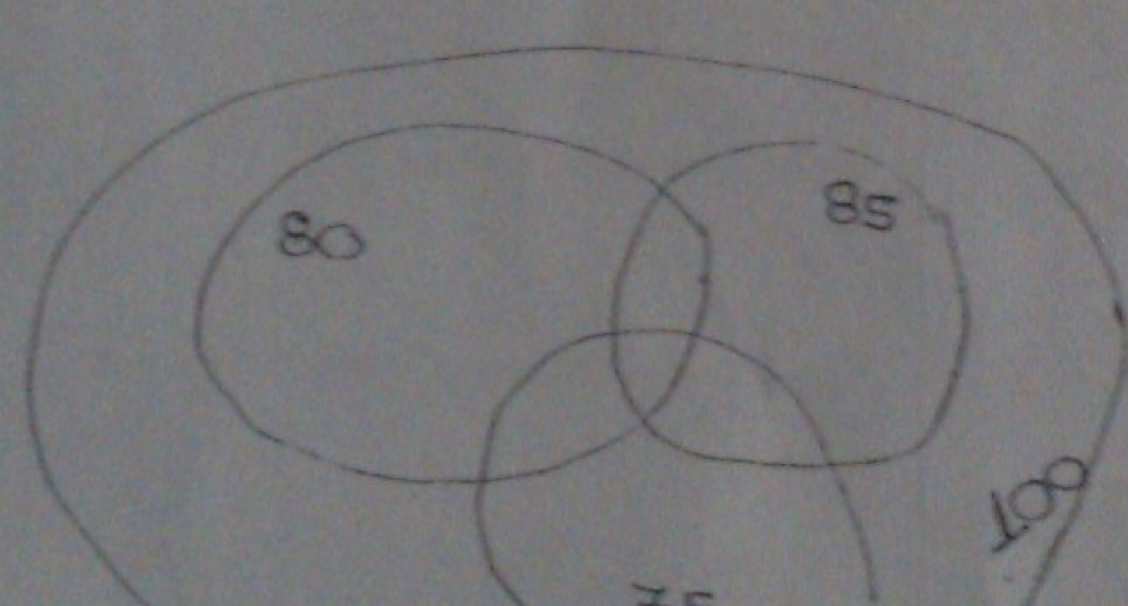
Задача 8. 100 кубчета. (∀ стена е или червена
синя
зелена).

80 – поне 1 червена.

85 – поне 1 синя.

75 – поне 1 зелена.

Най-малък брой имат и 3-те цвята.



$(80 + 85) \cap 100 = 65$

$(65 + 75) \cap 100 = 40$

Задача 9.

$\Omega = \{a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_k\}$

Колко са подмножествата → имат поне 1-а и поне 1-в.

2^{n+k} → всички.

$2^{n+k} - 2^n - 2^k + 1$

изкл. $\emptyset$ — празно $\emptyset$ (единствено!).

Задача 10.

Куб → 1000 кубчета.  → 4 различни страни.

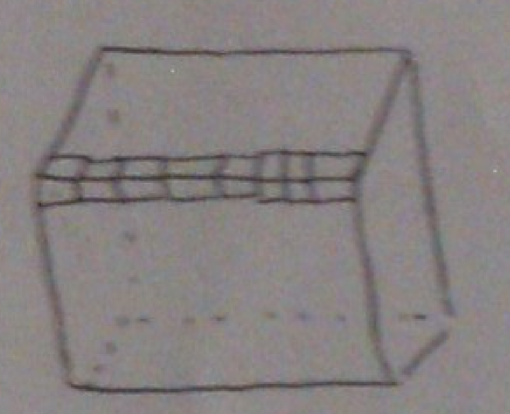
↓ избира се → да има точно 2 боядисани страни.

$n = 1000$

Ребра 12. → на всеки по 8 кубчета с 2 оцветени страни.

$m = 12 \cdot 8 = 96$

$p = \frac{m}{n} = \frac{96}{1000} = 0.096.$



Задача 11.

Контролен номер на кола — [illegible]:

а) да не съдържа еднакви цифри.

$$\frac{V_{10}^4}{\tilde{V}_{10}^4} = \frac{10.9.8.7}{10^4} = 0.504$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

⊔ ⊔ ⊔ ⊔

б) точно 2 еднакви цифри

$$\frac{C_4^2 \cdot \overset{a}{10} \cdot \overset{b}{9} \cdot \overset{c}{8}}{\tilde{V}_{10}^4} = \frac{6.10.9.8}{10^4}$$

aabc

C_4^2

в) има три еднакви цифри

$$\frac{C_4^3 \cdot 10 \cdot 9}{10^4} = 0.036$$

г) две двойки еднакви цифри

$$\frac{C_4^2 \cdot C_{10}^2}{10^4}$$

д) числата една и съща сума от първите две и последните две ц.

$$3.19+10$$

__Задача 22.__ 10 лотарийни билета => два са печеливши.

Теглят се 5.

а) точно един да бъде печеливш.

$$\frac{C_2^1 \cdot C_8^4}{C_{10}^5}$$

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square}_{\substack{\text{издиране}\\ 4}}\,\square\,\underbrace{\square\,\square}_{\substack{\text{издиране}\\ 1}}$$

б) да има два печеливша

$$\frac{C_2^2 \cdot C_8^3}{C_{10}^5}$$

в) да има поне един печеливш.

Пак: или 1 или 2.

в) = а) + б).

Задача 13. 6 от 49. тото!

? спечели петица, 4, и 3 или! шестица!

! Всички C_{49}^{6}

$$P(A_6)=\frac{1}{C_{49}^{6}}$$

$$P(A_5)=\frac{C_6^5 \cdot C_{43}^{1}}{C_{49}^{6}}$$

$$P(A_4)=\frac{C_6^4\, C_{43}^{2}}{C_{49}^{6}}$$

Задача 14. 2k отбора се разбиват на две групи.

P(двата най-силни отбора в две групи)=?

2k

1... k	1+k... 2k
1+k... 2k	1... k
k	k

$$P(A)=\frac{C_2^1 \cdot C_{2k-2}^{k-1}}{C_{2k}^{k}}$$ – (за една група).

C_{2k}^{k} – избиране от 2k 1 група

C_2^1 – в тази група 1 от 2.

C_{2k-2}^{k-1} от др (оставащите) допълване групата.

Задача 15. Влак с три вагона → 7 пътника.

P(в първия вагон 4 пътника)?

Всички → $\tilde{V}_3^7 = 3^7$

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot \tilde{V}_2^3}{3^7}$$

Задача 16. n – човека → редица.

P(между две фиксирани лица има r човека)=?

$$\overset{\circ}{A} \underbrace{\quad\quad\quad}_{r} \overset{\circ}{B}$$

хората между A и B => $C_{n-2}^r \cdot r! = V_{n-2}^r$

Задача 17. n човека около кръгла маса. P(две лица едно до друго)?

местата ако 1 е вече избрал място.

Всички са $(n-1)!$

$\to (n-1)!$

$$P(A) = \frac{2 \cdot (n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{(n-1)!}$$

Задача 18.