24.02.2014г. ТВМС – Донко Дончев – кт. 516.

Литература: 1) Б. Димитров и Н. Янев. ВиС. ук.
2) СМИТ
Стоянов Игнатов

1. Случаен експеримент. Основно пространство. Събития. Действия със събития.

Експеримент → условия, при @ се провеждат } осн. х-ки.
→ резултат

2 вида: 1. Детерминиран. (условията еднозн. опр. рез.)
2. Случаен

пр.
1. Влагане на пари в банка;

Осн. пр-во на случаен експеримент Ω
↳ мн. от ∀ възможни изходи на случайния експеримент. (СЕ)

K_Ω = брой изходи (бр. елементи на Ω)
$K_\Omega > \underline{1}$.
При $K_\Omega = 1$ ⇒ имаме ДЕ.

Пример: 1) хвърляне на зар: $K_\Omega = 6$.

$K_\Omega = \infty$ → изброима и (на цели числа) (елементарна т-ия на зар.)
→ неизброима с ($\mathbb{R}$ числа) или в (0,1) (обща т-ия на вероятностите)

Събитие – А, В, С, ...
– част от изходите на СЕ

$A \subset \Omega$

пр.: 1) СЕ – хвърляне на зар.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$ – да се падне нечетно число. $k_A = 3$

$B = \{5, 6\}$ $k_B = 2$.

Ако събитието съдържа 1 изход, то се нар. <u>елементарно</u> събитие. ($т.е. k_A = 1$)

k_A = бр. изходи, при които настъпва A.

Ако $k_A = 0$ – <u>невъзможно</u> събитие $= \varnothing$.

Ако $k_A = k_\Omega$ $(A = \Omega)$ – <u>сигурно</u> събитие (A винаги ще настъпи)

<u>Действия със събития</u>:

обединение сечение допълнение

1. обединение $A \cup B$

2. сечение $A \cap B$

3. допълнение $\overline{A}$.

$A \cup B$ - съдържа елемент. съб. или на A, или на B.

$A=\{1,3,5\}$
$B=\{5,6\}$

$A \cup B=\{1,3,5,6\}$ - настъпва при наст. или на A, или на B.

$A \cap B$ - съдържа ел. съб. и на A, и на B.

$A \cap B=\{5\}$ - настъпва когато настъпят едновр. ∀ участващи събития (з ч. 2)

Ако $A \cap B=\emptyset$, то A и B се нар. несъвместими.
(A и B не могат да настъпят едновр.)

$\overline{A}$ съдържа елемент. събития непринадлежащи на A
настъпва, когато A не настъпва.
$\overline{A}=\{2,4,6\}$.

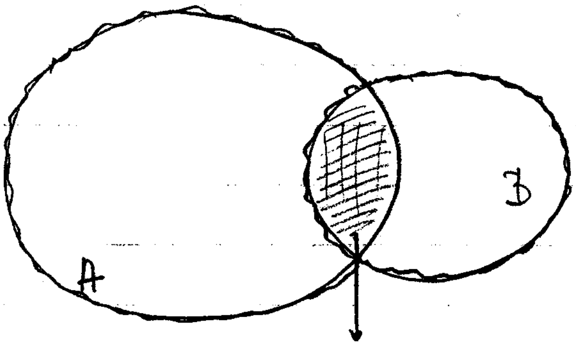
<u>Формули</u>:
1) $A \cup \overline{A}=\Omega$
2) $A \cap \overline{A}=\emptyset$
3) $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$ - де Морган.

$\cup \quad \cap \quad \overline{}$
<u>или и не</u>

<u>Пълна</u> <u>група</u> от несъвместими събития (ПГНС)
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ - образуват ПГНС, ако
едновременно са изпълнени 2 условия:
1) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n=\Omega$ - пълна
2) $A_i \cap A_j=\emptyset$, $i \neq j$ - несъвм.

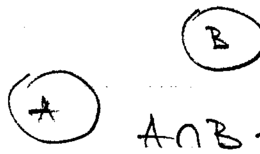
Пр: при $n=2$, A и $\overline{A}$ са ПГНС

Диаграми на Вин:



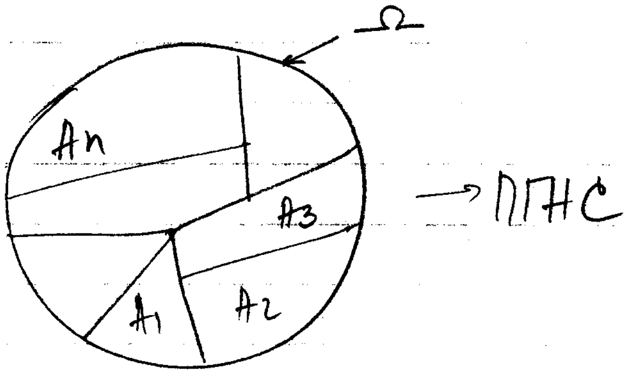
$A \cap B$

$A \cup B$ – ω;



$A \cap B = \emptyset$

$\bar{A}$



2. Вероятност

2^{-100}; (45,55)

Статистическа вероятност (отразява закономерност при многократно повторение на СЕ)

n = бр. повт. на СЕ

A = събитие, © може да настъпи, при даденото СЕ.

k = абсолютната честота на настъпване на A

$\frac{k}{n}$ – относителна честота на настъпване на A.

случайна граница

— стат. вероятност: $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{k}{n}$

≈ 21 000 пъти са хвърляли монета → $\frac{k}{n} \approx 0{,}503$.

Класическа вероятност — приложима при СЕ с краен брой равновероятни изхода; (в хазартни игри напр.)

$P(A) = \frac{k_A}{k_\Omega}$ k_A → бр. изходи, при които настъпва А; k_Ω → бр. на всички изходи на СЕ.

Общо определение на вероятност при ЕТВ. (елем. т-рия на вер.)

дефиниране като ф-ция

$$P : \Omega \longmapsto (0,1)$$

$$\omega \longrightarrow P(\omega)$$ вероятност на ел. събитие ω.

св-ва: 1. $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \qquad A \text{ е събитие;}$$

$$\sum_{\omega \in A} P(\omega) = k_A . P(\omega) \qquad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 = k_\Omega . P(\omega)$$

$$\Rightarrow P(\omega) = \frac{1}{k_\Omega}$$

$$\Rightarrow \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \frac{k_A}{k_\Omega}$$ → каквото ни дава и ф-лата за кл. вер.

вероятност на събитие А

Андрей Колмогоров – 1903 ÷ 1987 г.
→ разпростира т-ията на вероятностите за по-сложни експерименти.

3. Условна вероятност. Независимост.

10.03.2014г. ТВМС - лек.

Условна вероятност и независимост

1. Условна вероятност. A, B - събития

настъпило

$P(A|B)$ - условна вероятност на A, ако е настъпило B.

$\cup$	$\cap$	$-$	$\vert$
или	и	не	ако

пример: хвърляне на 2 монети

$$\Omega = \{(E,E),(E,T),(T,E),(T,T)\}$$

$$A = \{(E,E)\}, \quad B = \{(E,E),(E,T)\}$$

$$P(A|B) = 1/2 \neq P(A) = 1/4$$

$$P(A|B) = \frac{k_{A\cap B}}{k_B} = \frac{k_{A\cap B}/k_\Omega}{k_B/k_\Omega} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

2. Независими събития

пр.: като т.1), B - същото, $A = \{(E,E),(T,E)\}$

$$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = 1/2$$

О: A и B - незав., ако $P(A) = P(A|B)$ $\left(= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\right)$

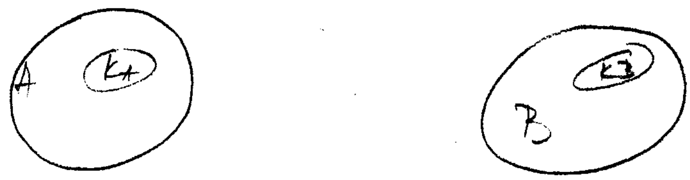
или еквивалентно на, ако $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

3. Формули за събиране и умножаване на вероятности.

а) събиране: $P(A\cup B) = ?$

ако $A \cap B = \emptyset$

$$P(A\cup B) = \frac{k_{A\cup B}}{k_\Omega} = \frac{k_A + k_B}{k_\Omega} = \frac{k_A}{k_\Omega} + \frac{k_B}{k_\Omega} = P(A)+P(B)$$



ако $A\cap B \neq \emptyset$

$$P(A\cup B) = \frac{k_{A\cup B}}{k_\Omega} = \frac{k_A + k_B - k_{A\cap B}}{k_\Omega} = \frac{k_A}{k_\Omega}+\frac{k_B}{k_\Omega}-\frac{k_{A\cap B}}{k_\Omega} =$$
$$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ако A, B - независими

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B) - P(A).P(B)$$
$$P(A\cup B) \le P(A)+P(B)$$

б) умножение: $P(A\cap B) = ?$

$$P(A\cap B) = P(A|B).P(B)$$

ако A, B - незав., то $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

4. Формула за пълната вероятност

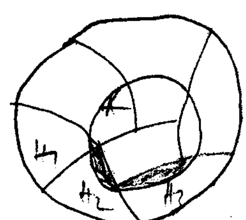
A - събитие, $H_1, H_2, \dots, H_n$ - ПГНС

знаем $P(H_1), \dots P(H_n)$

$P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$

търсим: $P(A) = ?$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i).P(H_i)$$



$$A = (A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup\dots\cup(A\cap H_n)$$
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i).P(H_i)$$

пример:

2 големи производителя на майонеза → Краси 65%, Омнеза 35%

60% от Краси < 2лв/кг.
40% от Омнеза < 2лв. кг.
Търсим: колко % е евтината майонеза.

$H_1 = \{\text{Краси}\}$; $H_2 = \{\text{Омнеза}\}$.
$P(H_1) = 0,65$, $P(H_2) = 0,35$
$A = \{м < 2лв. кг.\}$
$P(A|H_1) = 0,6$; $P(A|H_2) = 0,4$;
$P(A) = 0,6 \cdot 0,65 + 0,4 \cdot 0,35 = 0,39 + 0,14 = 0,53$.

5. Формули на Бейс

Дадено: като т. 4. $P(H_k)$ - априори;
Търсим: $P(H_k | A) = ?$ апостериорна /апостериори/;

$$P(H_k|A) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$

$P(H_1) = 0,65$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,65}{0,53} = \frac{0,39}{0,53} \approx 0,74.$$

Дискретни случайни величини

1. Случайна величина

$$\xi : \begin{cases} \Omega \to R \\ \omega \\ \omega \to \xi(\omega) \quad (\text{число}) \end{cases}$$

2. Видове случайни вел.

→ дискретни;

→ непрекъснати;

Пр.: СЕ - хвърляне на монета. $\Omega = \{E, T\}$

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega = E \\ 0, & \text{ако } \omega = T \end{cases}$$

ξ	0	1
p	1/2	1/2

3. Закон за разпределение на дискр. сл. вел.

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

$p_n = P(\xi = x_n)$ $\quad 0 < p_n < 1$

$\sum_n p_n = 1$

4. Числови характеристики (моменти, централни моменти, абсолютни моменти)

а) k-ти момент $\mu_k = \sum_n x_n^k p_n$

ако $k=1$ $\quad \mu_1 = E\xi$ - математическо очакване

$= \left(\sum x_n p_n\right)$ (средна стойност)

б) централни моменти $\quad \mathring{\mu}_k = \sum_n (x_n - E\xi)^k p_n$

дисперсия = D = разсейване;

$\mathring{\mu}_2 = D\xi$ - дисперсия на случайните в ξ.

$= \sum_n (x_n - E\xi)^2 p_n) = \sum_n (x_n^2 - 2x_n E\xi + (E\xi)^2) p_n =$

$= \sum_n x_n^2 p_n - 2E\xi \sum p_n x_n + (E\xi)^2 \sum p_n = E(\xi^2) - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2$

5. Свойства на $E\xi$ и $D\xi$.

а) $E\xi$ - ако ξ случайна вел. и c - число, то

$E(c\xi) = c.E\xi$.

$\to E(c\xi) = \sum_n x_n p_n = c.\sum_n x_n p_n = cE\xi$

- ако $\xi = c = const$ $\quad E\xi = c$ $\quad \to E\xi = c.1 = c$

- ако ξ, η = сл. вел., то $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$

17.03.2014г.

ТВМС - лек.

$$D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = \underbrace{\mu_2 - \mu_1^2}_{\text{моменти}}$$

$D\xi$ - дисперсия на ξ.
$D\xi > 0$ освен в сл.

свойства на дисперсията $D\xi$

→ ако c е число, то $D(c\xi) = c^2 D\xi$

$$D(c\xi) = E(c^2\xi^2) - (E(c\xi))^2$$
$$= c^2 E(\xi^2) - c^2(E\xi)^2$$
$$= c^2(E(\xi^2) - (E\xi)^2)$$
$$= c^2 D\xi$$

→ Ако $\xi = c = const$, то $D\xi = 0$.

→ Ако ξ, η - сл. вел., то $D(\xi+\eta) \overset{?}{=} D\xi + D\eta$

$\xi = \eta$ л. стр. $= D(2\xi) = 4D\xi$? кога
д. стр. $= 2D\xi$? имаме „="?

$E\xi$ → мат. очакване.

$$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - (E(\xi+\eta))^2 =$$
$$= E(\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta) - (E\xi + E\eta)^2 =$$
$$= E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi \cdot E\eta$$

(1) (2) (3) (1) (2) (3)

$$= D\xi + D\eta + 2\underbrace{(E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta)}_{\text{ковариация на } \xi, \eta = cov(\xi,\eta)} =$$

$$= D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta).$$

D: Случайните вел. ξ, η - <u>некорелирани</u>, ако $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$

$\Rightarrow$ Тогава "=" се достига при некорелирани величини.

D: Сл. вел. ξ, η се нар. <u>независими</u>, ако събитията, състоящи се в това те да приемат кои да е 2 свои стойности, са независими.

З-н на разпределение за 2те сл. вел.

$$\begin{array}{c|c} \xi & x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots \\ \hline P & p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \eta & y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots \\ \hline Q & q_1, q_2, \ldots, q_m \ldots \end{array}$$

$$P(\underbrace{\xi = x_n, \eta = y_m}) = p_n q_m \qquad n, m = 1, 2, \ldots$$

вероятност сечението го записваме така.

Лема: Ако ξ, η са независими, то те са некорелирани.

Д-во: $E(\xi\eta) = \sum_n \sum_m x_n y_m . P(\xi = x_n, \eta = y_m) =$

$$= \sum_n \sum_m x_n . y_m p_n . q_m =$$

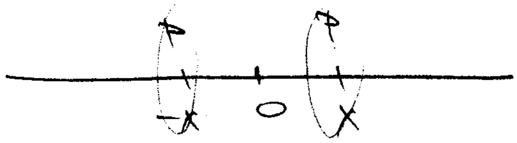
$$= \underbrace{\sum_n x_n p_n}_{E\xi} . \underbrace{\sum_m y_m . q_m}_{E\eta} = E\xi . E\eta$$

$\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$

$(\xi = \eta \;!?)$

Обратното не е вярно:

<u>Пр.</u> ξ = със симетрично разпределение.



$\eta = \xi^2$.

ξ и η са зависими, но в същото време некорелирани.

$\rightarrow$ $cov(\xi,\eta) =$ $\qquad\qquad$ $\xi.\eta = \xi^3$

$= \underbrace{\cancel{E(\xi^3)}}_{0} - \underbrace{\cancel{E\xi}}_{0}.E(\xi^2) = 0.$

6. Пораждащи функции.

$$\varphi_\xi(t) = E(t^\xi) = \sum_n{}' t^{x_n}.p_n \quad , t>0.$$

пор.ф. на вел. ξ

ξ	$x_1 \ldots x_n \ldots$
p	$p_1 \ldots p_n \ldots$

$\varphi_\xi(1) = 1$

$\varphi'_\xi(t) = \sum_n{}' x_n . t^{x_n-1}.p_n \quad \rightarrow \varphi'_\xi(1) = E\xi = \mu_1$

$\varphi''_\xi(t) = \sum_n{}' x_n.(x_n-1)t^{x_n-2}.p_n \quad \rightarrow \varphi''_\xi(1) = \sum_n x_n^2 p_n -$

$- \sum_n{}' x_n p_n =$

$= \mu_2 - \mu_1$

μ_2 – <u>втори момент</u>, μ_1 – <u>първи момент</u>

Основни вероятностни схеми

1. (Осн. схема) Схема на Бернули
– извършват се n на брой ① независими
прости ② опити с една и съща
вероятност за успех p във
③ всеки опит.

D.) Прост опит – има само 2 възможни изхода (успех и неуспех)

и независими прости опити

успех p · неуспех $q = 1 - p$

k = брой успехи.
$k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$A_k = \{$събитието, че са настъпили k успеха$\}$.

$P(A_k) = ?$ → Бернули го е сметнал.

$k = 0$ $\quad A_0 = \underbrace{HHH\dots H}_{n}$ (дума с букви H)

$P(A_0) = q^n$ ↳ това е сечение на вероятности

$$\to \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdots q}_{n \text{ пъти}} = q^n$$

$k = 1$ $\quad A_1 = У\underbrace{HH\dots H}_{n-1} \cup HУH\dots H \cup HHУH \dots H \cup \dots$

$\cup HH\dots HУ$

$P(A_1) = p \cdot q^{n-1} \cdot n$, защото имаме
C_n^1 и несъвместими събития
(n души).

$k=2$ $A_2 = ДД\underbrace{Н...Н}_{n-2} \cup ...$ → интересува ни броя на душите.

$P(A_2) = p^2 \cdot q^{n-2} \cdot C_n^2$ $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$

$C_n^0 = 1$

Виждаме, че:

$P(A_0) = C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^{n-0}$

$P(A_1) = C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$

$P(A_2) = C_n^2 \, p^2 \cdot q^{n-2}$

$- - - - - - - -$

$\Rightarrow P(A_k) = C_n^k \cdot p^k \, q^{n-k}$

Пример: Семейство има 8 деца.
Каква е вероятността да има 3 момчета?

прост опит

момче (Н) $\frac{106}{206} \approx 1/2$

момиче (У) $\frac{100}{206} \approx 1/2$

$n=8$

$k=3$

$P(A_3) = C_8^3 \cdot 1/2^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{-8} = \frac{7}{2^5} = \frac{7}{32}$.

2 сх) "Схема с топки":

Урна N топки $\nearrow$ M = бр. бели $\searrow$ $N-M$ = бр. черни (2 вида топки)

Изваждаме n топки.

без връщане

m бр. бели топки в извадката

$n-m$ бр. черни топки в извадката.

A_m - {събитието в извадката да има m бели топки}

$P(A_m) = ?$

$$P(A_m) = \frac{K_{A_m}}{K_\Omega}$$

$K_\Omega = C_N^n$

$K_{A_m} = ?$

трябва ни правило за броене!

сложен експеримент E

етапи

етап E_1

E_1 има k_1 на брой (+) изхода

етап E_2

За всеки изход на първия етап, вторият етап има k_2 изхода.

Тогава общият бр. изходи на E е $k_1 . k_2$ изхода.

$$\Rightarrow K_{A_m} = C_M^m . C_{N-M}^{n-m}$$

$$\Rightarrow P(A_m) = \frac{C_M^m . C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

пример: Играта Тото 2 (6 от 49)

$N=49$ $\quad m=0,1,2,\dots,6$

$M=6$

$n=6$

$$P(A_6)=\frac{C_6^6 \cdot C_{43}^0}{C_{49}^6}=\frac{1}{C_{49}^6 \approx 14\,000\,000}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_n^k = C_n^{n-k} \\ C_n^n = 1 \end{array}}$$

≈ 50 000 год. трябва да играем за да можем да кажем, че не ни върви!

Ако имаме "със връщане" ⇒ имаме схема на Бернули с вер. за успех $p=\frac{M}{N}$.

⇒ ф-лата става $C_n^m \cdot p^n \cdot q^{m-n}$

Без връщане:

p_1 → вероятноста да извадим бяла топка преди първия опит;

p_2 → — " — " — втория опит;

имаме, че $p_1=\frac{M}{N}$; $p_2=\begin{cases} \frac{M-1}{N-1}, & \text{ако първата извадена топка е бяла} \\ \frac{M}{N-1}, & \text{ако първата извадена т. е черна} \end{cases}$

⇒ условията ① и ③ от схемата на Бернули са нарушени.

$p_1 \neq p_2$.

когато $n \ll N, M$, тогава 2-те схеми са много близки.
$\Rightarrow$ можем да апроксимираме 2рата схема до схемата на Бернули.

3) "Схема до първи успех"
Правят се независими прости опити с една и съща вероятност p за успех във всеки опит.
Правят се до първи успех.

k = брой проведени опити.
$k = 1, 2, \ldots$
$P(A_k) = ?$

$k=1, \quad A_1 = У \quad \Rightarrow P(A_1) = p$
$k=2, \quad A_2 = НУ \quad \Rightarrow P(A_2) = p.q$
$k=3, \quad A_3 = ННУ \quad \Rightarrow P(A_3) = p.q^2$

$P(A_k) = p.q^{k-1}$

4) Схема на Поасон
- какво става със схемата на Бернули при $n \to \infty$.

Тънък момент: без допълнително предположение разп. $P(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ за $\forall k$

$\Rightarrow$ безсъдържателно е от разп. това в такава ситуация

$0 < p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} \Rightarrow k \to \infty \Rightarrow P(A_k) \to 0.$
статистическа вер.

$\Rightarrow$ трябва ни допълнително предположение

Предположение на Поасон:

$n \to \infty$ и $p \to 0$, така че $n.p = \lambda = const$

$\Rightarrow$ Поасон доказва: $P(A_k) = \frac{\lambda^k}{k!} . e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

от сх. на Бер.: $P(A_k) = C_n^k . p^k . (1-p)^{n-k} =$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} . p^k . (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{np . (n-1).p \ldots (n-k+1).p . (1-p)^{n-k}}{k!} =$$

$$= \frac{np\,(np-p)\ldots(np-kp+p)\,(1-p)^{n-k}}{k!} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} . \lim (1-p)^{n-k} =$$

имаме, че $(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} e$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} . (1+x)^{-\frac{\lambda}{x}}$$

полагаме $x = -p$, $p = -x$

$n.p = \lambda \Rightarrow n = \frac{\lambda}{p} = -\frac{\lambda}{x}$

$$\frac{\lambda^k}{k!} . e^{-\lambda}$$

Док.

Пр.: Във Vivacom 1% от разговорите завършват с грешка. Каква е вер. от 500 разговора да имаме 3 грешки.

схема на Бернули:

$p = 0{,}01$, $n = 500$, $k = 3$

$P(A_3) = ?$

$P(A_3) = C_{500}^3 . 0{,}01^3 . 0{,}99^{497} \to ?$

схема на Поасон:

$\lambda = p.n = 0{,}01 . 500 = 5$

$P(A_3) = \frac{5^3 . e^{-5}}{3!} = \frac{5^3}{6} . e^{-5}$ $e = 2{,}7172.. \approx 2{,}5$

$$\frac{8}{6} . e^{-2} = \frac{8}{6.(2{,}5)^2} = \frac{8}{6.6{,}25} = \approx \frac{4}{15}!$$

24.03.2014г ТВМС - лек.

Основни дискретни разпределения

1. Разпределение на Бернули

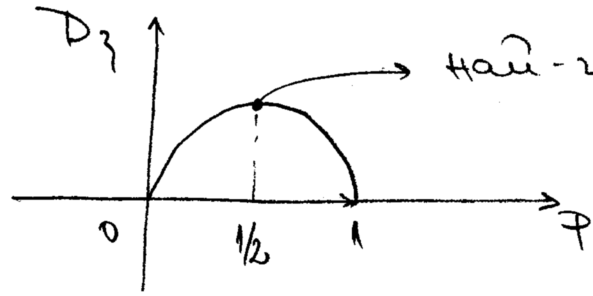
(случайната вел. с такова разпр. има следния з-н:)

ξ	0	1
P	$q=1-p$	p

$\xi^2=\xi$

$$E\xi = 0.(1-p)+1.p = p$$ (мат. очакване на това разпр.)

$$D\xi = E(\xi^2)-(E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = p.q$$



най-голяма !? "неизвестност"

Пораждаща ф-ция: $\varphi_\xi(t) = Et^\xi = tp + 1.q = pt+q$

2. Биномно разпр.

(то е с 2 параметъра n,p)

имаме $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ независими случайни вел. с разпр. на Бернули с вероятност за успех p.

$$S_n = \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n \sim B:(n,p)$$ биномно разпр.

(= броят на успехите в n незав. прости опити с вер. за успех p)

Закон за биномно разпр.:

S_n	0	1	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}		$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

$$E S_n \overset{(св.3)}{=} \sum_{k=1}^{n} E\xi_k = n.p$$

$E\xi_k = p$ (от преди малко)

$$D S_n = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = npq$$

$$\varphi_{S_n}(t) = E t^{S_n} = E\left(\prod_{k=1}^{n} t^{\xi_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(t^{\xi_k}\right) = (pt+q)^n.$$

$\left(t^{a+b+\dots} = t^a . t^b \dots\right)$

$E t^{\xi_k} = pt+q$ (от $\varphi_\xi(t)$)

3. Геометрично разпределение.

имаме $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ - независими сл. вел. и имат разпр на Бернули с вер. за успех p.

$\tau = \min(n : \xi_n = 1)$ (първата !ца в редицата)

τ	1	2	...	n	...
p	p	pq	...	pq^{n-1}	...

$$E\tau = 1.p + 2p.q + 3pq^2 + \dots + n.p.q^{n-1} + \dots =$$
$$= 1-q + 2(1-q)q + 3(1-q).q^2 + \dots =$$
$$= 1-q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 + \dots =$$
$$= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \leftarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

$D\tau$ е сложно без производна φ.

$$\varphi_\tau(t) = E(t^\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k p q^{k-1} = \frac{p}{q} \cdot \sum_{k=1}^{n} (tq)^k =$$

$$= pt \sum_{k=0}^{\infty} (tq)^k = \frac{pt}{1-qt}.$$

$$\varphi'_\tau(t) = \frac{p(1-qt)+qpt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}.$$

$$\varphi''_\tau(t) = 2p \cdot \frac{q}{(1-qt)^3} = \frac{2pq}{(1-qt)^3}.$$

$$\varphi''_\tau(1) = \frac{2q}{p^2} = \underset{\text{втори}}{E(\tau^2)} - \underset{\text{първи}}{E\tau}$$

момент

$$E(\tau^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\tau = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

4. Разпределение на Поасон

π	0	1	2	...	n	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda . e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} . e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!} . e^{-\lambda}$	...

$$E\pi = \lim_{n\to\infty} E S_n = \lim_{n\to\infty} (n.p) = \lambda$$

съгласно предположението на Поасон $n.p = \lambda$.

$$D\pi = \lim_{n\to\infty} D S_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{np}_{\lambda} q = \lambda \underbrace{\lim_{n\to\infty} q}_{1} = \lambda, \quad \begin{matrix} p\to 0 \\ q \to 1 \end{matrix}$$

$$\varphi_\pi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} (pt+q)^n = \lim_{n\to\infty} (1+p(t-1))^n =$$

$p(t-1) = x \Rightarrow p = \dfrac{x}{t-1}$

$n.p = \lambda \Rightarrow n = \dfrac{\lambda}{p}$

$n = \dfrac{\lambda(t-1)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{\lambda(t-1)}{x}} = e^{\lambda(t-1)}.$$

5. Неравенство на Чебишев

$\xi \geq 0$ - сл. вел. $\quad \varepsilon > 0$ - число.

$$P(\xi > \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}.$$

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Д-во: $E\xi = \sum_n x_n p_n = \sum_{n: x_n > \varepsilon} x_n p_n + \sum_{n: x_n \leq \varepsilon} x_n p_n \geq$

$$\geq \sum_{n: x_n > \varepsilon} x_n . p_n > \varepsilon . \sum_{n: x_n > \varepsilon} p_n =$$

$$= \varepsilon . P(\xi > \varepsilon)$$

Гранични св-ва на схемата на Бернули

$(n \longrightarrow \infty)$

$p \to fix$ (вероятността е фиксирана)

1. Закон за големите числа на Бернули.

Сл.: (от неравенството на Чебишев):

$$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) < \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad \xi\text{-произволна сл. вел.}$$

Д-во: $P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) =$
$$= P\left((\xi - E\xi)^2 > \varepsilon^2\right) < \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

З-н за гол. числа на Бернули:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

от първата лек.:
$$\underline{\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = P(A)}$$

$S_n = k$

Сходимост по вероятност:

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ случайна редица, ξ е сл. вел.

К., че $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, ако $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p.$$

Д-во на закона:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) <$$
$$< \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1/n^2\, DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{\cancel{n}pq}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

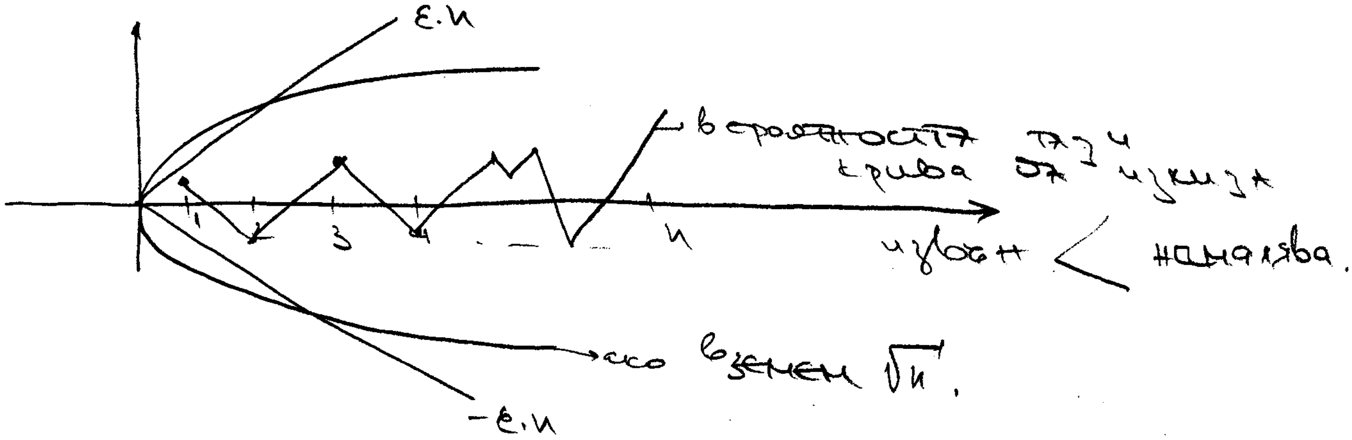
2. Теорема на Моавър-Лаплас.

Запис на з-на за гол. числа:

$$P(|S_n - n.p| \geq \varepsilon n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(относ.)

(отклонението на успехите от n опита от очакваното....)



*) Локална теорема на Моавър-Лаплас.

$P_k(n)$ вероятност за k успеха в n опита.

$$P_k(n) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

но при големи n не е добре

$$\Rightarrow P_k(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \; n\to\infty.$$ (асимптотична формула)

$$\left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}\left(1+R(n)\right)\right)$$

$R(n)\to 0, \; n\to\infty.$

условие за k:

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| = o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$$, т.е. $\sqrt[3]{n}\cdot\left|\frac{k}{n} - p\right| \to 0$

следствие от условието:

1) $k, \; n-k \to \infty$,

$$\left|\frac{k}{n} \underbrace{-p+1}_{q} - 1\right| = \left|q - \frac{n-k}{n}\right|$$

Д-во: $P_k(n) = \frac{n!}{k!\,.(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \sim$

асимптотична ф-ла на Стирлинг

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n\to\infty.$$

$$\sim \frac{\sqrt{\cancel{2\pi} n}\left(\frac{n}{\cancel{e}}\right)^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{\cancel{e}}\right)^k \cdot \sqrt{\cancel{2\pi}(n-k)}\left(\frac{n-k}{\cancel{e}}\right)^{n-k}} =$$

делим числ. и знам на n^k

делим ч на n.

$$= \frac{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{k}{n}\frac{(n-k)}{n} \cdot n}} =$$

$\hat{p} = \frac{k}{n}$, $\hat{q} = \frac{n-k}{n}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot \hat{p}\cdot\hat{q}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{\hat{p}}\right)^k \cdot \left(\frac{q}{\hat{q}}\right)^{n-k}}_{= I}$$

ново свойство:
$\hat{p} \to p$
$\hat{q} \to q$

антилогаритмуване I.

$$I = e^{-\ln\left(\frac{\hat{p}}{p}\right)^k \cdot \left(\frac{\hat{q}}{q}\right)^{n-k}} =$$

$$= e^{-n\left(\frac{k}{n}\cdot\ln\frac{\hat{p}}{p} + \frac{(n-k)}{n}\cdot\ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}\right)} = e^{-n\underbrace{\left(\hat{p}\cdot\ln\frac{\hat{p}}{p} + (1-\hat{p})\cdot\ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}\right)}_{f(\hat{p})}}$$

Развиваме $f(\hat{p})$ в ред на Тейлор в ок-ст на p.

$$f(\hat{p}) = \underset{0}{f(p)} + f'(p)(\hat{p}-p) + \frac{1}{2}\cdot f''(p)\cdot(\hat{p}-p)^2 + \ldots$$

$$f'(\hat{p}) = \ln\frac{\hat{p}}{p} + \cancel{\hat{p}\cdot\frac{1.p}{\hat{p}}\cdot\frac{1}{p}} - \ln\frac{1-\hat{p}}{1-p} \cancel{-1} = \ln\frac{\hat{p}}{p} - \ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}$$

$= f'(p) = 0.$

$$f''(\hat{p}) = \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{1-\hat{p}} = \frac{1}{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}$$

$$\Rightarrow f(\hat{p}) = \dots\dots = \frac{1}{2pq}\cdot\left(\frac{k}{n}-p\right)^2$$

$$f(\hat{p}) = \underset{0}{f(p)} + f'(p)\cdot(\hat{p}-p) + \frac{1}{2}\cdot f''(p)(\hat{p}-p)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(p)\cdot(\hat{p}-p)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{k}{n}-p\right)^3 = o(n^{-1})$$

Това е всичко.

$$\Rightarrow n\cdot\left(\frac{k}{n}-p\right)^3 = o(1)$$

тоест клони към 0.

б) Интегрална теорема на Моавър-Лаплас.

$$P_k(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Полагаме $x = \frac{k-np}{\sqrt{n}\,npq}\cdot\sqrt{n}$ p, q са фикс.

$\Rightarrow x$ зависи от k и n,

$\Rightarrow o(n^{-\frac{1}{2}})$

$\Rightarrow x = o(n^{\frac{1}{6}})$

$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ нормиран бр. успехи в n опита.

$$\Rightarrow P_k(n) \sim \dots \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Т Лапл:

$$P(a < x < b) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$ - нормиран ξ

заместване X с неговото равно, умножаване по $\sqrt{n}$,
$a = -\varepsilon$ $b = +\varepsilon$ $\Rightarrow$ параболата - 8 - изчертана

31.03.2014г. ТВМС - лек.

Интегрална теорема на Моавър-Лаплас

$$P\left(a < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

$$\left|\frac{k}{n}-p\right| = o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$P\left(a < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \sum_{i:\ a<\frac{i-np}{\sqrt{npq}}<b} P_n(i)$$

(i успеха в n опита)

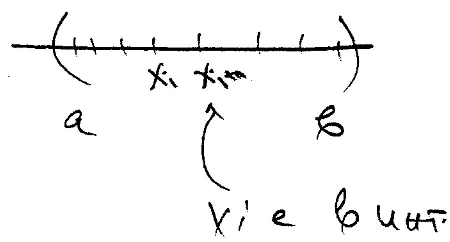
брой успехи

$$\left|\frac{i}{n}-p\right| = o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$\approx$ близка до

$$\sum_{i:\ a<\underbrace{\frac{i-np}{\sqrt{npq}}}_{x_i}<b} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{(i-np)^2}{2npq}} =$$

$$= \sum_{i:\ a<x_i<b} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}} =$$



$$x_{i+1}-x_i =$$
$$= \frac{i+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{i-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i:\ a<x_i<b} e^{-\frac{x_i^2}{2}}\,\Delta x_i \longrightarrow$$

това е риманова интегрална сума на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}}$

$$\Rightarrow \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

$$P\left(a < \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < b\right)$$

$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$

$\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ са независими сл. вел. с разпр. на Бернули с вер. за успех p

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Друга форма на запис.

Централна гранична теорема (за величини с крайна дисперсия, не само на бернулиеви)

Пр.: $n = 100$ хвърляния на монета.

k = бр. „ези".

$P(45 < k < 55) = ?$

по ~~схемата~~ на Бернули: $\sum_{k=46}^{54} C_{100}^{k} \cdot \frac{1}{2^{100}}$ = затъване.

ще използваме т-мата.

вел. k има биномно разпр. с параметри $100, \frac{1}{2}$.

$$k \sim Bi(\underset{n}{100}, \underset{p}{1/2})$$

$$E(k) = n \cdot p = 50$$

$$D(k) = npq = 25$$

$$= P\left(\frac{45-50}{5} < \frac{k-50}{\sqrt{25}} < \frac{55-50}{5}\right) =$$

$$= P\left(-1 < \frac{k-50}{5} < 1\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0{,}68.$$

$$\shortparallel$$

$$2L(1)$$

има таблици за този интеграл.

(табл. за дисперсия !?)

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$ – ф-ция на Лаплас

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = erf(x)$$ – интеграл на вероятностите;

→ табулирани са тези функции.

Съвременна теория на вероятностите

СЕ с неизброимо много изходи (случаен експеримент)

СЕ: безбр. мн. хвърляния на монета.

сн. прво на експ. $\Omega = \{\omega : \omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots, \omega_n = \{ези | тура\}, n = 1, 2 \dots\}$

ω_1 – изход на 1-то хвърляне

∃ изоморфизъм $i : \Omega \longleftrightarrow [0;1]$

$\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots \longleftrightarrow \alpha \in [0;1]:$

$\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$. двоично predst.

$= \sum_n \alpha_n \cdot \frac{1}{2^n}$.

$\alpha_n = \begin{cases} 1, \omega_n = E \\ 0, \omega_n = T \end{cases}$

Събития: разл. инт. $A_1 = [0; 1/2) = \{\alpha : \alpha_1 = 0\}$

$P(A_1) = 1/2 = |A_1|$ дължината на A_1.

(A_1 → първото хв. е тура, а ∀ оста. са каквито си искат)

$A_{11} = [0; 1/4] = \{\alpha : \alpha_1 = \alpha_2 = 0\}$ $\Rightarrow$ A_{11} е събитието първите 2 хвърляния да са тура.

$P(A_{11}) = 1/4 = |A_{11}|$

<u>Пример на множество от интервала $[0;1]$, което няма дължина</u>

Въвеждане релация на екв. м/у 2 числа a и b от $[0;1]$

$a \sim b$, ако $a - b \in \mathbb{Q}$
$\hookrightarrow$ релация на еквивалентност;

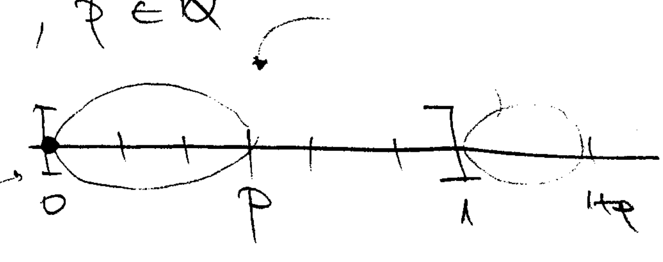
M = мн-вото от класовете на еквивалентност отн. "$\sim$".

M_0 = мн.вото от елементите, които сме избрали по един представител от клас.

M_0 няма дължина $\rightarrow$ защо?

M_0 е с представител 0 от класа на рац. числа

$$M_p = M_0 + p \pmod 1, \quad p \in \mathbb{Q}$$



$$a + b \pmod 1 = \begin{cases} a+b, & a+b < 1 \\ a+b-1, & a+b > 1 \end{cases}$$

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0;1)} M_p = [0;1]$$, защото съдържа $\forall$ рац. ч-а и $\forall$ суми на рац. и ирац. числа

$M_p \cap M_q = \emptyset \quad , p \neq q$
(ако $\neq \emptyset$, все едно сме избрали 2 числа от 1 клас на еквивалентност).

Нека допуснем, че M_0 има дължина и $|M_0| = \varepsilon \geq 0$.
(*дължината на мн. с 1т. е 0)

$\Rightarrow |M_p| = \varepsilon$ за $\forall p$.

p * зп.
$$\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0;1)} M_p \; [0;1]$$

$$\sum_{p \in [0;1)} |M_p| = 1$$

но ε не може да е 0 и не може да е > 0, защото това е безкрайна сума.
$\Rightarrow$ няма дължина.

Стефан Банах (1924) полски математик;
(пример:

$n \geq 3$ и вземем 2 сфери

$S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ — сфери с радиуси 1 и 2 в $\mathbb{R}^n$

$\exists\ k = \underline{k(n)} : S_1^{(n)} = \underbrace{A_1 + A_2}_{} + \ldots + A_k$
непресичащи се обединения.

$S_2^{(n)} = B_1 + B_2 + \ldots + B_k$
и $A_1 \cong B_1, A_2 \cong B_2, \ldots, A_k \cong B_k$

$k=5$ в зърното пр-во

Една ябълка я разрязвам на 5 части и с $k=1$

с тях правя ябълка с $k=2$

Точно с 5 части! с 4 или с 6 не ?

† Стефан Банах

изиза, че тези части нямат обем (?)

Аксиоматика на Колмогоров

Ω, $\mathcal{F}$

система от подмножества на Ω, които да се наричат събития.

Каква да е тази с-ма?

$$\left.\begin{matrix} A \cup B \\ A \cap B \\ \overline{A} \end{matrix}\right\} \in \mathcal{F}$$

Ако A и B са събития, т.е. $A, B \in \mathcal{F}$, то

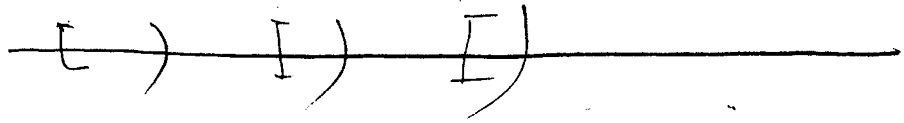
Система от подмн. на Ω удовлетворяващи това условие се нар. алгебра.

$\Rightarrow$ F трябва да е поне алгебра!

Оказва се, че това не е достатъчно.

Защо не е достатъчно?

пр.:



Крайно обедин. на такива непрес. са инт.
не можем да получим едноточкови множества.

Ако трябва да наричаме събития тези м-ли, то ще трябва да изключим цялата елементарна теория на вер.

D. Система F се нар. <u>σ-алгебра</u>, ако р-ята от съб. $A_1, \dots, A_n, \dots \in F$, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

$$\overline{A_i} \in F$$

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a; a + 1/n)$$

D. Минимална σ-алгебра в R^1 (правата), съдържаща всевъзможни интервали $[a;b)$ се нар. <u>Борелова</u> <u>σ-алгебра</u>

$\rightarrow$ достатъчно е да е σ-алг. (каза по-горе)

<u>Какво е вероятност?</u>

$$P: \begin{cases} F \longrightarrow [0,1] \\ \ \ \psi \qquad\quad \ \ \psi \\ A \longrightarrow P(A) \end{cases}$$

Св-ва на $P(A)$:

$A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ - адитивност

D:) $P(A)$ се нар. **σ-адитивна**, ако $A_1, \dots, A_n, \dots$
$A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

D: Тройката $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ω – осн. неизброимо пр-во

$\mathcal{F}$ – σ-алгебра от събит.

P – σ-адитивна функция в/у σ-алгебра нар. вероятност

се нар. **ВЕРОЯТНОСТНО ПРОСТРАНСТВО**

Лема: Нека P е адитивна вероятност, зададена в/у σ-алгебрата $\mathcal{F}$. Тогава следните условия са еквивалентни:

1) P е σ-адитивна;
2) P е непрекъсната отдолу
(D:) ако имаме нарастваща р-ца от събития, $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, то
$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n P(A_n)$)

$P(A) \leq P(B)$

3) P е непрекъсната отгоре
(т.е. ако $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$,
то $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$)

4) P е непрекъсната в нулата, т.е. ако $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\lim P(A_n) = 0$.

07.04.2014г. **ТВМС** – лек.

От миналия път, тема:

1) σ-адитивна;

2) непр. отдолу;

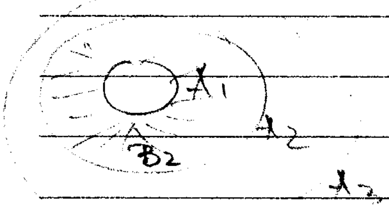
3) непр. отгоре;

4) непр. в нулата;

Д-во:

$1 \Rightarrow 2$: $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$: $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$

$$= \lim P(A_n)$$



$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1 \Rightarrow A_2 = B_2 \cup A_1$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

$B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ са несъвместими;

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) =$$ (от базис...

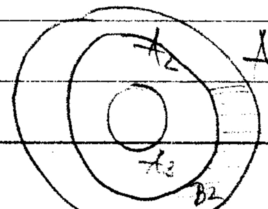
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n \to \infty} \left(P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_{n-1})\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

$2 \Rightarrow 3$: $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$

$P(\cap A_n) = \lim P(A_n)$

Въвеждаме събитие $B_n = A_1 \setminus A_n$



$B_1 = \emptyset$

B_2

$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim P(B_n) = \;\; = \lim\left(P(A_1) - P(A_n)\right) \text{ (Отсечна стр.)}$$

Нека: $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

$$= P(A_1) - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

$3 \Rightarrow 4$: Очевидно

$4 \Rightarrow 1$: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Полагаме $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $k = 1, \dots$

$\bigcup_{n=1} A_n = B_n \cup C_n \qquad C_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(C_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \lim_{n\to\infty} P(C_n)$$

$C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$

$$\bigcap C_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(C_n) = 0.$$

Пример на вероятностно пространство

$\Omega = R^1$ чис. права е осн. пр-во

$\mathcal{F} = \mathcal{B}$ (борелова σ-алгебра)

$\mathcal{P}$ е σ-адитивна вероятност;

$F(x) = \mathcal{P}((-\infty; x])$ - функция на разпределението на $\mathcal{P}$

Свойства на $F(x)$:

1) $F \in [0;1]$

2) $F(x)$ е намаляваща

3) $F(x)$ е непр. отляво и има граница отдясно $\forall x$.

4) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

5) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

Д-во: 1) очевидно, $x \geq y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$

$$(-\infty, x] \supset (-\infty, y]$$

2) непр. отляво: ако имаме редица от

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq$ $\quad x_n \to x$

$F(x_n) \to F(x) - \mathcal{P}\{x\}$ допълнително

$F(x_n) = \mathcal{P}((-\infty; x_n])$

$$\lim F(x_n) = \lim \mathcal{P}(-\infty; x_n] = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty; x_n]\right) =$$

$$= \mathcal{P}((-\infty; x)) \leq \mathcal{P}((-\infty, x]) = F(x)$$

$x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$ $\quad x_n \to x$

$$\lim F(x_n) = \lim \mathcal{P}((-\infty, x_n]) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty; x_n]\right) = F(x)$$

3) $x_1 < x_2 < \dots x_n \dots$ $\quad x_n \to \infty$.

$$\lim F(x_n) = \lim P((-\infty; x_n]) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty; x_n]\right) = P(\mathbb{R}^1)$$

4) $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots,\ x_n \to -\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim P((-\infty; x_n]) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty; x_n]\right) =$$

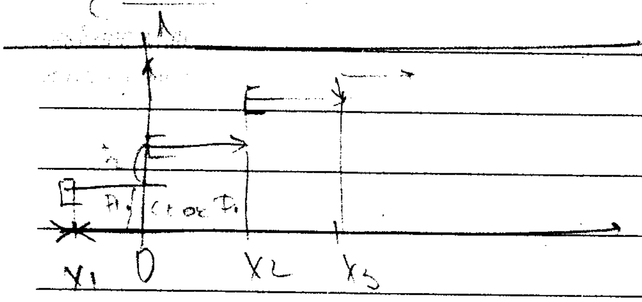
$$= P(\emptyset) = 0.$$

! Тв: Вярно е обратното:
всяка функция със свойства 1)÷4) е ф. на разпределение на някаква сл. величина.

Видове функции на разпр.:

1) Дискретни (с прекъсвания)

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2		p_n



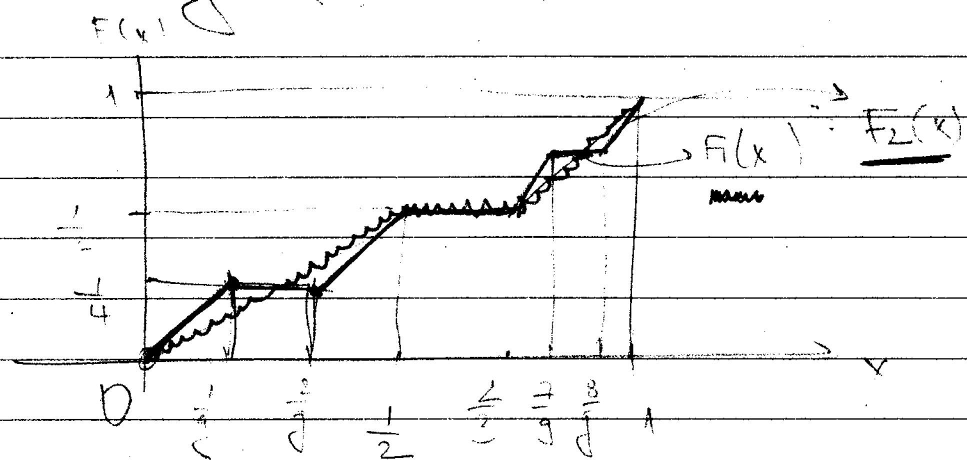
2) Абсолютно непрекъснати.

$\exists$ ф. $f(x)$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Плътност на вероятност

$$P((a;b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

3). Сингулярни - сл.в. на Кантор (пр.)



$F(x) = \lim F_n(x)$

Теорема на Асколи-Арцела

р-ция

1) $F_n(x)$ е равномерно огр.

2) $F_n(x)$ е равностепенно непр.

1) означава $\exists$ const C : $|F_n(x)| \leq C$

2) → equicontinuous

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x) : |x-y| < \delta \Rightarrow |F_n(x) - F_n(y)| < \varepsilon$.

$F(x)$ е непр.

къде е постоянна:

(дълж.) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots\right) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$

Почти навсякъде е const = 1.

Тази сл.в. не е абс. непр., защото $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \neq F(x)$

$$F(x) = p_1 . F_1(x) + p_2 . F_2(x) + p_3 F_3(x)$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Случайни величини

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F)$

$$\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

$$F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi^{-1}(-\infty, x])$$

Примери за сл. вел.:

1) Индикатор на събитие $A \in \mathcal{F}$

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega \in A \\ 0, & \text{ако } \overline{\omega} \in A \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

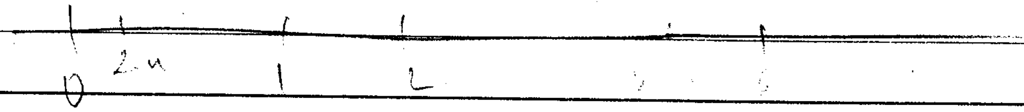
2) Проста сл. вел. – ако е ... на ...

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k}$$

Лема: а) Ако ξ – сл. вел., то $\exists\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – прости сл. вел. такива, че $\xi(\omega) = \lim \xi_n(\omega)$, $\forall \omega$.

б) Ако $\xi \geq 0$, то $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_n \ldots$ – ...

Д-во: б) $\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n}\}} + n . 1_{\{\xi \geq n\}}$



$\xi_n \le \xi$

$\xi_n \le \xi_{n+1}$ $\qquad n \to n+1$

$\frac{2(k-1)}{2^{n+1}}$ $\frac{2k-1}{2^{n+1}}$ $\frac{k}{2^n}$

Ако ξ приема ст-сти тук.

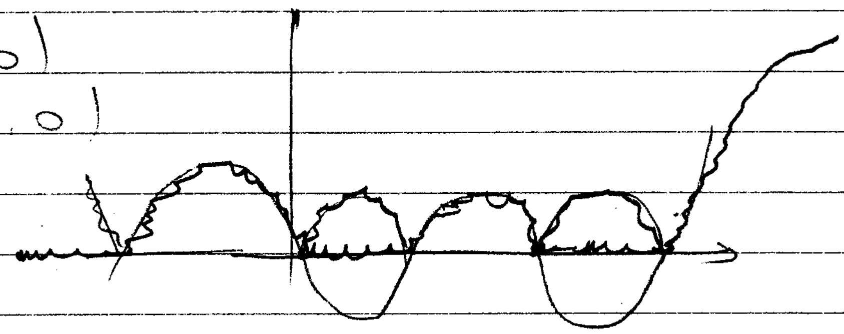
$\xi_n = \xi_{n+1}$

Така $\xi_1 \le \xi_2 \le \dots \le \xi_n \le \dots$ е монотонна
$\Rightarrow$ е сходяща

а) Следва от, че $\xi = \xi^+ - \xi^-$
(всяка сл. вел. може да се представи като разлика на 2 н. вел. $\xi^+, \xi^- \ge 0$)

$\xi^+ = \max(\xi, 0)$

$\xi^- = \max(-\xi, 0)$



14.04.2014г ТВМС - лек.

Математическо очакване

1. Мат. очакване на проста сл. вел.

$$\xi = \sum_{1}^{n} x_k \underbrace{1_{A_k}}_{\text{индикатор}}$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$
ПГНС
(пълна група от несъвм. съб.)

св-ва на $E\xi$:

1) Ако c е число: $E(c\xi) = cE\xi$.

2) Ако $\xi = c = const$: $E\xi = c$.
$\xi = c.1_\Omega$

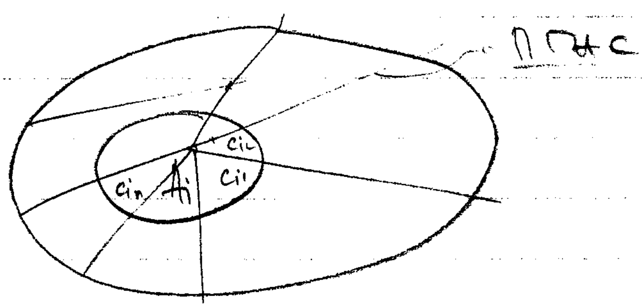
3) Ако ξ, η са сл. вел., то $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$.

Ако $\eta = \sum_{k=1}^{m} y_k . 1_{B_k}$

ако $m=n$ и $B_i = A_i$ - очевидно $i=\overline{1,n}$.

$C_{ij} = A_i \cap B_j$
↳ група от несъвместими събития.

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} 1_{C_{ij}}$$



$$\eta = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij}$$

4) Ако $\xi \geq \eta$, то $E\xi \geq E\eta$.

5) $E|\xi| \geq |E\xi|$

следва от 4) и $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$

2. Матем. очакване на ~~неотрицателни~~ случайни вел. $(\xi \geq 0)$

$$\xi_n = \sum_{1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot 1_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n}\right\}} + n 1_{\{\xi > n\}}$$

$$E\xi_n = \sum_{1}^{n.2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot P\left(\frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n}\right) + P(\xi > n)$$

$\xi_n \leq \xi_{n+1}$

$\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$

$\forall \omega$

$\Rightarrow E\xi_n \leq E\xi_{n+1}$

$\Rightarrow$ има граница.

$$\boxed{E\xi := \lim_{n\to\infty} E\xi_n}$$

остават в сила 5-те свойства;

3. Мат. очакване на произволна сл. вел.

$\xi = \xi^+ - \xi^-$, $\xi^+, \xi^- \geq 0$

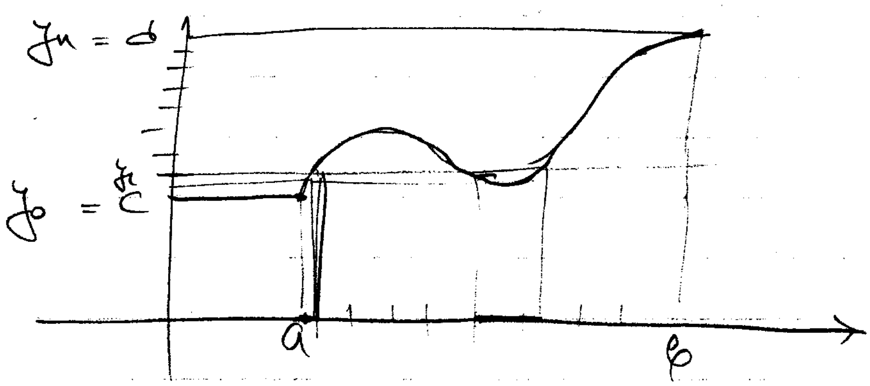
$$\boxed{E\xi = E\xi^+ - E\xi^-}$$

Ако $E\xi^+$ и $E\xi^- = \infty$.

4 възможности: ~~крайно~~, $+\infty$, $-\infty$, $\nexists$.

в сила са 5-те свойства;

4. Интеграл на Лебег



Риманова инт. сума $= \sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$

Лебегова инт. сума: $\quad \sum y_i \cdot \left|\{x : f(x) \in \Delta_i\}\right| \quad , y_i \in \Delta_i$

! Вероятността е аналог на дължината в анализа. !

5. Математ. очакване на абс. непр. сл. вел.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(x)}_{\text{вероятностна плътност}} dx$$

$$E\xi = \int_0^\infty x f(x)\, dx \qquad , \xi \geq 0$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi_i)(b-a)$$

$$E\xi_n = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n}\left(F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right) + n \cdot \left(1 - F(n)\right) \cdot$$

$$= \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n}^{-\xi_{n,k}+\xi_{n,k}} f(\xi_{n,k}) \cdot 2^{-n} + n\left(1 - F(n)\right) = \qquad (*)$$

$\frac{k-1}{2^n} \leq \xi_{n,k} < \frac{k}{2^n}$

$$= \underbrace{\sum_1^{n \cdot 2^n} \xi_{n,k} f(\xi_{n,k}) \cdot 2^{-n}}_{\text{Риманова инт. сума}} + \underbrace{\sum \left(\frac{k-1}{2^n} - \xi_{n,k}\right) f(\xi_{n,k})\, 2^{-n}}_{\downarrow 0}$$

$\leftarrow \int x f(x) dx$

$$\int_0^1 dx = 1 \quad , \quad \int_0^1 (dx)^2 = 0$$

$$0 \quad \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad 1$$

$$A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m \cdot 2^n} \xi_{m,k} f(\xi_{m,k}) \cdot 2^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{m} x f(x)\, dx$$

<u>Диагонална</u> <u>теорема</u> <u>на Г. Кантор</u>.

Ако $A_{m,n}$ е редица, която:

1) за $\forall m$, $A_{m,n} \to a_m$, $n \to \infty$.

2) $a_m \to a$, $m \to \infty$.

Тогава диагоналната редица $A_{n,n} \to a$.

(От това следва, че $\int_0^\infty x f(x)\, dx$) ...

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(n)}{\frac{1}{n}} =$$

$$\overset{\text{Лопитал}}{=} \lim_{n\to\infty} n^2 \underset{\overset{\shortparallel ?!}{F'(n)}}{f(n)}$$

Ако $\lim_{n\to\infty} n^2 f(n) = \varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\varepsilon}{x^2} \qquad \int_0^\infty x f(x)\, dx = \infty.$$

Тогава този член можем да го пренебрегнем в (#)

и доказахме, че формулата е вярна.

28.04.2014г. ТВМС - лек.

Основни непрекъснати разпределения

1. Нормално разпределение НВ!

вероятностна плътност:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad m, \sigma \text{ - параметри}$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad \sigma > 0$$

св-ва:

$$\xi \sim N(m, \sigma)$$

1) $m = E\xi$

$\sigma^2 = D\xi$

Ако $m = 0, \sigma = 1$ я стандартно нормално разпределение

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

* при интегралната теорема на Моавър-Лаплас

$$P\left(a < \frac{k - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$\| $$

$$P(a < Z < b)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m + m) \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{(x-m)}^{t} e^{-\frac{\overbrace{(x-m)^2}^{t^2}}{2\sigma^2}}\,d(\overbrace{x-m}^{t})}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} m \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx}_{=m} =$$

$$= 0 + m = m.$$

Аналогично се док., че $\sigma^2 = D\xi$. (по ф-лата:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx.$$

3) **Важно свойство:**

Ако $\xi \sim N(m,\sigma)$ (величина ξ е нормално разпределена с парам. m, σ)

a - число, то

$$\xi + a \sim N(m+a, \sigma), \quad \xi \cdot a \sim N(m \cdot a, \sigma \cdot |a|).$$

($P(\xi \in dx) = f(x)\,dx$ вер. да попадне в интервалче)

$$P(\xi + a \in dx) = P(\xi \in dx - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

→ параметрите са $m+a$ и σ.

$$P(a \cdot \xi \in dx) = P\left(\xi \in \frac{dx}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{a} =$$

замесваме най-горе (вначалото)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma a} \cdot e^{-\frac{(x-am)^2}{2\sigma^2 a^2}} dx$$

→ параметрите са $\sigma|a|$ и $a \cdot m$.

Сл. от 3): Ако $\xi \sim N(m,\sigma)$, то $z = \frac{\xi - m}{\sigma} \sim N(0,1)$,

т.е. стандартно норм. разп. вел.

z - преобразувание

Гама разпределение

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx$$

Да положим $x = \frac{y}{\beta}$

$$\Rightarrow \Gamma(p) = \frac{1}{\beta}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{p-1} e^{-\frac{y}{\beta}}dy =$$

$$= \beta^{-p}.\int_0^{\infty} y^{p-1}.e^{-\frac{y}{\beta}}dy$$

$$\frac{\int_0^{\infty} y^{p-1}.e^{-\frac{y}{\beta}}dy}{\Gamma(p)\,.\beta^{p}} = 1$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{y^{p-1}.e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^{p}.\Gamma(p)}$$ е вероятностна плътност на някакво абсолютно непрекъснато разпредел.

Г разпр. с ~~параметри~~ β и p. $= \Gamma(p,\beta)$.

Частен случай на Г разпр.:

1) $p = 1 \Rightarrow f(y) = \frac{1}{\beta}.e^{-\frac{y}{\beta}}$ = експоненциално разпределение с параметър β. $\mathcal{E}(\beta)$.

2) $p = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\beta = 2$.

$$f(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \chi^2(n)$$

(хиквадрат разпределение или разпределение на Пиърсън)

n се нар. <u>степени на свобода</u> на разпределението

$\xi \sim \Gamma(p,\beta)$

$E\xi = ?$, $D\xi = ?$

$$E\xi = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot \frac{x^{p-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^p \cdot \Gamma(p)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\beta^p \cdot \Gamma(p)} \cdot \int_0^\infty x^p \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} =$$

↓ виж ~~дефиницията~~

$$= \frac{1}{\beta^p \cdot \Gamma(p)} \cdot \beta^{p+1} \cdot \Gamma(p+1) = \underline{\underline{\beta \cdot p}}$$

$$\left(* \ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = p \right)$$

~~Бета разпределение~~

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}\,dx \qquad a,b>0$$

$$f(x) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a,b)}$$ – вероятностна плътност на $B(a,b)$ разпр.

$$E\xi = \int_0^1 x f(x)\,dx \overset{\xi \sim B(a,b)}{=} \frac{1}{B(a,b)} \cdot \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1}\,dx =$$

$$= \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+1) \cdot \cancel{\Gamma(b)}}{\Gamma(a+b+1)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \cancel{\Gamma(b)}} =$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad = \frac{a}{a+b}$$

Частни случаи:

1) $a = b = 1$ ⇒ стандартно равномерно разпределение.

$f(x) = 1$

2) $a = b = 1/2$ ⇒ разпределение на аркуссинуса (arcsin) разпр.

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = c\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2c\int_0^x \frac{d\sqrt{x}}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}} = \underline{2c.\arcsin\sqrt{x}}.$$

Разпределение на функция от сл. вел.

ξ е сл. вел. с вер. плътност $f_\xi(x)$.

$g(x)$ е детерминирана ф-ция

$\eta = g(\xi)$ нова случайна вел.

$f_\eta(x) = ?$

1) Случай $g(x)$ е монотонно растяща (пр x, x^2, e^x)

$g^{-1}(x)$ обратната на g, която също е мон. растяща!

$$F_\eta(x) = P(\eta \le x) = P(g(\xi) \le x) = P(\xi \le g^{-1}(x)) = F_\xi(g^{-1}(x))$$

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(g^{-1}(x)) = F'_\xi(g^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}g^{-1}(x) = \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}$$

2 сл.) g е монотонно намаляваща.

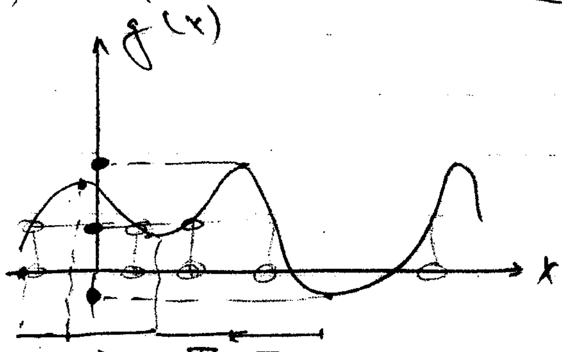
$\exists\ g^{-1}$ също монотонно намаляваща.

$$\underline{F_\eta(x)} = P(\eta \le x) = P(g(\xi) \le x) = P(\xi \ge g^{-1}(x)) = 1 - F_\xi(g^{-1}(x))$$

$$\underline{f_\eta(x)} = F'_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - F_\xi(g^{-1}(x))\right) = -F'_\xi(g^{-1}(x))\,\frac{d}{dx}\,g^{-1}(x) =$$

$$= \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|}.$$ } <u>обща формула и за 2-та случая</u>

3 сл.) Произволна ф-ция.



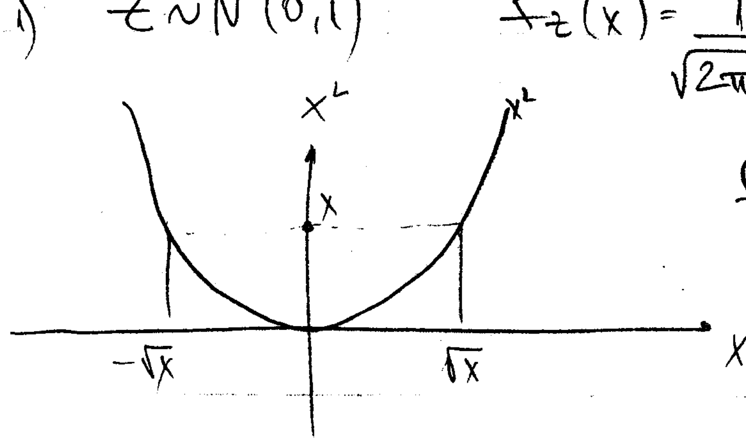
$\eta = g(\xi)$

интервали на монотонност.

$$f_\eta(x) = \sum_{y = g^{-1}(x)}' \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|}.$$

<u>примери:</u> 1) $\xi \sim N(0,1)$ $\quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad g(x) = x^2$.

$\eta = \xi^2$.



$f_\eta(x)_{x \ge 0} =$

заместване във ф-лата!

$$f_\eta(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow$$ вероятн. плътност на $\chi^2(1)$-разп. !

$g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

вторият член от сумата е същият заради модула

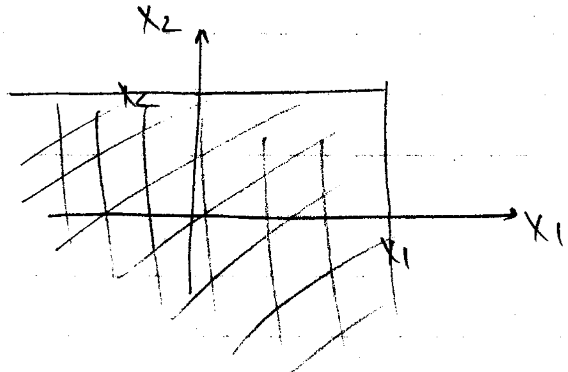
Случайни вектори

това са няколко сл. вел.

$(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

1. ф-ция на разпределение на сл. в-р.

съвместна $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$



при $n=2$

(да попаднем в защрих. част)

Съвместна вероятностна плътност

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

$P(X_1 \in dx_1, X_2 \in dx_2, \dots, X_n \in dx_n) = f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$

Свойства на $F(x_1, \dots, x_n)$:

1) ф-цията на разпр. е ненамаляваща по $\forall$ 1 от аргументите си;

2) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0$.

3) $\lim\limits_{x_i \to +\infty} F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = F_{x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n}(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

<u>Условия</u> <u>за</u> <u>съгласуваност</u>.

<u>Т на Колмогоров за съгласуваните разпределения:</u>

Нека $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворява 3).
Тогава $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ е ф-ция на разпределение на някой случаен в-р.
(без д-во)

$*_2)$ $F(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n) \le F(\infty, \dots, x_i, \dots \infty)$ - ф. на разпр. на x_i

$x_i \to -\infty$ 0

2. Случайни в-ри с <u>независими</u> <u>координати</u>.

ако $P(x_1 \in I_1, x_2 \in I_2) = P(x_1 \in I_1) \cdot P(x_2 \in I_2)$
$I_1, I_2 \in \mathcal{B}$.

При $n = 2$.

<u>Т.</u> Следните условия са еквивалентни:

1) x_1, x_2 са независими.
2) $F(x_1, x_2) = F_{x_1}(x_1) \cdot F_{x_2}(x_2)$.
3) $f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2)$.

<u>д-во:</u> 1) $\Rightarrow$ 2): $I_1 = (-\infty, x_1]$, $I_2 = (-\infty, x_2]$ + <u>деф.</u>

$P(x_1 \in I_1, x_2 \in I_2) = P(x_1 \le x_1, x_2 \le x_2) = F(x_1, x_2) - F_{x_1}(x_1) \cdot F_{x_2}(x_2)$

2) $\Rightarrow$ 3): $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2)$.

3) $\Rightarrow$ 1): $P(x_1 \in I_1, x_2 \in I_2) = \int\limits_{I_1}\int\limits_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_1 x_2 = \int\limits_{I_1}\int\limits_{I_2} f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 =$

$\int\limits_{I_1} f_{x_1}(x_1) dx_1 \cdot \int\limits_{I_2} f_{x_2}(x_2) dx_2 = P(x_1 \in I_1) \cdot P(x_2 \in I_2)$ - доказано.

<u>ок.</u>

12.05.2014 Лек. Условна вероятност [illegible]
и условно мат. очакване

X_1, X_2 – зависими; $f_{X_1|X_2}(x|y)$ вер. пл. на X_1 при усл., че X_2 е приела ст-ст y

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$A = \{X_1 \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{малък} \\ \text{инт.,} \\ \text{близък} \\ \text{до т. } x}}{dx}\} \qquad B = \{X_2 \in dy\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(X_1 \in dx, X_2 \in dy)}{P(X_2 \in dy)} =$$

съвм. вер. пл.

$$= \frac{f(x,y)\, dx\, \cancel{dy}}{f_{X_2}(y)\, \cancel{dy}} = \frac{f(x,y)}{f_{X_2}(y)}\, dx \quad X_1$$

вер. пл. на сл. вел.

не зависи от дълж. на инт. dy

$\sim dx$

$$\boxed{f_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_{X_2}(y)}}$$

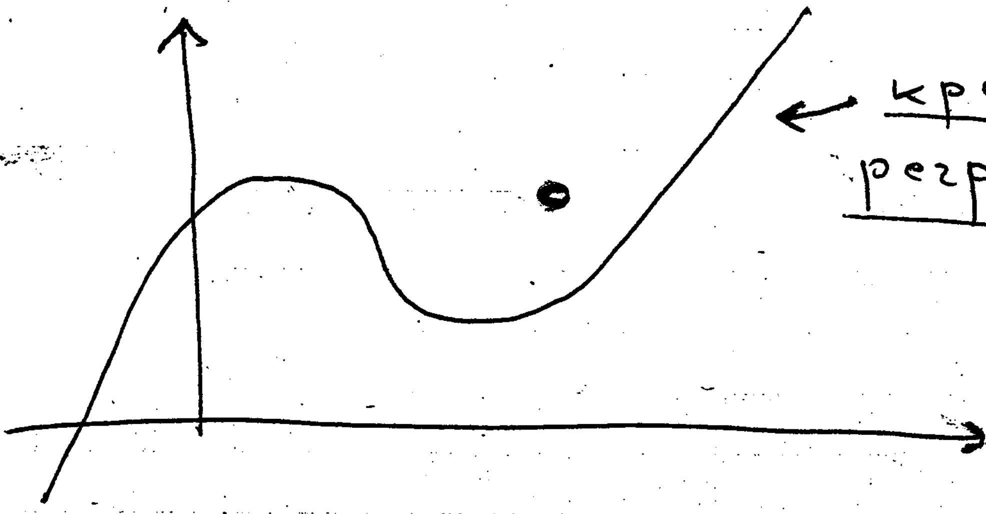
усл. вер. плътност

$$E(X_1 | X_2 = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X_1|X_2}(x,y)\, dx$$

условно мат. очакване

$$\parallel$$

$$g(y)$$



крива на регресия

Двумерно нормално разпределение

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}}$$

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}\, e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_{X_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

ρ - коеф. на корелация ~~м/у~~ на X_1 и X_2

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1 DX_2}}$$

Незав. $\Rightarrow$ Некорел.

$$f_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_{X_2}(y)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-I} \quad (*)$$

$$I = \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right) - \frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2} =$$

$$\boxed{|\rho| \leq 1}$$

$$\frac{1}{(1-\rho^2)} - 1 = \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)}{\sigma_1} - \frac{\rho(y-m_2)}{\sigma_2^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left((x-m_1) - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}$$

(*) $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{\left(x - m_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}$

дисперсия

Това е вер. пл. на норм. разпр. с очертаните параметри

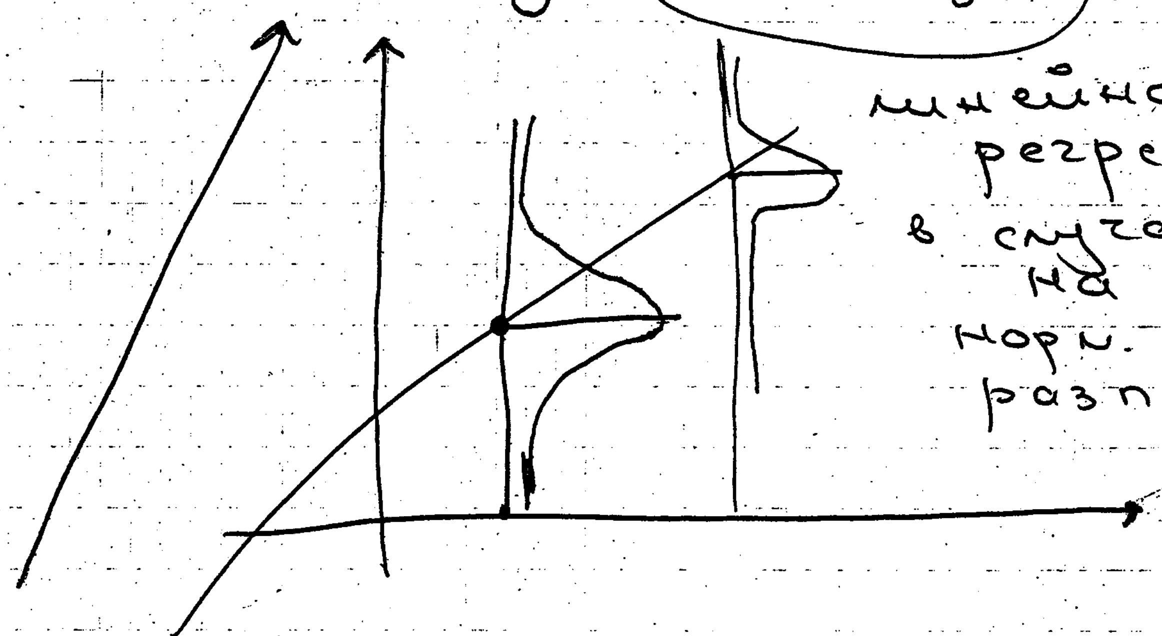
мат. очакване — $m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)$ и

условно $\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}$ — дисперсия

$$E(X_1 \mid X_2 = y) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)$$

$$D(X_1 \mid X_2 = y) = \sigma_1^2(1-\rho^2)$$

! независ. от y



линейна регресия в случай на норм. разпр.

① хомоскедастичност

② линейна регресия

} хар. св. во на норм. разпр.

Видове сходимост на случайни редици

безбр. мн. сл. вел.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - случайна редица

1. Сходимост почти сигурно

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots : \Omega \to \mathbb{R}$

Ако $\omega \in \Omega$ е ел. събитие, то

$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots \xi_n(\omega) \dots$ - числова редица

ст-ти на ел. събитие в ω

$$A = \left\{ \omega : \text{редицата е сх.} \; \lim \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \right\}$$

Ако $P(A) = 1 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{почти сигурно}} \xi$ (п.с.)

2. Сходимост по вероятност

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, ако $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ЗГЧ

(закон за големите числа) Якоб-Бернули

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\frac{k}{n}$ → ξ_n

p → изр. сл. вел - const p

3. Средно-квадратична (L^2) сходимост

$$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi, \text{ ако}$$

$$E(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

4. Сходимост по разпределение –

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \text{ ако}$$

$$\underbrace{F_n(x)}_{\text{ф-я на разпр. на } \xi_n} \longrightarrow \underbrace{F(x)}_{\text{ф. р. на } \xi} \text{ в}$$

$\forall$ точка x, в която $F(x)$ е непрекъсната.

$$P\left(a < \frac{k - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Моавър-Лаплас

$a = -\infty$

$b = x$

ф-я на разпр. на норм. бр. успехи

$$F_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

5. Слаба сходимост

• $\xi_n \Rightarrow \xi$, ако

$$E(f(\xi_n)) \longrightarrow E(f(\xi)) \text{ за}$$

$\forall$ огр. непр. ф-я $f(x)$.

Th

1) $\xi_n \xrightarrow{\text{п.с.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$

2) $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$ — сда

от нер. Чебишов

3) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$,

ако $\xi = const$, вярно е и обратното

4) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$

2) $P(\xi > \varepsilon) < \frac{E\xi}{\varepsilon}, \ \xi \geq 0$

$$P(|\xi - \xi_n| > \varepsilon) = P((\xi - \xi_n)^2 > \varepsilon)$$

$$< \frac{\cancel{P}E(\xi - \xi_n)^2}{\varepsilon^2} \to 0$$

4) без д-во (сложно :S)

Лема $\xi_n \xrightarrow{\text{п.с.}} \xi$, ако $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq |\xi_n - \xi|$$

$\Rightarrow \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \} \subseteq$

$\{ \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \} \Rightarrow$

$P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon) \geq P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$

и 1) :))

Д-во Лема: $\{\omega : \xi_n^{(\omega)} \not\to \xi(\omega)\} =$

$\xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega) \Leftrightarrow \exists N : \forall n \; \exists$

$k \geq n : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \frac{1}{N}$

$\exists \to \cup$

$\forall \to \cap$

$= \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \frac{1}{N}\}$

$\Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega | \xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \frac{1}{N}\}) = 0$

$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \frac{1}{N}\}$

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n$ намал. редица

$P(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (<u>σ-адитивност</u> лема)

$\parallel$

$P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \frac{1}{N})$:))

3) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow$

? $E(f(\xi_n)) \longrightarrow E(f(\xi))$, $f(x)$ е огр. и непр. $\bullet$

? $E|f(\xi_n) - f(\xi)| \longrightarrow 0$

$\le$

$$|f(\xi_n) - f(\xi)| \overset{\le}{=} \overset{①}{|(f(\xi_n) - f(\xi))| \mathbb{1}_{\{|\xi|>N\}}} +$$

$$+ |(f(\xi_n) - f(\xi))| \mathbb{1}_{\{|\xi| \le N,\ |\xi_n - \xi| > \varepsilon\}} +$$

$$+ \overset{③}{|(f(\xi_n) - f(\xi))| \mathbb{1}_{\{|\xi| \le N,\ |\xi_n - \xi| \le \varepsilon\}}}$$

$\underline{\delta > 0}$

① N - дост. гол.

$< \frac{\delta}{3}$ за сметка на избора на N

③ непр. на комп. $\odot \Rightarrow$ равн. непр.

$< \frac{\delta}{3}$

② $\underbrace{(|f(\xi_n) - f(\xi)|)}_{\text{const } C}\mathbb{1}_{\{|\xi| \le N,\ |\xi_n - \xi| > \varepsilon\}}$

ограниченост на f

$\Rightarrow E(\ ) \le$

$$|f(x)| \le C \quad \forall x$$

$$\le 2CP(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

сходимост по вер. $< \frac{\delta}{3}$ за дост. гол. N

Характеристични функции

$$\varphi_\xi(t) = E(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

преобразуване (трансформация) на Фурие

$$e^{ia} = \cos a + i\sin a$$

(обратимо)

Поасон

Примери: 1) $\xi \sim P_o(\lambda)$

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

2) $Z \sim N(0,1)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx$$

$$e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!}$$

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \cancel{\frac{x^2}{2}}} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$\underset{\infty}{=} e^{itx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E(Z^n)$$

$$E Z^n = \begin{cases} 0, & n\text{ - нечетно} \\ (n-1)!!, & n\text{ - четно} \end{cases}$$

$E(x+Z)^n = E_n(x)$ Ермит

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} (2n-1)!! =$$

хар. ф-я на станд. норм. разпр.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{2^n . n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$\xi \sim N(m, \sigma)$

$\xi = m + \sigma z, \; z \sim N(0,1)$

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{it(m+\sigma z)} =$$

$$= e^{itm} Ee^{it\sigma z} = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

<u>Свойства на хар. ф-ции</u>: $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}$

1) $\varphi_\xi(0) = 1 \quad |\varphi_\xi(t)| \le 1$

2) Ако ξ и η - независими, то

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$$

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\eta+\xi)} = E(e^{it\xi} . e^{it\eta}) =$$

$$= Ee^{it\xi} . Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$$

$\xi \sim N(m_1, \sigma_1)$

$\eta \sim N(m_2, \sigma_2)$

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = e^{itm_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{itm_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} =$$

$$= e^{-it(m_1+m_2) - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\frac{t^2}{2}}$$ - това е характ. ф-я на мат. очакване на $N(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y)\, f_\eta(y)\, dy$$

<u>конволюция</u>

3) $\varphi_\xi(t)$ е реалнозначна $\Leftrightarrow$ разпр. на ξ е <u>симетрично</u>, т.е. [redacted] ξ и $-\xi$ имат едно и също разпр.

$P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$

$\Leftarrow$

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx + i \sin tx) f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\, f(x)\, dx$$ - реалнозначна

[redacted]

$$\Rightarrow \varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

$$? \varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

реалнозн. $\varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$

$$\varphi_\xi(t) = E(\cos t\xi + i\,E(\sin t\xi)$$

$$\varphi_\xi(-t) = \varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t) \;:))$$

19.05.2014 г. ТВМС – лек.

4) $\varphi_\xi(t)$ – равном. непр.

5) Ако $E(|\xi|^n) < \infty$, то $\exists\ \varphi_\xi^{(n)}(t)$ – непр.

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E(\xi^k) + o(t^n)$$

$$-\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx \qquad \varphi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix \cdot e^{itx} f(x)\,dx.$$

ф-ла на Тейлор: $\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \frac{\varphi_\xi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + o(t^n)$

Метод на характеристичните ф-ции за д-во на гранични теореми

T: 1 (теорема за непрекъснатост (Ляпунов))

1) Ако $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ (р-ца от сл. вел.) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, клони по разпределение (слаба сходимост)

то $\varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi_\xi(t)$, $\forall t$.

Д-во:
знаем, че $\varphi_\xi(t) = E\,e^{it\xi}$ $\qquad f(x) = e^{itx}$

слаба сх. $\Rightarrow$ $E(f(\xi_n)) \to E(f(\xi))$

2) Ако $\varphi_{\xi_n}(t) \longrightarrow \varphi(t)$, $\forall t$ и ако
редица
$\varphi(t)$ е непр. при $t=0$,

то $\varphi(t)$ е характеристична ф. на сл. вел. ξ и $\xi_n \xrightarrow{} \xi$ (слабо клони), ($\xi_n \Rightarrow \xi$ по разпр. или слабо)

Пр.: 1) Закон за големите числа:

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независими сл. вел. и еднакво разпр. сл. вел. с краен първи абсолютен момент, т.е. $E|\xi_1| < \infty$.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1$$

клони по вероятност

приемаме $E\xi_1 = 0$.

? $\frac{S_n}{n} \Rightarrow 0$ $\qquad \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right)$$, т.к. $\varphi_\xi(t) = E e^{it\xi}$.

$$= \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$ $\qquad \varphi_{\xi_1}(t) = 1 + o(t)$, $E\xi_1 = 0$

заместване

$$= \left(1 + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \longrightarrow 1$$

Централна гранична теорема

$\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ незав. еднакво разпр. сл. вел.

$E\xi_1^2 < \infty$.

$$S_n = \sum_1^n \xi_k$$

$$T = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \Rightarrow N(0,1)$$

приемаме $E\xi_1 = 0$.

$$E\xi_1^2 = D\xi_1 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow DS_n = n \cdot \sigma^2$$

$$? \quad \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1).$$

$$? \quad \varphi_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Д-во:

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

$$\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + \frac{(it)^2}{2}\sigma^2 + o(t^2)$$

$$= \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{\sigma^2 2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n \longrightarrow \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Основни понятия и задачи на статистиката

1. Популация (генерална съвкупност)

и извадка — осн. понятия.

осн. зад.: от данните в извадката да направим извод за популацията.

популация Ω (простр. от сл. вел.)

$$X: \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \to X(\omega) \end{cases}$$

(сл. вел.)

число (резултат) (от наблюдението над ω)

извадка: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — сл. вел., които имат следните свойства:

1) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имат същото Ω като генералната съвкупност X.

2) $X_1, \ldots, X_n$ имат същото разпределение като X;

3) $X_1, \ldots, X_n$ са независими;

n = брой наблюдения = обем на извадката;

2. Задача за оценка на неизвестен параметър на ГС.

(параметрична статистика)

- видът на разпр. на X е известен;

θ – неизвестен параметър на разпр. на X;
$\theta = ?$, но трябва да знаем нещо за популацията, а това е точно извадката.

Дадено: Извадка $X_1, X_2, \dots, X_n$.
Как се решава тази зад.?

1) Метод на точковите оценки.
2) Метод на интервалните оценки (на доверителните интервали).
3) Метод на стат. хипотези.

по трудност и по „сила".

) Метод на точковите оценки:

D1: Статистика – всяка ф-ция, която зависи само от извадката.
$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$

D2: Точкова оценка – статистика, приета за стойност на неизвестния параметър.

θ – неизв. парам.
$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ – точкова оценка

($\theta \approx \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ като заместител)
приемем

Видове точкови оценки

1.) Неизместени - ако $E\hat{\theta} = \theta$

ср. ст-ст на оценката

$\hat{\theta} - \theta$ - грешка на оценката

$$\hat{\theta} - \theta = \hat{\theta} - E\hat{\theta} - \theta + E\hat{\theta} =$$

$$= \underbrace{\hat{\theta} - E\hat{\theta}}_{\text{случайна грешка}} - \underbrace{(\theta - E\hat{\theta})}_{\text{систематична грешка}} \to 0$$

примери:

за неизм. оценки:

1) Ако $\theta = EX$, тогава оценката

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ - неизместена.

д-во.

$$E\overline{X} = E\,\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot E\,(X_1 + X_2 + \dots + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n \right) \overset{\text{св. 2}}{=} \frac{1}{n} \cdot n \cdot EX = EX = \theta.$$

2) Ако $\theta = DX$, то изглежда разумно да се използва оценката

$$\begin{array}{c|cccc} & X_1, & X_2, & \dots & X_n \\ \hline & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{array}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2$$

Това обаче, е изместена оценка!!!

защо?

$$E\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2 =$$

приемаме, че

$EX = 0$

$DX = E(X^2)$

$$= \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k^2 - 2\overline{X}.X_k + \overline{X}^2 \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2n.\overline{X}^2 + n.\overline{X}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n.\overline{X}^2.$$

$$E\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2 = E\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - nE\overline{X}^2 =$$

$$= nDX - nE\overline{X}^2 \qquad /:n$$

$$(*) \quad \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2 \right) = DX - E(\overline{X}^2).$$ → е оц. изместена

$$\overline{X}^2 = \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right)^2 =$$

$$= \frac{(X_1 + \dots + X_n)^2}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2}.$$

$$E\overline{X}^2 = \frac{1}{n^2} \left(nDX + 2.\sum_{i<j} E(X_i X_j) \right) \overset{св.3}{=}$$

$$= \frac{DX}{n} + \cancel{\frac{2}{n^2} \sum_{i<j} EX_i . EX_j} \to 0$$

$$(*) = \frac{n-1}{n} . DX.$$

Д:)

Неизместена оценка е $\underbrace{S^2 = \frac{1}{n-1} . \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2}$

<u>поправена дисперсия на извадката</u>

26.05.2014 ТВМС - лек.

б) оценки с минимална дисперсия.

$$m \longrightarrow \underbrace{\bar{X}, X_1, X_2}, \frac{X_1+X_2}{2}, \ldots$$

вс. са неизместени оценки за m.

Коя от тях да предпочетем?

Дисперсията отчита „точността"

$$DX_1 = DX_2 = DX$$

$$D\frac{X_1+X_2}{2} = \frac{1}{4}D(X_1+X_2) = \frac{1}{4}(DX_1+DX_2) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2DX = \frac{DX}{2}$$

$$D\bar{X} = D\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \frac{1}{n^2}(DX_1+DX_2+\ldots+DX_n) =$$

$$= \frac{DX}{n}$$ най-„качествена" оценка

по-малка дисперсия ⇒ най-точна оценка

Лема: Ако t е неизместена оценка с минимална дисперсия за θ, то тя е $\exists !$.

$t = t(x_1, \ldots, x_n)$ - ф-ция на извадката.

Д-во: Нека t_1 и t_2 са неизместени оценки с мин. дисперсия

$$\Rightarrow Et_1 = Et_2 = \theta,$$

но и $Dt_1 = Dt_2 = d > 0$

Разгл. $t_3 = \frac{t_1+t_2}{2}$.

$Et_3 = \theta \Rightarrow t_3$ същото е неизм. оценка

$Dt_3 = D\frac{t_1+t_2}{2} = \frac{1}{4}(D(t_1+t_2))$

Но $t_i = t_i(x_1, \dots, x_n)$ $i=1,2 \Rightarrow$ те са зависими

$\Rightarrow$ прилагаме общата ф-ла за дисперсия на сумата:

$$Dt_3 = \frac{1}{4}D(t_1+t_2) = \frac{Dt_1 + Dt_2 + 2\,cov(t_1,t_2)}{4}$$

$$= \frac{d + cov(t_1,t_2)}{2}.$$

Но $d \leq Dt_3$

$\Rightarrow \quad cov(t_1,t_2) \geq d$

Но от нер. на Коши-Буняковски:

$cov(t_1,t_2) \leq \sqrt{Dt_1 \cdot Dt_2} = d$

$\Rightarrow cov(t_1,t_2) = d$

$\Rightarrow$ в нер. на Коши е достигнато "="

т.е. м/у величините има детерминирана линейна зависимост.

$\Rightarrow \quad t_1 = at_2 + b$, a, b са числа.

$D(t_1) = D(at_2+b)$

$d \quad = D(at_2) = a^2 \cdot D(t_2) = a^2 \cdot d$

$\Rightarrow a = \pm 1$

$a=-1 \Rightarrow cov(t_1,t_2) = -d \Rightarrow a \neq -1$

$\Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow t_1 = t_2 + b$

$$E t_1 = E(t_2 + b)$$
$$\theta = E t_2 + b = \theta + b$$
$$\Rightarrow b = 0$$
$$\Rightarrow t_1 = t_2.$$

Неравенство на Рао-Крамер

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta)$ - съвместна вероятностна плътност на извадката, ако неизвестният параметър е θ.

t е неизместена оценка за детерминираната ф. $\tau(\theta)$.

$$Dt \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{\underbrace{D\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta)}}$$

нар. се информационно количество на Фишер.

При t оценка на θ

$$\Rightarrow Dt \geq \frac{1}{D\frac{\partial}{\partial\theta} \ldots}$$ - обратна пропорционалност

По-голямо информац. количество $\Rightarrow$ по-голям знам. $\Rightarrow$ по-точна оценка!

02.06.2014г. ТВМС – лек.

Неравенство на Рао-Крамер

t = неизм. оценка за $\tau(\theta)$ $t=(x_1,\dots,x_n)$.

$f(x_1,x_2,\dots,x_n|\theta)$ – съвм. вероятностна плътност на извадката $X_1,X_2,\dots,X_n$, ако стойността на неизв. параметър е θ.

$$Dt \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{\underbrace{D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1,x_2,\dots,x_n|\theta)\right)}_{\text{информационно количество на Фишър}}}$$

Д-во: $Et=\tau(\theta)$ $\quad \frac{d}{d\theta}\Big|\ \tau(\theta)=\int\limits_{R^n} t(x_1,\dots,x_n).f(x_1,\dots,x_n|\theta)\,dx_1dx_2\dots dx_n$

$$\frac{d}{d\theta}\Big|\ 1=\int f(x_1,\dots,x_n|\theta)\,dx_1dx_2\dots dx_n$$

диференциране по θ

$$\tau'(\theta)=\int\limits_{R^n} t(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_1,\dots,x_n|\theta)\,dx_1dx_2\dots dx_n$$

$$0=\int\limits_{R^n}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_1,\dots,x_n|\theta)\,dx_1\dots dx_n$$

$$\tau'(\theta)=\int\limits_{R^n} t(x_1\dots x_n)\boxed{\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_1,\dots,x_n|\theta)}{f(x_1,\dots,x_n|\theta)}}.f(x_1,\dots,x_n|\theta)\,dx_1\dots dx_n$$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f(x_1,\dots,x_n|\theta)}{f(x_1,\dots,x_n|\theta)} \cdot f(x_1,\dots,x_n|\theta)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_1,\dots,x_n|\theta)$$

$$\tau'(\theta) = E\left(t(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_1,\dots,x_n|\theta)\right)$$

$$0 = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_1,\dots,x_n|\theta)\right) \quad |\cdot\tau(\theta)$$

$$\ominus$$

$$\tau'(\theta) = E\left(\underbrace{(t(x_1,x_2,\dots,x_n)-\tau(\theta))}_{\xi}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1,\dots,x_n|\theta)}_{\eta}\right) \le$$

$\downarrow E(t) = E(\tau(\theta))$ заради това, че t е неизм. оценка за $\tau(\theta)$.

$$E|\xi\cdot\eta| \le \sqrt{E(\xi^2)\cdot E(\eta^2)}$$

↳ неравенство на Коши

$$\le \sqrt{Dt(x_1,\dots,x_n)\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1,\dots,x_n|\theta)\right)}$$

Вдигаме $|^2$ и делим и готово.

Случай на независима извадка

$$f(x_1,\dots,x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

↓

вероятностна плътност на генералната съвкупност X

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_i|\theta)$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1, \dots x_n|\theta)\right) = D\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_i|\theta)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_i|\theta)\right) \stackrel{\text{cb. }2}{=} n \cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta)\right)$$

$$Dt \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{n \cdot D\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta)\right)}.$$

Д.) t - <u>ефективна оценка</u>, ако в неравенството на Р.К се достига "=".

Всяка ефективна оценка е с минимална дисперсия

Пример на ефективна оценка:

$X \sim N(\theta, 1)$ $\quad \bar{X}, X_1, X_2, \dots, \frac{X_1 + X_2}{2}, \dots$

$\bar{X} \to$ ефективна оц.

$$D\bar{X} = \frac{1}{n}$$

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

$$\ln f(x|\theta) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{(x-\theta)^2}{2} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta) = x - \theta$$

$$D\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X|\theta) = D(X-\theta) = 1$$

$\longrightarrow$

Статистически хипотези

(генерална съвкупност)

θ - неизв. параметър на г.с X

$X_1, \dots, X_n$ - извадка (случайна точка в $\mathbb{R}^n$)!

$\theta = ?$

1. Идея на метода:

θ_0 - число, θ_0 е възможна стойност на θ.

(възможно е $\theta = \theta_0$)

$\theta \neq \theta_0$ също е възможно;

$H_0: \theta = \theta_0$ - нулева (основна) хипотеза

$H_1: \theta \neq \theta_0$ алтернативна (контра) хипотеза;

Въз основа на извадката, коя от хипотезите да изберем?

$H_0: \theta \leq \theta_0$ или $H_0: \theta \geq \theta_0$ → фирма производство

$H_1: \theta > \theta_0$ $H_1: \theta < \theta_0$ → обезстойност

пр.: лекарство;

2. Как да решим коя хипотеза да приемем?

- решаващо правило:

избира се област $K \subset \mathbb{R}^n$ (K - критична област)

Ако $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in K$ → отхвърляме H_0,

в противен сл. → приемаме H_0.

3. Анализ на грешките

а) Ако $(x_1, \ldots x_n) \in K$, а да е вярна H_0.

→ грешка от първи род.

б) Ако $(x_1, \ldots x_n) \notin K$, а е вярна H_1.

→ грешка от втори род

Действително вярна хипотеза \ Приета за вярна	H_0	H_1
H_0	Правилно р-ние $1-\alpha$	Грешка от I род α
H_1	Грешка от II род β	$1-\beta$ Правилно р-ние

Вероятност за гр. I род:

$$P((x_1, \ldots x_n) \in K \mid H_0) = \alpha$$ → ниво на значимост

II род:

$$P((x_1, \ldots, x_n) \notin K \mid H_1) \to \min$$

Да изберем такава кр. област K: грешките да са малки.

Фиксираме грешката от I род и искаме да минимизираме грешката от II род. Оказва се, че тази зад. има р-ние

Р-нието се нар. оптимална критична област.

$P(x_1, \dots x_n \notin K \mid H_1) = \beta$

$1-\beta$ = мощност на теста;

4. Лема на Нейман - Пирсън

н.н. от вероятностните см-сти на неизв. парам θ.:

$\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ | $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$

$$f(x_1, \dots, x_n \mid \theta = \theta_0) = f_0(x_1, \dots, x_n)$$
$$f(x_1, \dots, x_n \mid \theta = \theta_1) = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

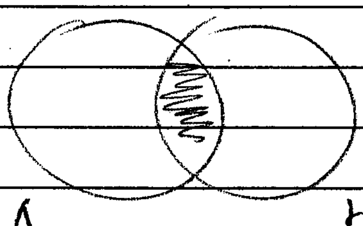
$$\Rightarrow \quad K = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{f_1(x_1, \dots, x_n)}{f_0(x_1, \dots, x_n)} \geq C_\alpha \right\}$$

C зависи от нивото на значимост α

Д-во: Взимаме 2 области: K и A:

$$P((x_1, \dots, x_n) \in A \mid H_0) = \alpha = P((x_1, x_2 \dots x_n) \in K \mid H_0)$$

$$\int_A f_0(x_1, \dots x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_K f_0(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$



A K

$$\Rightarrow \int_{A \setminus K} - \int_{K \setminus A}$$

Ще дот., що: $\int\limits_{K} f_1(x_1 \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n \geq \int\limits_{A} f_1(x_1 \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n$.

$$\qquad\;\, (K \setminus A) \qquad\qquad\qquad\quad (A \setminus K)$$

$$\int\limits_{K \setminus A} f_1(x_1, \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n \geq C_\alpha \cdot \int\limits_{K \setminus A} f_0(x_1 \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= C_\alpha \cdot \int\limits_{A \setminus K} f_0(x_1 \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n >$$

$$> \int\limits_{A \setminus K} f_1(x_1, \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n.$$

– Док. повністю.

Пр.: $X \sim N(\theta, 1)$ — мат. оч. (θ), дисп. (1).

$H_0 : \theta = 0$

$H_1 : \theta = 1$

$$f(x_1, \ldots x_n \mid \theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2}$$

$$f_1(x_1, \ldots x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^2}$$

$$f_0(x_1, \ldots x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\frac{f_1(x_1, \ldots x_n)}{f_0(x_1, \ldots x_n)} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-1)^2 - x_i^2\right)} =$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{n}{2}\right)} = e^{n\left(\overline{x} - \frac{1}{2}\right)} \geq C_\alpha$$

ср. арифм.

Логаритмуване:

$$K = \left\{ (x_1 \ldots x_n) : \overline{X} \geq C'_\alpha \right\}.$$

кн. правило $\Rightarrow$ $\overline{X} > C'_\alpha$

$$P(\overline{X} > C'_\alpha) = \alpha$$

при вярно H_0.

и така намираме C'_α.