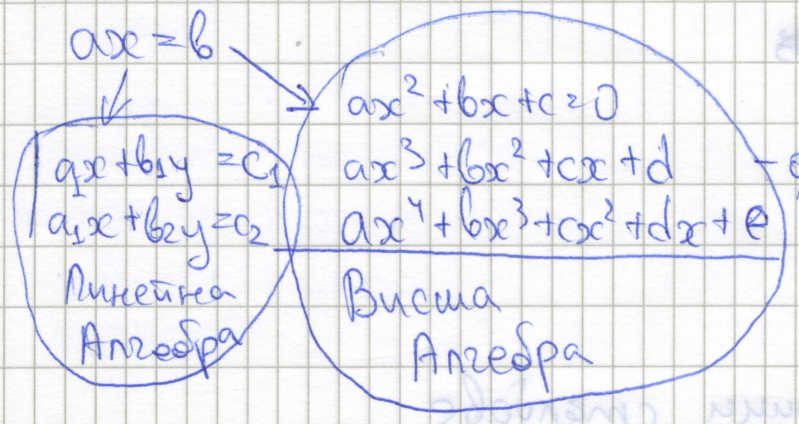
II.1. Линейна алгебра - проф. Чакърян
Недялко Ненов



- формули на ~~Кардано~~ Крамер

Детерминанти (от 2-ри и 3-ти ред)

Определение: Матрица от тип $m \times n$ нарицаме правоъгълна таблица от числа, която има m реда и n стълба, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} се нарчгат елементи на матрицата

a_{ij} са числа

i и j се нарчгат индекси на елемента a_{ij}

i - номер на реда, в който се намира a_{ij}

j - номер на стълба, в който се намира a_{ij}

Примери:

1) 1×1 матрица - число

2) 2×2 матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

3) 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

в) 2×3 $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

б) 3×2 $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

а) $m \times 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ матрици столбове

г) $1 \times n$ $\quad A = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$ матрици редове

Определение: Матриците от вида $n \times n$ се наричат квадратни матрици от n-ти ред.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

Определение: Нека A е квадратна матрица от n-ти ред. Множеството от n елемента на матрицата A се нарича мълния, ако всеки два елемента от тях са в различни редове и различни столбове.

Примери:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ - мълния главен диагонал

{другия диагонал} също е мълния, която ще наричаме втори диагонал

II.1.2

2) $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ $\{a_{41}, a_{12}, a_{23}, a_{34}\}$ е мълния

Ясно е, че на всяка мълния има точно по 1 представител във всеки ред и всеки стълб

Мълнии на квадратните матрици от 2-ри ред.

$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Мълнията съдържа или a_{11}, или a_{12}

Ако мълнията съдържа a_{11} 2-ри елемент непременно е a_{22}.

$\{a_{11}, a_{22}\}$

Ако мълнията a_{12} не може да съдържа 2-ри елемент от 1 ред и 2 стълб.

$a_{12} \Rightarrow \{a_{12}, a_{21}\}$

Мълнии от 3-ти ред на квадратни матрици

$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Мълниите съдържащи $a_{11} \Rightarrow \{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$ гл. диагонал
$\{a_{11}, a_{23}, a_{32}\}$

Мълниите съд. $a_{12} \Rightarrow \{a_{12}, a_{21}, a_{33}\}$
$\{a_{12}, a_{23}, a_{31}\}$

Мълниите съд. $a_{13} \rightarrow \{a_{13}, a_{22}, a_{31}\}$
$\rightarrow \{a_{13}, a_{21}, a_{32}\}$ втори диагонал

I.1.3

Да се намерят всички мълчими на матрица от 4-ти ред.

Нека A е матрица, в която сумата на елементите във всеки ред и всеки стълб е 1. Да се док., че A е квадратна. - домашно

1. Разделяне системата /(-a21)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \;/\; a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \;/\cdot(-a_{12})/(a_{11}) \end{cases}$$
x_1 и x_2 - неизвестни

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ матрица на системата

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$ разширена матрица на системата

$$\begin{aligned} (a_{11}.a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 &= b_1 a_{22} - b_2 . a_{12} \\ (a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12})x_2 &= b_2 a_{11} - b_1 . a_{21} \end{aligned} \quad (*)$$

Определение: Детерминанта на квадратната матрица A
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ от 2-ри ред наричаме числото ~~$a_{11}.a_{12}$~~

$\boxed{a_{11}a_{22} - a_{21}.a_{12}}$ и се бележи $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ или $\det(A)$

~~(X)(X)(X)~~ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ Ако коеф. ~~пред~~ $\neq 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

можем да запишем, че:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

частен случай на формулите на Крамер

-II- Разглеждаме с-мата

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, е че: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ е решение

Твърдение 1: Числата $x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ и

$x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ са решение на разглежданата с-ма

Проверка:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$= a_{11}a_{12} + a_{11}a_{13} + a_{11}a_{23} + a_{11}a_{23} - a_{12}a_{11} - a_{12}a_{13} - a_{21}a_{12} - a_{12}a_{23} +$
$+ a_{13}a_{11} + a_{13}a_{12} + a_{13}a_{21} + a_{13}a_{22} = 0$

II правило:

$$\begin{pmatrix} b_1 & -x_2 & x_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

III. Разглеждаме с-мата

$$(+)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 & \cdot y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 & \cdot y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 & \cdot y_3 \end{cases}$$

$$(*)\ (a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3)x_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}\cdot y_3)x_2 + (a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}\cdot y_3)x_3 = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

Избираме y_1, y_2, y_3 от равенствата:

$$\begin{cases} a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 = 0 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 = 0 \end{cases}$$

Като използваме II. пункт получаваме решенията на с-мата

$$\begin{pmatrix} y_1 & -y_2 & y_3 \\ a_{11} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad y_2 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \quad y_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Заместваме в (*) и получаваме

$$(**)\ \left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\right)x_1 =$$

$$= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

II.1.6

Определение: Коефициентът пред x_1 от (**) се нарича детерминанта на квадратна матрица от 3-ти ред и се бележи с $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ или $\det(A)$.

$$\det(A) = (a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22})$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{|1'|}{|1|}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{|2|}{|1|}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow x_3 = \frac{|3|}{|1|}$$

частен случай - формули на Крамер

Детерминанти от произволен ред

$A \in M_n$

$\alpha = \{a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \ldots, a_{i_n j_n}\}$ n-елементи на A

α е мълния $\Leftrightarrow$ когато $i_1, i_2, \ldots, i_n$ са различни и $j_1, j_2, \ldots, j_n$ са различни

α е мълния $\Leftrightarrow$ $i_1, i_2, \ldots, i_n$ е пермутация на числата от 1 до n.
$j_1, j_2, \ldots, j_n$ е пермутация на числата от 1 до n.

$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$
$\{a_{33}, a_{22}, a_{11}\}$

Всяка мълния съдържа едновременно 1 ел. от 1 ред и един единствен от 2, 3, ..., и посл. ред. $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{nk_n}$

Твърдение 1: Всяка мълния може да се представи във вида $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{nk_n}$, където $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – пермутация на числата от 1 до n

$\Rightarrow$ бр. на мълниите в квадратна матрица от $n^{ти}$ ред е равен на бр. на пермутациите на числата от 1 до $n \to n!$

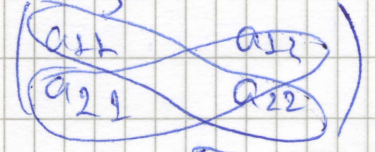
Твърдение 2: Всяка мълния, която е различна от главния диагонал има елемент от главния диагонал и елемент ~~над~~ под главния диагонал и елемент над главния диагонал.

~~B~~

Доказателство: Индукция на надмерните на матрицата A – $n \times n$.

Индукции по n

База $n = 2$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \{a_{12}, a_{21}\} \qquad \text{Нека } n \geq 3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1 случай) Мълнията не съдържа a_{11}

2 случай) Мълнията съдържа a_{11}

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \\ \hline & B \end{array}\right)$$

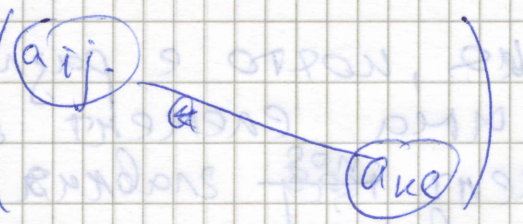
B е от $(n-1)$ ред

~~тогава~~

Нека мълнията е α

$\alpha - a_{11}$ е мълния на матрицата B, която е различна от главния диагонал на B.

$\alpha - a_{11}$ съдържа ел. под гл. диагонал и над гл. диагонал и е док. твърд. 2.



По нататък вместо ел. {aij, aik} ще казваме, че имаме „отсечка" определена от тези елементи.

Ако aij и aik са ел. на някаква матрица. Непременно те определят наклонена отсечка.

Има 2 вида наклонени отсечки:



положителни отрицателни

отсечки

Определение: Казваме че отсечката {aij, aik}, които определят елем. aij и aik е положителна, ако неравенството м/у индексите i и k е еднопосочно с неравенството м/у индексите j и l.

т.е. ако $i < k \Rightarrow$ тогава $j < l$

ако $i > k$, тогава $j > l$;

Казваме, че тази отсечка, за която говорим, е отрицателна, ако aij и aik са разнопосочни

Ако $i < k$ тогава $j > l$

$i > k$ тогава $j < l$

Определение: Нека α е мълния. С $N(\alpha)$ означаваме броят на отрицателните отсечки, които определят елементите на тази мълния.

Примери: 1) N (главния диагонал) $= 0$ $n \times n$
мълния α има n елемента
бр-ка отс. е $\binom{n}{2}$

2) N (2ри диагонал) $= \binom{n}{2}$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ $N = \{a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{41}\} = 3$

Дефиниция: Нека $\alpha = \{a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \ldots, a_{i_n j_n}\}$ е мълния. Числото $(-1)^{N(\alpha)} a_{i_1 j_1}, a_{i_2, j_2}, \ldots a_{i_n j_n}$ се нарича заряд на мълния α. Ако $N(\alpha)$ е четно число, зарядът на α съвпада с произведението на елементите на α.

Ако $N(\alpha)$ е нечетно, тогава зарядът на α съвпада с $-$ произведението на елем. на α.

Пример: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $N\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\} = 0$
заряд $\{a_{11}, a_{22} a_{33}\} = a_{11} a_{22} a_{33}$

$N\{a_{21} a_{32} a_{13}\} = 2$ заряд $\{a_{21} a_{32} a_{13}\} = a_{21} a_{32} a_{13}$

$N\{a_{31} a_{12} a_{23}\} = 2$ заряд $\{a_{21} a_{32} a_{13}\} = a_{21} a_{32} a_{13}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$N\{a_{31}\ a_{22}\ a_{13}\} = 3$ заряд $\{a_{31}\ a_{22}\ a_{13}\} = -a_{31}a_{22}a_{13}$

$N\{a_{11}\ a_{32}\ a_{23}\} = 1$ заряд $\{a_{11}\ a_{32}\ a_{23}\} = -a_{11}a_{32}a_{23}$

$N\{a_{21}\ a_{12}\ a_{33}\} = 1$ заряд $\{a_{21}\ a_{12}\ a_{33}\} = -a_{21}a_{12}a_{33}$

Детерминанта на квадр. матр. от $3^{ти}$ ред е ~~произв.~~ сума ~~на~~ на ~~ел~~ зарядите. Същото важи за $2^{ри}$ ред

Задача: Да се док. че във всяка квадр. матр. от $3^{ти}$ ред, може да се намери мълния, чийто заряд не е положителен.

Деф: Детерминанта на квадратна матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ наричаме сумата от зарядите на всичките им мълнии се бележи $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & a & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ или $\det(A)$

$\det(A) = \sum (-1)^{N(\alpha)} a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2} \dots a_{i_nj_n}$ по всички мълнии $\alpha = \{a_{i_1j_1}, \dots a_{i_nj_n}\}$ на A

Като използваме представянето от твърдение 1 получаваме:

II.1.12

$$\det = \sum (-1)^{N\{a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots a_{nk_n}\}} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

по всички пермутации $(k_1, k_2, \dots k_n)$

$n!$

Свойства на детерминантите

Свойства: 1) Ако в една матрица, $\forall$ елем. в даден ред или стълб са нули $\Rightarrow \det(A) = 0$.

Доказателство:

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ 0 & \dots & 0 \\ & & \end{pmatrix} \quad i\text{-ти ред} \qquad \det(A) = 0$$

Всяка пълния съд. елем. от i-ти ред и следователно съдържа 0 и затова също е $= 0$.

$\det(A) = 0$ за стълб е аналогично

$\text{ранг}(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha$

(Свойства 2) Матрици от вида $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ и

$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ * & a_{22} & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ – триъгълни матрици

Детерминантата на $\forall$ триъгълна матрица е равна на произведението на главния диагонал

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Доказателство: Всяка мълния, разл. от гл. диагонал съд. елем. под и над гл. диагонал. Поради тази причина в триъгълните матрици → мълнии извън гл. диагонал е 0.

$$\det(A) = \text{заряд}\{\text{гл. диагонал}\} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Определение: Нека $A = (a_{ij})$ е матрица от тип $m \times n$. Транслонираната матрица на матрицата A е матрица, която се дефинира по следния начин:

1-ви ред на матрицата A става 1-ви стълб на новата матрица.

2-ри ред на A → 2-ри стълб на новата

и т.н.

m-ти ред на A става → m-ти стълб на новата

Тази матрица се нарича транспонирана на матрицата A и се бележи A', A^t, A^T.

Пример: $\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{2\times 3}{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ако A е от тип $m \times n$, тогава A' е от тип $n \times m$ ел. a_{ij} на A в A' ще има индекси j, i

Свойство 3: При транспониране на квадратната матрица A, детерминантата ѝ не се променя, т.е.

$$\boxed{\det(A) = \det A'}$$

Доказателство: Ако 2 ел. се намират в разл. редове след транспонирането им – те ще се окажат на A' в разл. стълбове на A'. При транспониране мълния на A преминава ~~на~~ в мълния на A'

Остава да преценим броя на елементите на A определена от ел. на дадена мълния на A'

Нека a_{ij} и a_{kl} образуват полож. отсечка, можем да предположим, че $i<k$ и $j<l$. В A' a_{ij} има индекси j и i, a_{kl} → l и k. Виждаме, че и новите индекси на a_{ij} и a_{kl} – пак съотв. на + отсечка защото $j<l$ и $i<k$. (Тези разсъждения док-ме при транспониране, че полож. отсечка → полож. отсечка, аналог. за отриц. отс.

Док., че при на транспониране бр. отриц. отсечки на една ~~матрица~~ мълния не се променя. При транспониране зарядите на мълниите ~~зар~~ не се променя. И така док, че $\det(A)$ и $\det(A')$ се състоят от едни и същи събираеми $\Rightarrow \det(A) = \det(A')$

Свойство 4: Ако разменим в една детерминанта местата на 2 реда или стълба: Детерминантата променя знака си.

Доказателство: За разменени редове; аналог. за стълбове. Можем да получим стълбове от редове чрез транспонираме.

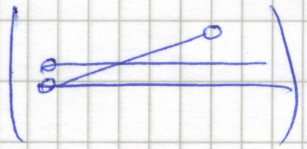
I случай) разменят се 2 съседни реда.

$$A = \begin{pmatrix} & & * & \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \dots & a_{in} \\ a_{i+1\,1}, & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ & & * & \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} & & & \to i\text{-я ред} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & & \to i+1\text{-я ред} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(B)$$

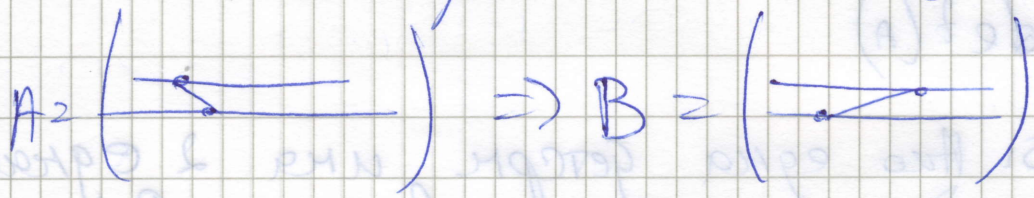
Ясно е, че при размяна на 2 съседни реда, мълния преминава в мълния, т.е. матриците A и B се състоят от едни и същи мълнии. Остава да преценим как се променя заряда на дадена мълния от A, при размяна на 2 съседни реда.

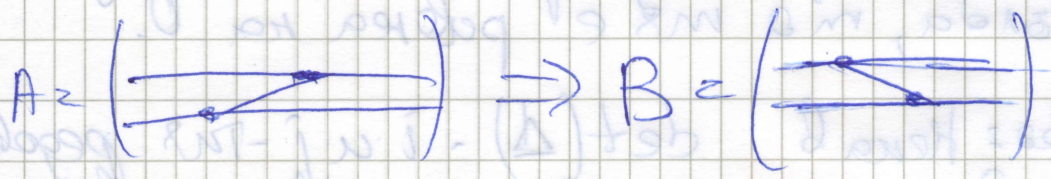
Ако 2 елем. от мълнията не участват в разм. редове, тогава отсечката въобще не се променя, тя си остава същата. Ако единия край на една отс. е в разменените редове, а другия не е, тогава отс. ще се промени, но ще запази знака.



II.1.16

Остава да преценим как се променя знакът на отс., ако ~~2-та~~ краищата са в разменените редове. Тогава тя е единствена мълния.





Така изяснихме, че при размяна на 2 съседни реда, бр. на отр. отсечки или се +1, или се намалява с 1 (−1). Това означава като разменим местата на 2 съседни реда, знака на всяка мълния се променя.

$\det(B) = -\det(A)$

II-ри случай: Разменят се 2 несъседни реда

$$A = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix} \updownarrow k \text{ реда} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{j1}, & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1}, & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ j-ред

$\rightarrow$ i-ред

Ще получам матр. B от матр. A чрез размяна на 2 реда по следния начин, разменяме j-тия ред послед. всеки над него докато заеме i-тия ред $\rightarrow$ k+1 на съседни редове. След тази операция i ще се окаже на i+1 след това разменяме i-тия ред с всеки под него, последователно, докато заеме местото на j-тия ред $\rightarrow$ k на съседни редове.

$B \rightarrow A$ 2k+1 посл. размени на съседни редове съгл. случай 1. При всяка 1 размяна ~~де~~ детерминан

тата ще променя знака си.

$$\det(B) = \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1} \det(A)$$

$$\det(B) = -\det(A)$$

~~Ако~~ Свойство 5: Ако една детерм. има 2 еднакви реда или стълба, то тя е равна на 0.

Доказателство: Нека в $\det(\Delta)$ - i и j-тия редове са еднакви. Разменяме местата на 2 еднакви реда и получаваме нова детерм. Δ'. Съгл. свойство 4. $\Delta' = \Delta$. Понеже сме сменили 2 еднакви реда, детерм. не се е променила $\Rightarrow \Delta = -\Delta \Rightarrow \Delta = 0$

Свойство 6: Ако в даден ред или даден стълб на дадена детерминанта. Всичките елементи имат общ множител, тогава този общ множител можем да го изнесем пред детерминантата, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} \dots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta 1}$$

Доказателство: Всяка мълния β в Δ има вида: $\beta = \{a_{1k_1}, \dots \lambda a_{ik_i}, \dots, a_{nk_n}\}$, защото β има единствен ~~е~~ елем. в i-тия ред. Където ~~$\alpha = a_{1k_1}$~~

$\alpha = \{a_{1k_1}, \dots a_{ik_i}, \dots a_{nk_n}\}$ е мълния в $\Delta 1$.

Ясно е, че $N(\beta) = N(\alpha) = m$. Зарядът на β ще бъде

Заряд $\beta = (-1)^m a_{1k_1} \dots (\lambda a_{ik_i}) \dots a_{nk_n} =$

$= \lambda \cdot \underbrace{(-1)^m a_{1k_1} \dots a_{ik_i} \dots a_{nk_n}}_{\text{заряд на } \alpha} \Rightarrow$ заряд $(\beta) = \lambda$ заряд (α)

$\Rightarrow$ Заряд $(\beta) = \lambda$ Заряд (α)

Изяснихме, че зарядът на всяка матрица β от Δ е зарядът на β от Δ_1 умножен с λ. ~~Поради това~~

Поради това Σ {зарядите на всички матрици в Δ} =

$= \lambda \Sigma$ {Зарядите на всички матрици в Δ_1} $\Rightarrow \Delta = \lambda \Delta_1$

(Свойство 7: Ако една детерминанта има 2 пропорционални реда или стълба. Тогава тя е равна на 0.

Доказателство: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & a_{in} \end{vmatrix}$ i-тия ред, j-тия ред

$\Delta \overset{\text{св.6}}{=} \lambda \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \end{vmatrix}$ i-тия ред, j-тия ред $\Rightarrow \lambda \cdot 0 = 0$

Свойство ~~на~~ 8:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \dots & a'_{in}+a''_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a''_{1} & \dots & a''_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Delta = \Delta' + \Delta''$ Вярно е и аналог. свойство за стълбове

Доказателство: Всяка мълния на Δ има вида $\alpha = \{a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a'_{ik_i}+a''_{ik_i} \dots a_{nk_n}\}$

където $\alpha' = \{a_{1k_1}, \dots, a'_{ik_i}, \dots, a_{nk_n}\}$ е мълния в Δ'

$\alpha'' = \{a_{1k_1}, \dots a''_{ik_i}, \dots, a_{nk_n}\}$ е мълния в Δ''. Елементите на 3те мълнии са разположени по един и същи начин в детерм. и броя на отриц. опре- определени от ел. на тези мълнии са едни и същи. т.е. $N(\alpha) = N(\alpha') = N(\alpha'') = m$

заряд $\alpha = (-1)^m a_{1k_1} \dots (a_{ik_i}' + a_{ik_i}'') \dots a_{nk_n}$

$= (-1)^m a_{1k_1} \dots a_{ik_i}' \dots a_{nk_n} + (-1)^m a_{1k_1} \dots a_{ik_i}'' \dots$

$\dots a_{nk_n} =$ заряд (α') + заряд (α'').

Итака имаме равенството:

заряд (α) = заряд (α') + заряд (α'')

Когато α пробяга всички мълнии на Δ, а $\alpha' \to \Delta'$, а $\alpha'' \to \Delta''$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum \{\text{всички заряди на } \Delta\}}_{\Delta} = \underbrace{\sum \{\text{всички заряди на } \Delta'\}}_{\Delta'} + \underbrace{\sum \{\text{всички заряди на } \Delta''\}}_{\Delta''}$$

Чрез последователно прилагане на свойство 8 се получава 8')

Св.8')

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ a_{i1} + (b_{i1} + \dots + g_{i1}) & a_{i2} + (b_{i2} + \dots + g_{i2}) & \dots & a_{in_i} + (b_{in_i} + \dots + g_{in_i}) \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}, a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство 9: Ако към даден ред на дадена детерминанта добавим някой от другите редове ~~тогава~~ умножен с някакво число, тогава детерминантата не се променя

Доказателство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad i \neq j$$

Доказателство:

$$\Delta_1 \overset{\text{с.в. 8}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{1} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0} \to i\text{-ви ред}$$

$\Delta_1 = \Delta$

(св. 9') Последователно прилаг. на св. 9
Ако към един ред на дадена детерм. прибавим някой от ост. редове умножс. със съотв. конст., тогава детерм. не се променя.

$n!$

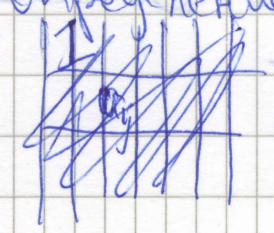
Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = 11$$

Развитие на детерминанти по ред и по стълб

Определение



$$\Delta = \begin{array}{c|c|c|c|} & \text{I} & & \text{II} \\ \hline & & a_{ij} & \\ \hline & \text{III} & & \text{IV} \end{array} \quad i\text{-я ред} \Rightarrow \Delta' = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{I} & \text{II} \\ \hline \text{III} & \text{IV} \\ \hline \end{array}$$

Δ' се нарича поддетерминанта на ел. a_{ij} и се бележи с Δ_{ij}

Числото $(-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$ се нарича адюнгирано количество на ел. a_{ij} и се бележи с A_{ij}

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}}$$

Лема 1: Верни са равенствата:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \Delta_{11} & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Delta_{11} & \\ 0 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \Delta_{11} \Rightarrow$$

Доказателство: Всяка мълния на Δ, която несъдържа a_{11} има заряд 0.

$$\Rightarrow (*) \quad \Delta = \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{от зарядите на} \\ \text{мълниите, които} \\ \text{съдържат } a_{11} \end{array} \right\}$$

Нека $\alpha = \{a_{11}, a_{2k_2}, \ldots, a_{nk_n}\}$ е мълния в Δ_1.

Тогава $\alpha - \{a_{11}\} = \{a_{2k_2}, \ldots, a_{nk_n}\}$ е мълния в Δ_{11}.

Понеже a_{11} не участва в отр. отсечки, тогава отр. на отр. отс. е един и същ.

$$N(\alpha - \{a_{11}\}) = N(\alpha) = m$$

$$\Rightarrow \text{заряд } \alpha = (-1)^m a_{11} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} =$$

$$= a_{11} \underbrace{\left((-1)^m a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}\right)}_{\text{заряд}(\alpha - \{a_{11}\})}$$

От полученото равенство:

$$\underbrace{\left\{\sum \left\{\begin{array}{l}\text{зарядите на мълниите на } \Delta, \\ \text{които } \cancel{\text{изд}} \text{ съдърж. } a_{11}\end{array}\right.\right\}}_{\Delta} \Rightarrow \Delta = a_{11}\,\Delta_{11}$$

$$a_{11}\underbrace{\left(\sum \begin{array}{c}\text{зарядите на} \\ a_{11}\end{array}\right)}_{\Delta_{11}}$$

Лема 2:

$$\Delta = \left|\begin{array}{c|c|c} a_{11} \quad \text{I} \quad - & - & a_{1n} \quad \text{II} \\ \hline 0 \ldots 0 & a_{ij} & 0 \ldots 0 \\ \hline \text{III} \quad a_{n1} & & \text{IV} \quad a_{nn} \end{array}\right|$$

Вярно е равенство: $\Delta = a_{ij}\,A_{ij}$

$$\Delta_{ij} = \left|\begin{array}{c|c} \text{I} & \text{II} \\ \hline \text{III} & \text{IV} \end{array}\right|$$

Разместваме i-я ред с всеки, който е над него, докато той заеме мястото на първия.

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^{i-1} \left|\begin{array}{c|c|c} 0 \ldots & a_{ij} & 0 \ldots 0 \\ \text{I} & & \text{II} \\ \text{III} & & \text{IV} \end{array}\right| \Rightarrow$$

Разменияме j-я ~~ред~~ стълб с всеки ~~над~~ пред него.

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ I & & & \\ III & & IV & \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \Delta_{ij} & \end{vmatrix} \overset{\text{Лема 1}}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

~~Лема 1~~ $= a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \Delta_{ij}}_{A_{ij}} = a_{ij} A_{ij}$

Теорема: Нека е дадена детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тогава са верни равенствата:

(1) $a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} = \Delta$

(2) $a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + \cdots + a_{ni} A_{ni} = \Delta$

Равенство (1) се нарича развитие на Δ по i-ти ред

Равенство (2) се нарича развитие на Δ по i-ти стълб.

Доказателство: Представяме Δ по следния начин

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underbrace{a_{i1}+0+0+0}_{n} & \overset{*}{\underbrace{0+a_{i2}+0+0+0}_{n}} \dots & \underbrace{0+0+\dots+0+0+a_{in}}_{n} \end{vmatrix}$$

Св 8'

$$\underbrace{\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & 0 \dots & 0 \\ & * & \end{vmatrix}}_{a_{i1}A_{i1}} + \underbrace{\begin{vmatrix} & * & \\ 0 & a_{i2} & 0 \dots 0 \\ & * & \end{vmatrix}}_{a_{i2}A_{i2}} + \dots + \underbrace{\begin{vmatrix} & * & \\ 0 \dots & 0 & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix}}_{a_{in}A_{in}}$$

По този начин док. равенство 1. Равенство 2 аналог на това доказателство.

Следствие: Нека е дадена детерминанта Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ и $b_1, b_2, \dots b_n$ са произволни числа

$b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \dots + b_n A_{in} = \Delta'$ (която се получава от Δ, като вместо i-я ред пишем $(b_1 \; b_2 \dots b_n)$)

Числото $b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \dots b_n A_{in} = \Delta''$ (която се получава от Δ, като заменим i-я стълб със стълба

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Доказателство: За да док. първото твърдение, развива Δ' по i-ти ред и получаване желаното равенство.

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Второ твърд. $\Rightarrow$ Δ'' по i-ти стълб

Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{23}(-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

формули на Крамер

Лема (за фалшивото разлагане): Нека е дадена детерминантата Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тогава са верни равенствата:

(1) $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$, ако $i \neq j$

(2) $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = 0$, ако $i \neq j$

11.1.28

Доказателство: (1) Съгласно следствието, това число $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$ като на мястото на j-ия ред се постави $(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in})$ елем. на i-ия ред.
Аналог. за стълбовете.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftarrow j\text{-ия ред}$$

$$(*)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & \times A_{11} \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & \times A_{21} \\ \dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & \times A_{n1} \end{cases} (+)$$

линейна с-ма

Казваме, че тази с-ма (*) е несъвместима или противоречива, ако тя няма решение.
(*) е съвместима ако има поне 1 решение.
(*) е определена, ако има точно едно решение
(*) е неопределена, ако има повече от едно решение.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ матрица на (*)

$$\overline{A} = \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix} \right)$$ разширена матрица на с-мата (*)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ — детерминанта на с-мата (*)

Δ_1 се получава от Δ като 1-вия стълб ~~се~~ замени със стълб $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Δ_2 — от $\Delta \Rightarrow$ заменим 2-я стълб със $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Δ_n — от $\Delta \Rightarrow$ заменим n-я стълб със $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

~~Лема~~ Теорема: Нека е дадена с-мата (*).
(а) Тогава ако (*) от уравненията на тази с-ма следват равенствата

$\Delta x_1 = \Delta_1$

$\Delta x_2 = \Delta_2$

$\dots$

$\Delta x_n = \Delta_n$.

(б) ако $\Delta \neq 0$, тогава с-мата (*) има единств. решение (т.е. е определена) и единств. реш. се задава с равенствата:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\dots$ $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$,

Тези равенства се нарекат формули на Крамер.

21.1.30

Доказателство: $\Delta x_1 = \Delta_1$

$$\overbrace{(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1})}^{\Delta} x_1 +$$

$$+ \overbrace{(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1})}^{\text{оралшиво}} x_2 +$$

$$+ \overbrace{(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + \dots + a_{n3}A_{n1})}^{\text{оралшиво}} x_3 + \dots$$

$$+ \overbrace{(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})}^{\text{оралшиво}} x_n =$$

$$= \underbrace{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}}_{\text{съгласно следствието } \equiv \Delta_1}$$

$\boxed{\Delta x_1 = \Delta_1}$ Другите равенства се получават с умножаване на A_{n2} и събираме - аналог. на първото

в) Нека $\Delta \neq 0$ Тогава от (а) получаваме

$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

С тези разсъждения док, че, ако с-мата има реш. и то ще е единств. и то се задава с формулите на Кранер. От дадените разсъждения не се получава решение обаче следва, че трябва да се направи проверка

Проверка: за 1-вото уравнение

$$a_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + a_{1n}\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + \dots + a_{1n}\Delta_n)$$

Развиваме Δ_1 по 1-вия стълб, Δ_2 - по 2-рия, Δ_n - по n-тия стълб.

$$\frac{1}{\Delta}\Big[a_{11}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}) +$$
$$+ a_{12}(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2}) +$$
$$+ \dots +$$
$$+ a_{1n}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn})\Big]$$

$$\frac{1}{\Delta}\Big[\underbrace{(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n})}_{\Delta}b_1 + \underbrace{(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\dots+a_{1n}A_{2n})}_{\text{фалшиво}}b_2 + \dots + (a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\dots+a_{1n}A_{nn})b_n\Big]$$

фалшиво

$$= \frac{1}{\Delta}\big[\Delta b_1\big] = b_1$$

Следствия: 1) Ако с-мата има поне 2 решения, тогава детерминантата е равна на нула ($\Delta = 0$)

Следствие: 2) Ако с-мата няма решение, тогава $\Delta = 0$

Следствие 3) Ако ~~на~~ някое $\Delta_i \neq 0$ и $\Delta = 0$, тогава с-мата няма решение. Обратното не е вярно.

Доказателство: (3) Съгласно теоремата (а) $\exists x_i = \Delta_i \neq 0$ няма решение.

Символ на Кронекер

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Като използване символа на Кронекер фалшивото и лапласовото разлагане се ~~преобразуват~~ обобщават

$$a_{i1}A_{j1} + \dots + a_{in}A_{jn} = \Delta \cdot \delta_{ij}$$

$$a_{1i}A_{1j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \Delta \cdot \delta_{ij}$$

Действия с матрици

Определение: Казваме, че матриците $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ са равни, ако те имат един и същи тип $m \times n$ и $a_{ij}=b_{ij}$ за всяка двойка индекси i и j. За $\forall ij$ $a_{ij}=b_{ij}$

Лин. с-ма:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Събиране: Определение: Нека са дадени едноти-пните матрици:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B_{m \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Сумата на тези 2 матрици се дефинира с равенството:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Заб. Ако A е квадратна матрица от $n^{\text{ти}}$ ред тогава $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, и не ~~$\lambda(\det(A))$~~

Нека са дадени матриците $A_1, \dots, A_k$ и числата $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

Матрицата $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ се нарича линейна комбинация на матриците $A_1, \dots, A_k$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ са коефициенти на тази линейна комбинация.

Примери: 1) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$+2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$

В общия случай: Ако $\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$, деф.

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ тогава $A = \sum a_{ij} E_{ij}$ $mn\{E_{ij}\}$

Осн. свойства на тези две операции

Св.1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ асоциативност на „+"

Св. 2) $A+B = B+A$ комутативност на „+"

Св. 3) $\exists$ нулева матрица, т.че $A+O = A$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Св. 4) $\forall$ матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ има противоположна матрица

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$, такваче $A+(-A) = O$

$A - B \overset{def}{=} A + (-B)$

Св. 5) $1 \cdot A = A$

Св. 6) $\mu(\lambda \cdot A) = (\mu \cdot \lambda) \cdot A$

Св. 7) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Св. 8) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

Определение:
Нека са дадени матрицата ~~а~~ ред $A = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ и матрица стълб $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
произведението
$A \times B$ се деф. по следния начин

$$AB = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Определение: Нека са дадени матриците
$A = \underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}$ и $B = \underset{n \times k}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}}$

Произв AB на тези матрици наричаме матрицата $C = (c_{ij})$ от тип $m \times k$, където
$c_{ij} =$ (i-ти ред на A) (j-ти стълб на B) т.е.

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots +$$

$$+ a_{in} b_{nj} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$$

Примери:
1) $\underset{2\times3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \underset{3\times2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \underset{2\times2}{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times2\ \ 2\times3}{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $\underset{1\times n}{A} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ и $\underset{n\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ~~$BA =$~~

$$\underset{n\times n}{BA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & a_nb_2 \\ a_1b_n & b_2b_n & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

3) Диагонални матрици - квадратни матрици от вида $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ само квадратни матрици от n-ти ред

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \dots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_2a_{2n} \\ & & \ddots & \\ d_na_{n1} & d_na_{n2} & \dots & d_na_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \dots & d_na_{1n} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_na_{2n} \\ & & & \\ d_1a_{n1} & d_2a_{n2} & \dots & d_na_{nn} \end{pmatrix}$$

Казваме, че матриците A и B - квадратни, комутират, ако $AB = BA$. Не всеки 2 матрици, комутират.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$

$(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

Делители на нулата: Казваме, че матриците A и B са делители на нулата, ако $A \neq 0$ и $B \neq 0$, но $AB = 0$

Забележка: $A \times 0 = 0 . A = 0$ - вярно

Примери за делители на нулата:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ $\neq 0$

От това, че има делители на нулата, ако $AB = AC$, тогава може $B \neq C$, дори когато A е ненулева матрица, няма не право да съкратяваме $AB = C . A$

Скаларни матрици:

$$C = \begin{pmatrix} c & & \\ & \ddots & \\ & & c \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & & ca_{2n} \\ ca_{n1} & ca_{n2} & & ca_{nn} \end{pmatrix} = c . A$$

$CA = c . A \Rightarrow AC = CA$, ако C е скаларна матрица.

Всеки скаларна матрици комутират с всички останали матрици.

Задача: ~~Ако една скаларна матрица~~ Да се док., че ако A квадратна матрица комутира с $\forall$ останали квадратни матрици от същия ред $\Rightarrow$ тази матрица е скаларна.

II. 1.38

Упражнение:

1) Да се док., че ако една матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & n \end{pmatrix}$, комутира с всяка друга матрица, тогава тя е диагонална.

2) Ако една диагонална матрица комутира с $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ тогава тя е скаларна и ок.

$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ единична матрица

$EA = A$

$AE = A$

Осн. свойства на умножението с матрици

(Св. 1) $(AB)C = A(BC)$ асоциативност

(Св. 2) $(A+B)C = AC + BC$

(Св. 3) $C(A+B) = CA + CB$

(Св. 4) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ (λ – число)

(Св. 5) $(AB)' = B'A'$

Правило за двойно събиране:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Σ сумата на всички ел. на A

$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} = \alpha_1$

$a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} = \alpha_2$

$a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} = \alpha_n$

$\downarrow \beta_1 \quad \downarrow \beta_2 \quad \downarrow \beta_n$

$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i$

$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

$\beta_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \qquad \beta_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \quad \dots \quad \beta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}$

$S = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \qquad \beta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

$S = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ - това е за квадратна матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Док. на асоциативния закон: $(AB)C = A(BC)$

A, B и C

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{n \times k}{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\underset{k \times s}{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ c_{k1} & \dots & c_{ks} \end{pmatrix} \qquad \underset{m \times k}{A \times B} = \underset{m \times k}{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mk} \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times s}{(AB)C} = \underset{m \times s}{DC} = \underset{m \times s}{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1s} \\ p_{m1} & \dots & p_{ms} \end{pmatrix} \qquad \underset{n \times s}{B \times C} = F \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1s} \\ f_{n1} & \dots & f_{ns} \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times s}{A(BC)} = \underset{m \times s}{AF} = \underset{m \times s}{Q} \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1s} \\ q_{m1} & \dots & q_{ms} \end{pmatrix} \qquad \underset{m \times s}{P} = \underset{m \times s}{Q}$$

II - 1 - 40

$p_{ij} = q_{ij}, \forall i,j$

От $P = QC$ i, j са фиксирани индекси

$p_{ij} = \sum_{\beta=1}^{k} d_{i\beta} c_{\beta j}$

$d_{i\beta} \cdot c_{\beta j}$ От $Q = AB \Rightarrow d_{i\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta}$

$d_{i\beta} \cdot c_{\beta j} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta}\right) c_{\beta j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j}$

произведенията $a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} \cdot c_{\beta j}$ зависят само от индексите α и β (i и j са фиксирани)
$\Rightarrow$ имаме право да положим $a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} = t_{\alpha\beta}$

$d_{i\beta} \cdot c_{\beta j} = \sum_{\alpha=1}^{n} t_{\alpha\beta}$

$\Rightarrow (1)\ p_{ij} = \sum_{\beta=1}^{k} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} t_{\alpha\beta}\right)$

От $Q = AF \Rightarrow q_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} f_{\alpha j}$

От $F = BC \Rightarrow f_{\alpha j} = \sum_{\beta=1}^{k} b_{\alpha\beta} \cdot c_{\beta j}$

$\Rightarrow a_{i\alpha} f_{\alpha j} = \left(\sum_{\beta=1}^{k} b_{\alpha\beta} c_{\beta j}\right) a_{i\alpha}$

$= \sum_{\beta=1}^{k} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} = \sum_{\beta=1}^{k} t_{\alpha\beta}$

$(2) \Rightarrow q_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\beta=1}^{k} t_{\alpha\beta}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{k} t_{\alpha\beta}$

A, B, C и D ABCD ((AB)C)D (AB)(CD)

(ABC)D A((BC)D) ~~{((CD)B)A~~ A(B(CD))

Задача: Да се седи., че всички тези произв. са равни
⇒ от асоциативния закон.

$A^4 = (AA)A$

Док. за правилото за транспониране:

$(AB)' = B'A'$

$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B_{n\times k} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$

$C_{m\times k} = \{ AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ c_{m1} & & c_{mk} \end{pmatrix}$

$B'_{k\times n} = \{ D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ d_{k1} & \dots & d_{kn} \end{pmatrix}$ $d_{ij} = b_{ji}$

$A'_{n\times m} = F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1m} \\ f_{n1} & \dots & f_{nm} \end{pmatrix}$ $f_{ij} = a_{ji}$

$DF = B'_{k\times n} A'_{n\times m} = P \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1m} \\ p_{k1} & \dots & p_{km} \end{pmatrix}$ $C'_{k\times m} = P_{k\times m}$ $c_{ij} = p_{ji}$

От $C = AB$ $c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$

$p_{ji} = \sum_{\alpha=1}^{n} d_{j\alpha} f_{\alpha i} =$

$= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha j} a_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j} = c_{ij}$

∎ 1.1:42

Чрез посл. прилагане на св. за транспониране:

$(A_1 A_2 \dots A_k)' = A_k' A_{k-1}' \dots A_2' A_1'$

$[(A_1 A_2 \dots A_{k-1}) A_k] = A_k' (A_1 A_2 \dots A_{k-1})'$

$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Като преобразуваме л. с.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Векторно представяне на линейната с-ма

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ матрично представяне на системата

Детерминанта на произведението на 2 матрици

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Лемата нулевия ъгъл): Вярно ли е равенството
A е квадратна матрица от n-ти ред, а
B е квадратна матрица от m-ти ред.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & \\ A & \\ a_{n1} \dots a_{nn} & \\ * & \begin{matrix} b_{11} \dots b_{1m} \\ B \\ b_{m1} \dots b_{mm} \end{matrix} \end{vmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

$(m+n)$-ти ред

Доказателство: a_{1i}
С $\widetilde{\Delta}_{1i}$ озн., поддетерминантата на a_{1i} в Δ
С $\widetilde{\Delta}_{1i}$ озн. поддетерминантата на a_{1i} в A
С $\widetilde{A}_{1i}$ озн., адюнктираното количество на a_{1i} в Δ
С $\widetilde{A}_{1i}$ озн., адюнктираното количество на a_{1i} в A

Индукция по размерите на матрицата на A, т.е. по n

База n=1

Имаме $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \dots 0 \\ \hline & \\ & B \\ & \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det(B)$$

11.11.44

Развиваме Δ по 1-вия ред. и получаваме:

Нека $n \geq 2$

$(*)$ $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \Delta$

$\Delta_{1i} = \begin{vmatrix} \widetilde{\Delta}_{1i} & 0 \\ * & B \end{vmatrix}$

Δ_{1i} - е от $(n-1)$-ви ред
$n \geq 2$, защото има нулев ъгъл

Прилагаме индуктивната хипотеза за Δ_{1i}

$\Delta_{1i} = \widetilde{\Delta}_{1i} \cdot \det(B)$

$A_{1i} = (-1)^{(i+1)} \cdot \Delta_{1i} = \underbrace{(-1)^{(i+1)} \widetilde{\Delta}_{1i}}_{\widetilde{A}_{1i}} \cdot \det(B) = \widetilde{A}_{1i} \det(B)$

заместваме в $(*)$

$\Delta = a_{11}\widetilde{A}_{11} \cdot \det(B) + a_{12}\widetilde{A}_{12} \cdot \det(B) + \dots + a_{1n}\widetilde{A}_{1n} \cdot \det(B) =$

$= \underbrace{(a_{11}\widetilde{A}_{11} + a_{12}\widetilde{A}_{12} + \dots + a_{1n}\widetilde{A}_{1n})}_{\det(A)} \cdot \det(B)$

Теорема: Нека са дадени квадратните матрици

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Тогава $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Доказателство: Разглеждаме детерминантата Δ

$\Delta = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & \\ -1 & & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$ $(2n)$-ти ред

$-E = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Съгласно лемата за нулевия ъгъл:

$\Delta = \det(A) \cdot \det(B)$ => Теоремата ще бъде док, ако док. че $\Delta = \det(AB)$. За тази цел, ще извършим преобр. Δ, така че на мястото на A да се появи нулев ъгъл. За тази цел извършваме следните преобразувания:

- ~~умноже~~ нулираме на 1-вия ред на a
- умноже $(n+1)$ ред и го приб. към 1-вия ред
  $(n+2)$ ред и го приб. към 2-вия ред
  ~~?n ред и го приб. към 0-ия ред?~~

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} \dots & c_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & & 0 & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & & \\ \hline -1 & & 0 & & & \\ & -1 & & & B & \\ 0 & & -1 & & & \end{array}\right| \Rightarrow$$

$c_{11} = ?$

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$

т.е. c_{11} = 1-вия ред на A с 1-вия стълб на B

~~$c_{12} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}$~~

c_{12} = 1-вия ред на A с 2-рия стълб на B

c_{1n} = 1-вия ред на A с n-тия стълб на B

Изясняме, че реда $(c_{11}\, c_{12} \dots c_{1n})$ съвпада с 1-ви ред на $A \times B$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & c_{21} & \dots & c_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} & & 0 & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & & \\ \hline -1 & & & b_{11} & & b_{1n} \\ & -1 & & b_{21} & & b_{2n} \\ & & -1 & b_{n1} & & b_{nn} \end{array}\right|$$

c_{21} = (2-ред на A) $\times$ (1-вия стълб на B)

c_{22} = (2-ред на A) $\times$ (2-ри стълб на B)

=> реда $(c_{21}\, c_{22} \dots c_{2n})$ = 2-я ред на AB

и така нататък

$$\Delta = \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} c_{11} & c_{1n} \\ & C \\ c_{1n} & c_{nn} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \; -1 \end{matrix} & B \end{array}\right|$$

където $(c_{i1}\ c_{i2}\ \dots\ c_{in})$ съвпада C i-я ред на AB, т.е. $\boxed{C = AB}$

$$\Delta = \left|\begin{array}{c|c} 0 & AB \\ \hline \begin{matrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \; -1 \end{matrix} & B \end{array}\right| \Rightarrow$$

- разместваме стълбовете на Δ

$1 \to n+1$ разместваме 1 с $n+1$

$2 \to n+2$

$\vdots$

$n \to 1$

умножаваме n-размени на знака на Δ

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c|c} A.B & 0 \\ \hline B & \begin{matrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \; -1 \end{matrix} \end{array}\right| \cdot (-1)^n \xrightarrow[\text{Ѳъчъп}]{\text{лема}} \det(A.B) \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \; -1 \end{pmatrix} (-1)^n =$$

$$= \det(AB)(-1)^{2n} = \det AB$$

Доказахме, че $\Delta = \det(A) \cdot \det(B)$

$\Delta = \det(AB)$

Обратими матрици

Квадратни матрици от n-ти ред

$$E = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}}_{n\text{-ти ред}} \qquad A.E = EA = A$$

единична матрица

Определение: Казваме, че квадр. матрица A е обратима, ако $\exists$ квадратна матрица X от същия ред, такава че $\boxed{XA = AX = E}$

Матрицата X (ако съществува) се нарича обратна матрица на матрицата A

Твърдение: 1) Всяка обратима матрица има единствена обратна матрица

Доказателство: Нека A е обратима и X и Y са обратни матрици на A.

$$XAY = \begin{cases} (XA)Y = EY = Y \\ X(AY) = XE = X \end{cases} \Rightarrow X = Y$$

Обратната матрица на обратимата матрица A ще означаваме с $A^{(-1)}$. (съгласно твърд. 1) означението $A^{(-1)}$ е ~~грешно~~ коректно

От равенствата имаме $A \cdot A^{(-1)} = A^{(-1)} \cdot A = E \Rightarrow$ A е обр. на $A^{(-1)}$, което означава, че е изпълнено равенството $(A^{-1})^{-1} = A$. Не всяка матрица е обратима. Например нулевата матрица. $(E)^{-1} = E$

~~Твърдение~~

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

~~$A = B =$~~

матрицата $\tilde{A} = B' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{2n} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ се нарича

адюнгирана матрица на матрицата A

Твърдение: Верни са равенствата

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} \Delta & & & 0 \\ & \Delta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta \end{pmatrix} = \Delta . E$$

където $\Delta = \det(A)$

Доказателство:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

(1-ви ред)(1-ви стълб) = истинско разлагане на $\Delta = \Delta$

(2-ви ред)(2-ри стълб) = фалшиво разлагане на $\Delta = 0$

По същия начин $\tilde{A} . A = \Delta E$

Теорема: Квадратната матрица A е обратима $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Доказателство: 1) Нека A е обратима, т.е. $\exists A^{-1}$

Имаме, че $A A^{-1} = E$

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1$

$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

2) Нека $\Delta = \det(A) \neq 0$. Съгласно твърдение 1) имаме

$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \Delta E$ (умножаваме с $\frac{1}{\Delta}$)

$\frac{1}{\Delta}(A\tilde{A}) = \frac{1}{\Delta}(\tilde{A}A) = E$

$\Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{\Delta}\{\tilde{A}\}A\right) = E \Rightarrow \exists A^{-1}$ и е $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. $\Delta = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$

$A^{-1} = ?$

$A \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot A^{-1} = E$, $A^{-1} \cdot A = E$

Твърдение: Обратимите матрици не са делители на нулата.

II.1.50

Доказателство: Нека A е обратима и $AB=0$
умножаваме с A^{-1} $\Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 \Rightarrow B=0$

от $BA=0 \Rightarrow B=0$

Твърдение 2: Ако A е обратима матрица тогава

$AB=AC \Rightarrow B=C$
$BA=CA \Rightarrow B=C$

~~$AB=CA$~~

Доказателство: $AB=AC$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E}B = \underbrace{A^{-1}A}_{E}C \Rightarrow B=C$$

Когато A е обратима $\frac{B}{A} \overset{\det}{=} B.A^{-1}$

Твърдението: Произведението на краен брой обратими матрици също е обратима матрица.

Доказателство: $\det(A_1A_2\dots A_k) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_k)$

$k=2$

Нека $A_1, \dots, A_k$ са обратими съгласно теоремата $\det(A_i) \neq 0$, $i=1,\dots,k$

$$\det(A_1A_2\dots A_k) = \underset{\neq 0}{\det(A_1)}\underset{\neq 0}{\det(A_2)}\dots\underset{\neq 0}{\det(A_k)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det(A_1\dots A_k) \neq 0 \Rightarrow A_1A_2\dots A_k$ е обратима

2-ро доказателство: Имаме, че $\exists A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_k^{-1}$

Разглеждаме $(A_1 A_2 \dots A_k)(A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}) =$

$= (A_1 A_2 \dots A_{k-1})(\underbrace{A_k A_k^{-1}}_{E})(A_{k-1}^{-1} \dots A_1^{-1}) =$

$= (A_1 A_2 \dots A_{k-2})(A_{k-1} A_{k-1}^{-1})(A_{k-2}^{-1} \dots A_1^{-1}) = \dots =$
$= E$

$(A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2 \dots A_k) = E$

$\Rightarrow A_1 A_2 \dots A_k$ е обратима матрица

$(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$

n-мерни векторни пространства

С $V_n = \{a = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \mid (\alpha_i \in \mathbb{R})\}$

две операции

$a = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$b = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$

$a + b \overset{\text{def}}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

Ако $\lambda \in \mathbb{R}$ тогава $\lambda a = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$

Определение: Множеството V_n с тези две операции наричаме n-мерно векторно пространство.

11.1.52

Всичките 8 свойства на тези операции са валидни и за n-мерните векторни пространства.

Определение:
Нека $a_1, \dots, a_k \in V_n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
Елементът $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$ се нарича лин. комбинация на $a_1, \dots, a_k$.

$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ се нарича коефициенти на тази линейна комбинация.

Примери:
1) $a = (1, 2, 3) \in V_3$ Може ли c да се представи като $b = (4, 5, 6) \in V_3$ линейна комбинация на вектори a и b?
$c = (7, 8, 9) \in V_3$

$c = (7,8,9) = \lambda_1 a + \lambda_2 b = (\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (4\lambda_2, 5\lambda_2, 6\lambda_2)$
$= (7,8,9) = (\underbrace{\lambda_1 + 4\lambda_2}_{7}, \underbrace{2\lambda_1 + 5\lambda_2}_{8}, \underbrace{3\lambda_1 + 6\lambda_2}_{9}) =$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 7 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 8 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 9 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 7 - 4\lambda_2 = -1$
$14 - 8\lambda_2 + 5\lambda_2 = 8$
$-3\lambda_2 = -6$
$\lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 2$

$\Rightarrow c = -a + 2b$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 7 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 8 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Проверка!

Да се реши, че $(1, 0, 1)$ не е линейна комбинация на векторите a, b, c

$$(1,0,1) = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$$

$$(1,0,1) = (\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (4\lambda_2, 5\lambda_2, 6\lambda_2) + (7\lambda_3, 8\lambda_3, 9\lambda_3) =$$

$$= (\underbrace{\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3}_{1}, \underbrace{2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3}_{0}, \underbrace{3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3}_{1})$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$ няма решение

2) Нека $e_1 = (1, 0, \ldots 0) \in V_n$

$e_2 = (0, 1, 0 \ldots 0) \in V_n$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \ldots 1) \in V_n$

Всеки вектор на V_n е линейна комбинация на векторите $e_1, e_2, \ldots, e_n$, защото $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$
$= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$;

II.1.54

$V_n = \{a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$

координати

+

λa

$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$

$e_n = (0, 0, \ldots 0, 1)$

Основни свойства на линейните комбинации

(Св. 1: Ако a е лин. комбинация на част от векторите $a_1, \ldots, a_k$, тогава a е линейна комбинация на всичките вектори $a_1, \ldots, a_k$

Доказателство:

$a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_k$

$a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s$

$a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s + 0 \cdot a_{s+1} + \ldots + 0 \cdot a_k$

$(0, \ldots 0)$

(Св. 2: (Транзитивност) Нека a е линейна комбинация на векторите $a_1 \ldots a_s$ и всеки от векторите $a_1, \ldots, a_s$ е лин. комбинация $b_1, \ldots, b_k$. Тогава a също е линейна комбинация на векторите $b_1, \ldots b_k$

Доказателство: Имаме $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$ (*)

$a_1 = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 + \dots + \alpha_{1k} b_k$

коеф на линейна комбинация на V_n

$a_2 = \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \dots + \alpha_{2k} b_k$

$\vdots$

$a_s = \alpha_{s1} b_1 + \alpha_{s2} b_2 + \dots + \alpha_{sk} b_k$

Изразите $a_1, a_2, \dots, a_s$, заместваме със съотв. изрази и след като извършим съответните преобразувания и получаваме желаното.

Задача: Ако в изразяването на a като линейна комбинация на b_1 до b_k имаме, че $a = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_k b_k$, тогава ~~ред~~ матрицата-ред $(\mu_1\ \mu_2, \dots, \mu_k) =$

$$= (\lambda_1\ \lambda_2\ \dots\ \lambda_s) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \dots & \alpha_{sk} \end{pmatrix}$$

II.1.56

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \cdots & \alpha_{sk} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix}$$

Св. 3: Нека A и B са матрици, такива че $\exists AB$. Тогава i-ти стълб на AB е линейна комбинация на стълбовете на AB.

Доказателство: $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$B_{n\times k} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$

$C_{m\times k}$

i-ти стълб на AB = C $\quad C=(c_{ij})$

$$\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{1i} + a_{12} b_{2i} + \cdots + a_{1n} b_{ni} \\ a_{21}\cdot b_{1i} + a_{22} b_{2i} + \cdots + a_{2n} b_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot b_{1i} + a_{m2} b_{2i} + \cdots + a_{mn} b_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_{1i} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_{2i} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} b_{ni}$$

4) Нека A и B са матрици и $C = A \cdot B$. Тогава всеки ред на C е линейна комбинация на редовете на матрицата B.

Доказателство:

$C = AB$

$C' = \cancel{A'B'}\ B' \cdot A'$

Съгласно (Св. 3) Всеки $\overbrace{\text{стълб на } C'}^{\text{редове на } C}$ е линейна комбинация на $\underbrace{\text{стълбовете на } B'}_{\text{редове на } B}$

Линейна зависимост и независимост

Определение: ~~Нека $a_1, \dots, a_k \in V_n$~~

Система от вектори: За разлика от множеството състоящо се от вектори, в с-мата от вектори се допуска някои вектори да се срещат по няколко пъти. Защо това е необходимо? Причини:

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix}}$$

Определение: Нека е дадена системата от вектори $a_1, \ldots, a_k$. Казваме, че тази система от вектори (или тези вектори) са линейно зависими, ако $\exists\, \lambda_1 \ldots \lambda_k$ числа, от които поне 1 е различно от $\neq 0$, такива че

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \vec{0}$$

където $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ е нулев вектор

поне едно $\lambda_i \neq 0$

Казваме, че тази с-ма от вектори (или че тези вектори) са ЛНЗ, ако равенството

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \vec{0}$ е изпълнено само когато $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0}$

Примери:

① $a = (1, 2, 3)$ $\quad a - 2b + c = \vec{0} = (0, 0, 0)$

$b = (4, 5, 6)$ $\quad$ Понеже коеф. са ненулеви

$c = (7, 8, 9)$ $\quad \Rightarrow a, b, c$ са ЛЗ (лин. зависими)

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = (\underbrace{\ldots}_{0}\ \underbrace{\ldots}_{0}\ \underbrace{\ldots}_{0}) = \vec{0} = (0, 0, 0)$$

② $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ $\quad e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ЛНЗ

$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ $\quad$ Доказателство:

$\vdots$ $\quad$ Нека $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k \cdot e_n = \vec{0}$

$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ $\quad (0, 0, 0)$

$(\lambda_1, 0, \ldots, 0) + (0, \lambda_2, \ldots, 0, 0) + \ldots + (0, \ldots, \lambda_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = (0, 0, \ldots, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k =$

③ $\{a\}$ е линейнозависимо $\Leftrightarrow a = \vec{0}$

Основни твърдения за линейна зависимост и линейна независимост

ТВ 1: Ако една с-ма от вектори съдържа нулеви вектори, то тази с-ма е лин. зависима.

Доказателство: $\vec{0}, a_1, \ldots, a_k$:

$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot a_1 + \ldots + 0 a_k = 0$

$\Rightarrow \vec{0}, a_1, \ldots, a_k$ е лин. зависима

ТВ 2: Ако една с-ма от вектори съдържа 2 ~~еднакви~~ равни вектора, тогава тази с-ма е линейно зависима.

Доказателство: $b, b, a_1, \ldots, a_k$

$1 \cdot b + (-1) b + 0 a_1 + \ldots + 0 a_k = 0$

$\Rightarrow b, b, a_1, \ldots, a_k$ са линейнозависими

Подсистема: Казваме, че системата от вектори (A) е подсистема на системата от вектори (B), ако с-мата (A) може да се получи от (B), като премахнем няколко вектора

ТТв. 3) Ако една с-ма от вектори съдържа линейнозависима подсистема, тогава тази система също е линейнозависима

Доказателство: $\underbrace{a_1, \dots, a_k}_{\text{линейно зависими}}, a_{k+1}, \dots, a_s$

$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$
и някое $\lambda_i \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \dots + 0 \cdot a_s = 0$
някое $\lambda_i \neq 0$

$\Rightarrow a_1, \dots a_k, \dots, a_s$ е линейно зависима

По очевиден начин от ТВ.3 $\Rightarrow$ ТВ.4

ТВ.4 Ако една с-ма е линейнозависима, тогава и всяка нейна подсистема също ЛНЗ

ТВ.5 Ако с-ма от вектори има поне 2 вектора и някои от векторите е линейна комбинация на останалите, тогава тази с-ма от вектори е линейно зависима.

Доказателство: Имаме $a_1, \ldots, a_k$ $k \geq 2$
имаме, че $a_1 = \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$

$\Rightarrow 1 a_1 - \lambda_2 a_2 - \ldots - \lambda_k a_k = \vec{0}$
$\neq 0$

$\Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_k$ са лин. зависими

ТВ 6: Ако една с-ма от вектори има поне 2 вектора и е линейнозависима, тогава някой от нейните вектори (но не всеки) е линейна комбинация на останалите.

Доказателство: $a_1, \ldots, a_k$ $k \geq 2$ ЛЗ

$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_i a_i + \ldots + \lambda_k a_k = \vec{0}$
$\neq 0$

$\lambda_i a_i = -\lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_{i-1} a_{i-1} - \lambda_{i+1} a_{i+1} - \ldots$

$- \ldots - \lambda_k a_k = \vec{0}$

Понеже $\lambda_i \neq 0$ дели на λ_i

$\Rightarrow a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} a_k$

ТВ 5 и ТВ 6 могат да се обединят по следния начин: Една с-ма от вектори, която има поне 2 вектора е ЛЗ, когато някой от векторите ѝ е линейна комб. на останалите. В

Случая на с-ма от 2 вектора:

II 1.62

Тв. 6') (система от вектори $\{a, b\}$) (само 2 вектора) е лин. зависима $\Leftrightarrow$ единият вектор може да се получи от другия като го умножим с подходящо число.

Тв. 7) Ако една с-ма от вектори е ЛНЗ и след като към нея добавим нов вектор получаваме ге новия вектор е лин. комб. на векторите от първоначалната с-ма

Доказателство: Нека $a_1, \dots, a_k$ - лин. незав.
$b, a_1, \dots, a_k$ - лин. зав.

$$\Rightarrow \mu b + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \vec{0}$$

и някои от числата $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0$

Твърдим, че точно $\mu \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\frac{\lambda_1}{\mu} a_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\mu} a_k}$$

b е лин. комбинация на $a_1, \dots, a_k$

Тв. 8) Ако към една ЛНЗ с-ма от вектори добавим вектор, който не е тяхна линейна комбинация, тогава новата система отново е ЛНЗ. Тв. 8 следва по очевиден начин от Тв. 7.

Доказателство: [illegible]

Основна лема на Лин. Алг.

V_n

Основна лема за двете системи от вектори:

Лема: Нека са дадени системите от n-мерни вектори

(A) $a_1, \ldots, a_s$
(B) $b_1, \ldots, b_k$

Като всеки вектор от с-мата (A) е лин. комбинация на вектори от с-мата (B).

Ако $s > k$, тогава с-мата (A) е лин. зависима

Доказателство: Индукция по броя k на векторите от с-мата (B)

База $k=1$ Сгл. усл. иначе

$a_1 = \lambda_1 b_1$
$a_2 = \lambda_2 b_1$ Ако някое $\lambda_i = 0$, тогава $a_i = \vec{0}$
$\vdots$ Системата (A) съдържа нулевия
$a_s = \lambda_s b_1$ вектор и сгл. тв. 1 (A) е линейно зависима.

Нека $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \ldots \lambda_s \neq 0$. От $s > k$ иначе, че $s \geq 2$, т.е. в (A) имаме a_1 и a_2.

Разглеждаме $\lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_2 = \lambda_2(\lambda_1 b_1) - \lambda_1(\lambda_2 b_1) = \vec{0}$
$\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow \{a_1, a_2\}$ е лин. зависима подсистема на (A)

II-1-64

От тв. 3 $\Rightarrow$ (A) е линейно зависима.

Базата е доказана.

Нека $k \geq 2$, т.е. С-мата (B) има поне 2 вектора

$$(1)\begin{cases} a_1 = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 + \dots + \alpha_{1k} b_k \\ a_2 = \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \dots + \alpha_{2k} b_k \\ \vdots \\ a_s = \alpha_{s1} b_1 + \alpha_{s2} b_2 + \dots + \alpha_{sk} b_k \end{cases}$$

Ако $\alpha_{s1} = \alpha_{s2} = \dots = \alpha_{sk} = 0$

тогава $a_s = \overrightarrow{0}$

(A) съдържа нулевия вектор $\overset{\text{тв. 1}}{\Rightarrow}$ (A) е ЛЗ.

Нека някое от числата от числата
$\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sk}$ е различно от нула

Полагаме
$\alpha_{sk} \neq 0$

$\frac{a_s \cdot 1 \cdot (-\alpha_{1k})}{\alpha_{sk}}$ Умножаваме посл. равенство с $\frac{(-\alpha_{1k})}{\alpha_{sk}}$ при това умнож., коефр. пред b_k: $(-\alpha_{1k})$. Прибавяне го към първия ред

$a_1' = a_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{sk}} \cdot a_s = \alpha_{11}' b_1 + \dots + \alpha_{1k-1} b_{k-1}$

с тази $\frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{sk}}$ и го прибавяне към 2 Умнож. посл. и получаваме $a_2' = a_2 - \frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{sk}} \cdot a_s$

$= \alpha_{21}' b_1 + \dots + \alpha_{2k-1} b_{k-1}$

Умноже. – $\frac{\alpha_{s-1\,k}}{\alpha_{sk}}$ и го прибавяме към предход.

$a'_{s-1} = a_{s-1} - \frac{\alpha_{s-1\,k}}{\alpha_{sk}} a_s = \alpha'_{s-1} b_1 + \dots + \alpha^{k}_{s-1\,k-1} b_{k-1}$

$(a'_1, a'_2, \dots, a_{s-1}) \Rightarrow (2)$

(A') $a'_1, \dots, a'_{s-1}$

(B') $b_1, \dots, b_{k-1}$

(2гл.) (2) всеки вектор от A' е лин. комб. на B'. Понеже $s > k \Rightarrow s-1 > k-1 \Rightarrow$ можем да приложим индуктивната хипотеза и да заключим, че $\Rightarrow a'_1, \dots, a'_{s-1} \Rightarrow$ ~~A~~ ЛЗ

т.е. $\lambda_1 a'_1 + \dots + \lambda_{s-1} a'_s = \vec{0}$ и някое $\lambda_i \neq 0$

Заместваме a'_1 и a'_{s-1} от (2) и получаваме

$\Rightarrow \lambda_1 \left(a_1 - \frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{sk}} a_s\right) + \lambda_2 \left(a_2 - \frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{sk}} a_s\right) + \dots +$

$+ \lambda_{s-1} \left(a_{s-1} - \frac{\alpha_{s-1\,k}}{\alpha_{sk}} a_s\right) = \vec{0}$

някое $\lambda_i \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s-1} a_{s-1} + \mu a_s = \vec{0}$

някое $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ ~~B~~ $a_1, \dots, a_m$ са ЛЗ –

т.е. ~~A~~ с-мата (A) е лин. зависима

Т. 1.66

V_n n-фора

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ $\quad e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ЛНЗ

$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$

Следствие 1: Всеки $(n+1)$-вектора във V_n са линейно зависими

Доказателство: Нека $a_1, \ldots, a_{n+1}$ са произв. вектори във V_n. Разглеждаме с-мите

(A) $a_1, \ldots, a_{n+1}$ # вектор от V_n е лин.

(B) $e_1, \ldots, e_n$ комбинация на $e_1, \ldots, e_n$.

Понеже в (A) има повече вектори отколкото в (B) съгласно лемата $\{a_1, \ldots, a_{n+1}$ са ЛЗ.

Всеки вектор във V_n е лин. комбинация на векторите $e_1, \ldots, e_n$.

Следствие 2: Нека $a_1, \ldots, a_s \in V_n$ и всеки вектор от V_n е лин. комбинация на векторите $a_1, \ldots, a_s$. Тогава $s \geq n$

Доказателство: Да допуснем противното, т.е. че $s < n$. Разглеждаме с-мите вектори.

(A) $e_1, e_2, \ldots, e_n$

(B) $a_1, \ldots, a_s$

По усл. всеки вектор от с-мата (A) е лин. комб. на векторите от с-мата (B).

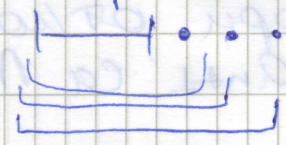
II. 1.67

Понеже сме допуснали, че $s \leq n \Rightarrow$ от лемата следва че $e_1, \ldots, e_n$ са лин. зависими, което е противоречие

Ранг на система вектори

Определение: Нека (A) е система от вектори и (A') е подсистема на (A). Казваме, че (A') е максимална линейнонезависима подсистема (МЛНП) на (A), ако са изпълнени следните условия:

(1) (A') е лин. независима с-ма
(2) ако към (A') добавим произволен вектор от (A), получаваме лин. зависима система от вектори, т.е. $(A') \cup \{a\}$ е лин. зависима $\forall a \in (A)$.



Примери:
$V_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$

1) $a = (1, 2, 3) \in V_3$
$b = (4, 5, 6)$
$c = (7, 8, 9)$

a, b – ЛНЗ

$\{a, b, c\} \supset \{a, b\}$

$\{a, b, a\}$ лин. зависима
$\{a, b, b\}$ лин. зависима

$a + c - 2b = \vec{0}$, т.е. за $\Rightarrow \{a, b\}$ е МЛНП на $\{a, b, c\}$

$\{a, b\}$ е МЛНП
$\{b, c\}$ е МЛНП

2) $a_1, \ldots, a_k$ да са зависими
тогава $\{a_1, \ldots, a_k\}$ е МЛНП на себе си

Нулева с-ма от вектори $= \{0, 0, \ldots, 0\}$ няма МЛНП. Вярно е обаче следното твърдение:

Тв. 1) Всяка крайна ненулева с-ма от вектори има МЛНП

Доказателство: Нека (A) е ненулева крайна с-ма. Тъй като (A) съдържа ненулеви вектори, те ще имат ЛНП (подсистеми, състоящи се от 1 ненулев елемент).

(A') е ЛНП на (A), което е с най-много елементи.
Разглеждаме $(A') \cup \{a\}$, където $a \in (A)$
Ако $a \in (A')$, тогава в $(A') \cup \{a\}$ има повторение $\Rightarrow (A') \cup \{a\}$ е ЛЗ.

Ако $a \notin (A')$, тогава $(A') \cup \{a\}$ е подсистема ЛЗ, но A, което има най-много елементи от (A) и следователно $(\ldots)$ е ЛЗ.

$\Rightarrow (A')$ е МЛНП на (A)

Тв 2) Всяка ЛНП на с-ната (A) може да се размири до МЛНП на (A)

Доказателство: $a_1, \ldots, a_n \in (A)$
$a_1, \ldots, a_n$ са ЛЗ

$(A') = \{a_1, \ldots, a_n\}$

Избираме: $a \in (A) \setminus (A')$

Ако $a \cup (A')$ е ЛЗ, тогава избираме друг вектор $b \in (A) \setminus (A')$ и правим същата проверка

Ако $(A') \cup \{a\}$ е ЛЗ за $\forall a \in (A')$ тогава (A') е МЛНП

Ако някой вектор $b \in (A)$ не е лин. комб. на векторите от (A'), тогава

$(A') \cup \{b\}$ е ЛНП на (A), която е разширение на (A') за $(A') \cup \{b\}$ и т.н. до МЛНП на (A), която съдържа (A').

~~За тази подсистема прилагаме~~

II.1.70

Тв. 3) Нека (A) е система от вектори и (A') е подсистема на (A).

Подсистема (A') е МЛНП на (A) тогава и само тогава, когато:

(1) (A') е ЛНЗ.

(2) $\forall$ елем. на (A) е лин. комб. на ел. от (A')

Доказателство: Нека (A') е МЛНП на (A)

Нека $a \in (A)$ е произв. и разгледаме $(A') \cup \{a\}$

Съгласно дефиницията: $(A') \cup \{a\}$ е ЛЗ

Понеже (A') е ЛНЗ $\Rightarrow a$ е лин. комб. на векторите от (A')

1) Нека a изпълн. усл. (1) и (2), тогава a е лин. комб. на векторите от (A')

$\Rightarrow (A') \cup \{a\}$ е ЛЗ $\forall a \in (A)$

$\Rightarrow (A')$ е МЛНП

Тв. 4) Всеки две МЛНП на дадена крайна система от вектори имат равен брой вектори.

Док: $\{b_1, \dots, b_k\}$ и $\{a_1, \dots, a_s\}$ две МЛНП на (A)

$k \geq s$ Да допуснем противното и нека например $s > k$.

Съгласно Тв. 3 $\forall$ вектор от (B) е лин. комб. на векторите от (C)

Понеже $s > k$, съгл. основната лема $a_1, \dots, a_s$ са ЛЗ, което е противоречие

Следствие: Броят на векторите във всяка МЛНП на дадена подсистема е равен на максималния брой лин. независими вектори, които можем да изберем из между векторите на с-мата.

Определение: Нека (A) е крайна ненулева с-ма от вектори. Броят на векторите от коя да е МЛНП (A) се нарича ранг на системата от вектори (A). Ако с-мата (A) е нулева, тогава рангът на A е равен на нула

Рангът на (A) ще бележим с rg(A).

~~(съгл. Тв 4) rg(A) се деф.~~

(съгл. Тв 4) rg(A) е дефиниран коректно.

1) Примери: $\{a, b\}$ е МЛНП на $\{a, b, c\}$

$a = (1, 2, 3)$

$b = (4, 5, 6)$ $\Rightarrow rg\{a, b, c\} = 2$

$c = (7, 8, 9)$

2) Нека $\{a_1, \ldots, a_k\}$ са ~~лин~~ ЛНЗ

$\{a_1, \ldots, a_k\}$ е МЛНП на себе си

$\Rightarrow rg\{a_1, \ldots, a_k\} = k$

Тв 5: Нека (A) е с-ма от вектори и (A') е подсистема на (A). Тогава $rg(A') \leq rg(A)$

Док: max бр. вектори от (A') не е по-голям от max бр. вектори от (A)

Тв 6: Ако от една с-ма вектори премахнем вектор, който е лин. комби. на останалите, ранга не се променя.

Док: $b, a_1, \ldots, a_k$ и b е лин. комб. на $a_1, \ldots, a_k$. Трябва да док, че $rg\{b, a_1, \ldots, a_k\} = rg\{a_1, \ldots, a_k\}$

Ако $\{a_1, \ldots, a_k\}$ е ненулева с-ка, тогава b е нулев вектор $\Rightarrow$ $rg\{b, a_1, \ldots, a_k\} = rg\{a_1, \ldots a_k\}$ са нулеви.

Нека $a_1, \ldots, a_k$ не е нулева и $rg\{a_1, \ldots, a_k\} = r$ и $a_1', \ldots, a_r'$ е МЛНП на $\{a_1, \ldots, a_k\}$

Трябва да док, че: $rg\{b, a_1, \ldots, a_k\} = r$.
Достатъчно е да докажем, че
$a_1, \ldots, a_r'$ е МЛНП на $\{b, a_1, \ldots, a_k\}$

Съгл. ТВ.3: Трябва, че всеки от векторите $\{b, a_1', \ldots, a_r'\}$ е лин. комби на векторите $a_1', \ldots, a_r'$. За векторите $a_1, \ldots, a_k$, твърдено е така съгл. ТВ.3.

По условие b е лин. комби. на $a_1, \ldots, a_k$
От своя страна всеки от векторите $a_1, \ldots, a_k$ е лин. комби. на $a_1', \ldots, a_r'$
$\Rightarrow$ b е лин. комби. на $a_1', \ldots, a_r'$ и следов. твърд. е доказано.

ТВ.4: Нека (A) и (B) са две системи от вектори и всеки вектор от (A) е лин. комби. на векторите от (B). Тогава $rg(A) \leq rg(B)$

Док: Разгл. $C = \{A\} \cup \{B\}$. Понеже A е подсистема на (C) $rg(A) \leq rg(C)$. (съгл. ТВ.6 - Ако от (C) премахнем векторите на (A), rg не се промени, т.е. $rg(C) = rg(B) \Rightarrow rg(A) \leq rg(B)$

Тв. 8: Нека (A) и (B) са две системи от вектори и всеки вектор от (A) е лин. комб. на векторите от (B), а всеки вектор от (B) е лин. комб. на векторите от (A) (тогава с-ми от вектори се наричат еквивалентни).
Тогава $rg(A) = rg(B)$

Доказателство: $rg(A) \leq rg(B)$ $rg(B) \leq rg(A)$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

редовете на A образуват с-ма от m-мерни вектори, рангът на тази с-ма ще означаваме $rg_{ред}(A)$

Стълбовете на A образуват системи от m-мерни вектори, рангът на тази с-ма от вектори означаваме с $rg_{ст}(A)$

Тв 9: Нека $\{A\}$ и $\{B\}$ са матрици, такива че $\exists A.B$. Тогава
$rg_{ст}(AB) \leq rg_{ст}(A)$

$rg_{ред}(AB) \leq rg_{ред}(B)$

Доказателство: Вече доказахме че $\forall$ стълб на AB е лин. комб. на стълбовете на AB. Съгл. Тв. 7
$rg_{ст}(AB) \leq rg_{ст}(A)$

Всеки ред на AB е лин. комб. на редовете на B. Тв 7 $\Rightarrow rg_{ред}(AB) \leq rg_{ред}(B)$

Ранг на матрица

Лема: Нека е дадена квадратна матрица ~~det(A)=0~~

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ако редовете (или стълбовете) на A са лин. зависими, тогава $\det(A)=0$

Доказателство: (за стълбове) Понеже стълбовете са ~~лин.~~ ЛЗ 1 от тях ще бъде лин. комби на останалите. Нека например 1-стълб е лин. комби на останалите.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ако към 1-стълб на a, прибавим 2-рия стълб умнож. $(-\lambda_2)$
3-тия стълб * $(-\lambda_3)$
n-тия стълб * $(-\lambda_n)$
и чи прибавим към 1-вия стълб на A ще получим матрицата B.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Понеже при тази опер. ~~det(B)~~ не се променя, то $\Rightarrow \det(A) = \det(B)$, но $\det(B) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A) = 0$

~~минори~~

Минори

Определение: Нека $A = (a_{ij})$ е матрица от тип $m \times n$ и k е ест. число и k е ест. число такова, че $k \leq \min\{m, n\}$. Избираме в A по произволен начин k реда и k стълба. При пресичането ел., избраните редове и стълбове образуват квадратна матрица от k-ред (подматрица на A). Детерминантата на тази матрица наричаме минор от k-ти ред на матрицата A.

Примери:

1) минорите от първи ред, това са елементите на матрицата A.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ са всички матрици от 2-ри ред.

ч) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

5) Нека A е квадратна матрица от n-ти ред, тогава $\det(A)$ е единственият възможен минор от n-ти ред на A. A минорите от ~~n-1~~-ри (n-1)-ред $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ това са поддетерминантите на ел. на матрицата A.

6) Ако A е правоъг. матрица от тип $m \times n$, тогава максималните редове на минорите са равни на $\min\{m, n\}$.

Определение: Нека A е матрица и Δ е минор на матрицата A. Казваме, че Δ е базисен минор на A, ако са изпълнени следните условия:

(1) $\Delta \neq 0$

(2) Всеки минор на A, който има ред с 1-ца по-голям от реда на Δ (ако има такива) е равен на нула.

$\Rightarrow$ и съдържа Δ

Примери: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ е базисен минор.

$\det(A) = 0$ - единствен минор от 3-ти ред.

По същия начин се убеждаваме, че всеки минор от 2-ри ред на A е базисен.

Т 1.1.78

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix}\right| = -3 \neq 0$ няма минори от 3-ти ред $\Rightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix}\right|$ е базис

Ясно е, че нулевите матрици нямат минори, всеки минор е равен на 0 и не удовлетворява първото изискване за базисен минор.

ТВ 1: Всяка ненулева матрица има базисен минор

Доказателство: Понеже A е ненулева $\Rightarrow A$ има ненулеви минори (ненулевите елементи са ненулеви минори от 1-ви ред.)

Нека Δ е ненулев минор, който из между всичките ненулеви матрици на A има най-висок ред. Ясно е, че Δ удовлетворява и 2-рото условие за базисен минор и следователно Δ е базисен.

Да се докаже, че A ненулева в минор се съдържа в базисен минор.

Нека Δ е ненулев минор на A. $\Delta \neq 0$ и Δ е от r-ти ред ($r \times r$)
Ако няма минори от $(r+1)$-ред, тогава Δ е базисен и тв е доказана.
Нека в A има минори от $(r+1)$ ред. са равни на нули.

$\Rightarrow$ Δ е базисен и ТВ е доказана.
Ако някой от $i+2$ (напр. Δ_1) е различен от нула, тогава разглеждаме Δ_1 и нравим същите разсъждения като за Δ. или Δ_1 е базисен и търсения минор, защото $\Delta \equiv \Delta_1$ или Δ_1 не е базисен, но тогава $\exists$ минор от $(i+2)$-ред Δ_2, който съдържа на Δ_1 (и са и Δ), ~~тогава~~ така го

$\Delta_2 \neq 0$

ТВ. 2: Нека Δ е базисен минор на матрицата A. Тогава транспонираната ~~матрица~~ Δ' е базисен минор на транспонираната матрица A'.

Док: Δ' е базисен на A'?
1-вото усл. $\Delta' \neq 0$ е изпълнено защото $\Delta = \Delta'$
$\Delta \neq 0$
Нека Δ е от i-ти ред
Δ_1' е минор от $(i+1)$-ред, който съдържа Δ' $\Delta_1 = 0$
Разглеждаме Δ_1', който е транспониран ~~минор~~ на Δ_1
Δ_1' е минор от $(i+1)$-ви ред на A, който съдържа $\neq \Delta$. Понеже Δ е базисен
$\Rightarrow \Delta_1' = 0$ но $\Delta_1' = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_1 = 0$
$\Rightarrow \Delta'$ е базисен

II.1.80

Ранг на матрици

Теорема 1: Нека A е ненулева матрица и Δ е базисен минор на A. Тогава:

Тв. 1: Стълбовете на A, които участват в Δ, образуват максимална линейно независима подсистема (МЛНП) на с-мата от векторите стълбове на A. Тв. 2: Редовете на A, които участват в Δ, образуват МЛНП на системата от вектори редове.

Доказателство: Нека M е множеството на стълбовете на A, които участват в Δ.

(1) M е ЛНМ (линейно независимо множество) на стълбове.

(2) Ако към M добавим, кой да е стълб на A, получаваме линейно независима система от стълбове.

Да допуснем, че (1) не е вярно, т.е. стълбовете от M са ЛЗ, тогава обаче ще бъдат зависими и стълбовете на Δ. Съгл. лемата $\Delta = 0$, която е противоречие

Доказателство (2): Δ – r-реда, r-стълба $\Big\}$ r е редът на Δ

т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \qquad A = (a_{ij})$$

Образуваме си следната детерминанта от $(r+1)$-ред. Нека k е произволно

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}$$

Индексите i и k са избрани произволно.

Ако $k \leq r$, тогава $\tilde{\Delta}$ има два еднакви стълба $\Rightarrow \tilde{\Delta} = 0$

Ако $i \leq r$, тогава $\tilde{\Delta}$ има два еднакви реда $\Rightarrow \tilde{\Delta} = 0$

Ако $k > r$ и $i > r$, тогава $\tilde{\Delta}$ е минор от $(r+1)$ ред на A, който съдържа Δ.

Понеже Δ е базисен минор $\Rightarrow \tilde{\Delta} = 0$.

И така при всички положения $\tilde{\Delta} = 0$.

Развиваме $\tilde{\Delta}$ по последния ред.

$(*)\ a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ir}A_{ir} + a_{ik}\Delta = 0$

$\Delta \neq 0$

От вида на Δ става ясно, че $A_{i1}, A_{i2}, \dots A_{ir}$ не зависят от i (тези адюнгирани количества се определят от елементите r реда и не зависят от i), т.е.

можем да положим $A_{i1} = \lambda_1$, $A_{i2} = \lambda_2, \dots, A_{ir} = \lambda_r$.

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{ir}\lambda_r + a_{ik}\Delta = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

А предполагаме, че е от тип $m \times n$.

пол. $i = 1 \Rightarrow a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + \lambda_{1r}\lambda_r + \Delta a_{1k} = 0$

$i = 2 \Rightarrow a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2r}\lambda_r + \Delta a_{2k} = 0$

$\vdots$

$i = m \Rightarrow a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \dots + a_{mr}\lambda_r + \Delta a_{mk} = 0$

Като запишем тези равенства във векторен вид получаваме:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Понеже $\Delta \neq 0$ от това равенство следва, че

стълбовете, участващи в него са лин. зависими, т.е. ако към стълбовете на A участващи в Δ ~~дълж~~ добавим кой и да е друг стълб на A получаваме лин. зависими системи от стълбове.

2) ~~на~~ M е МЛНП на с-мата от стълбовете на A.

Доказателството (1) е завършено.

Доказателство (2) Ако Δ е базисен минор на A ~~тога~~ такива транспонираният минор на A' е базисен минор на A'.

Съгласно (1) стълбовете на A' участващи в Δ' образуват МЛНП от стълбовете на ~~A~~ (A).

Тъй като стълбовете на A' участващи в Δ са редове на A, участващи в Δ, а стълбовете на A' са редове на ~~Δ~~ A.

~~=> следва следств. 2~~

Следствие: Всеки два базисни минора на дадена ~~на~~ ненулева матрица A ~~A~~ имат равни редове.

Доказателство: Нека rg на системата от столбовете на A е равен на r.
и Δ_1 и Δ_2 са два базисни минор.

Тогава съгласно Т-1: (А)
бр. на редовете на $\Delta_1 = r$
бр. на редовете на $\Delta_2 = r$ $\Rightarrow$ Δ_1 и Δ_2 имат равни редове.

Задача: Да се докаже че ако Δ е базисен минор на 1 матрица A тогава $\forall$ минор на A, който има ред по-голям от реда на Δ е равен на 0.

Определение: Нека A е ненулева матрица. Редът на която да е базисен минор на A се нарича ранг на матрицата A и се бележи с $rg(A)$.
Ако A е ненулева матрица тогава $rg(A) \geq 0$.

Съгл. следствието rg на ранга на матрицата е коректно понятие.

Примери:

Примери: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ е базисен минор

$\Rightarrow rg(A) = 2$

2) Ако A е квадратна матрица от n-ти ред и $\det(A) \neq 0$, тогава $\det(A)$ е базисен минор и следователно $rg(A) = n$. Ако $\det(A) = 0$, тогава $rg(A) < n$.

3) Нека A е матрица от ~~n-ти~~ тип $m \times n$

$rg(A) \leq \min\{m, n\}$

4) Ако A е диагонална матрица, т.е. $A = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$ тогава $rg(A)$ е броят на ненулевите числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и същото е вярно и за транспонираната $\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$ на матрицата

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ редовете на A образуват система от n-мерни вектори. За Ранг на тази система от вектори ще бележим с $rg_{ред}(A)$ ~~реда~~

Стълбовете на A образуват система от m-мерни вектори ~~ще~~ стълбове. Рангът на тази ~~мат~~ система от вектори ще ~~е~~ бележим с $rg_{ст.}(A)$.

Теорема 2: За всяка матрица A са верни равенствата: $rg(A) = rg_{ред}(A) = rg_{ст}(A)$.

Доказателство: Ако A е нулева матрица, твърдението е очевидно. Нека A е ненулева матрица и Δ е базисен минор, който има ред равен на r.
Тогава ~~ранг~~ $rg(A) = r$. ~~Съгласно T1(1)~~

Съгласно T1(1) $rg_{ст}(A) = r$.
Съгласно T1(2) $rg_{ред}(A) = r$.

Следствие 2: Нека A е квадратна матрица от n-ти ред.

Тогава: $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ редовете (стълбовете) на A са лин. зависими.

Доказателство: 1) Нека редовете (стълбовете) на A са лин. зависими.
Тогава $\det(A) = 0$ съгл. лемата от миналата лекция.

2) Нека $\det(A)=0$, тогава $rg(A)<n$

Понеже $rg(A)=rg_{ст}(A) \Rightarrow rg_{ст}(A)<n \Rightarrow$ столбовете на A са лин. зависими.

Понеже $rg(A)=rg_{ред}(A) \Rightarrow rg_{ред}(A)<n \Rightarrow$ редовете на A са лин. зависими.

Следствие 3: Ако редовете в една квадратна матрица са лин. зависими, тогава столбовете ѝ също са лин. зависими и обратното.

Твърдение 1: Нека A и B са матрици, такива че $\exists A.B$. ~~Тогава ранга на~~

Тогава: $rg(AB) \leq rg(A)$ $rg(AB) \leq rg(B)$ $rg(AB) \leq \min\{rg(A), rg(B)\}$

Доказателство:
Столбовете на AB са лин. комбинация на столбовете на матрицата $A \Rightarrow rg_{ст}(AB) \leq rg_{ред}(A)$

$rg(AB) \leq rg(A)$

~~Твърдение 2:~~ Всеки ред на AB е лин. комб. на редовете на $B \Rightarrow rg_{ред}(AB) \leq rg_{ред}(B)$

$rg(AB) \quad rg(B)$

II.1.88

Твърдение 2: Нека A и B са квадратни матрици от n-ти ред ~~такива, че~~ ~~$\exists AB$. Ако матрицата~~

Ако матрицата A е обратима ($\exists A^{-1}$), тогава ~~ранг~~

$$rg(AB) = rg(BA) = rg(B)$$

Доказателство: Нека $C = A.B$

Съгл. тв. 1: $rg(AB) \leq rg(B)$

$C = AB \Rightarrow A^{-1}C = \underbrace{A^{-1}.A}_{E}.B \qquad B = A^{-1}.C$

От Тв. 1 $rg(B) \leq rg(C) = rg(AB)$

$\Rightarrow rg(B) = rg(AB)$

$\boxed{rg(B) = rg(BA)}$ се док. аналогично $C = B.A$

Зад: Да се измислят матрици A и B, такива че

$rg(AB) \neq rg(BA)$

Системи линейни уравнения

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ матрица на $(*)$

$\overline{A} = \left(A \middle| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)$ разширена матрица на (*)

Определение: Системата (*) наричаме несъвместима (или противоречива) ако тя няма решение.

Системата (*) се нарича съвместима, ако тя има поне 1 решение.

Системата (*) се нарича определена, ако тя има точно едно решение (формули на Крамер - системите, които използват тези формули)

Системата (*) се нарича неопределена, ако тя има поне 2 различни решения.

Записваме с-мата (*) във векторен вид.

$$(**) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

С помощта на векторното представяне на (*) по очевиден начин получаваме следните твърдения:

Твърдение 1: Системата (*) е съвместима ⇔ когато стълбовете $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ е лин. комби. на стълбовете на A. Коефо. на тази лин. комби. намираме на решението на (*).

Твърдение 2: С-мата (*) е определена ⇔ когато $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ се представят по единствен начин като лин. комби. на стълбовете на A.

Твърдение 3: С-мата (*) е неопределена ⇔ когато $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ може да се представи поне по 2 разл. начина като лин. комби. на стълбовете на A.

$$rg(A) = rg(\overline{A})$$

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right).$$

Теорема (на Руше): Системата (*) е съвместима тогава и само тогава когато $rg(A) = rg(\overline{A})$

Доказателство: 1) Нека с-мата (*) е съвместима тогава $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ е лин. комби на стълбовете на A

$\Rightarrow rg_{\text{стл.}}(A) = rg_{\text{стл.}}(\overline{A}) \Rightarrow rg(A) = rg(\overline{A})$

$rg(A) \quad rg(\overline{A})$

2) Нека $rg(A) = rg(\overline{A})$

Ако A е нулевата матрица $\Rightarrow \overline{A}$ също е нулева $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е решение на (*) и следователно (*) е съвместима. Нека A е ненулева и Δ е базисен минор на A. Понеже $rg(A) = rg(\overline{A}) \Rightarrow \Delta$ е базисен минор и на $\overline{A}$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ е лин. комбин. на стълбовете на A, в които участва Δ.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ е лин. комбин. на всички стълбове на A.

Съгл. ТВ-1 с-мата (*) е съвместима.

~~Теорема 2~~ Лема: Нека $a_1, \dots, a_k$ са вектори и

(*) $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$

Представянето (1) на x е единствено $\Leftrightarrow$ когато $a_1, \dots, a_k$ са лин. независими.

Доказателство: 1) Нека $a_1, \dots, a_k$ са лин. независими.

Да допуснем, че освен (1) имаме (2) $x = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k$

От (1) и (2) $\Rightarrow \vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) a_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) a_k$.

Понеже $a_1, \dots, a_k$ са лин. независими

$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_k - \mu_k = 0$ т.е. $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots$ $\lambda_k = \mu_k$, което озн., че (1) е единствено.

2) Нека $a_1, \dots, a_k$ са лин. зависими

(3) $\vec{0} = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_k a_k$, където някое $\xi_i \neq 0$

От (1) и (3) $\Rightarrow$ (4) $x = (\lambda_1 + \xi_1) a_1 + \dots + (\lambda_k + \xi_k) a_k$

Понеже $\xi_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_i + \xi_i \neq \xi_i$

$\Rightarrow$ Разпадането (4) е различно от (3)

Теорема 2: СЛАУ (*) е определена $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(\overline{A}) = \operatorname{rg}(A) = n$ - бр. на неизвестните.

Доказателство: Нека (*) е определена
Съгласно теоремата на Руше ~~rg(A) = rg(Ā)~~ $rg(A) = rg(\bar{A})$

Съгласно Тв 2: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_m \end{pmatrix}$ се ~~опред~~ представя по единствен начин, които е лин. комбин. на стълбовете на A.

Съгл. Лемата стълбовете на A са ~~ЛН~~ ЛНЗ. $\Rightarrow rg_{ст}(A) = n \Rightarrow rg(A) = n$

$\Rightarrow rg(A) = rg(\bar{A}) = n$

Следствие: Нека $m = n$, т.е. (*) е квадратна. (*) е определена $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Док.: 1) Когато $\det(A) \neq 0$ (*) е определена и има единств. решение, което определяваме с формулите на Крамер

2) Нека (*) е определена. Тогава $rg(A) = n \Rightarrow \det(A) \neq 0$

т.е. Тази ситуация с-мата е определена

II.1.94

Теорема 3: Системата (*) е неопределена $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(\overline{A}) < n$ – бр. на неизвестните

Доказателство: Нека $rg(A) = rg(\overline{A}) < n$
От ~~това~~ $rg(A) = rg(\overline{A}) \Rightarrow$ (*) е съвместима.
Ясно е, че $rg(A) \leq n$

~~Понеже с-мата (*) е неопределена, $rg(A) \neq n$~~
~~получаваме~~ ~~rg~~ ~~следствие~~ ~~$rg(A) < n$~~

Понеже $rg(A) \neq n \Rightarrow$ с-мата е неопределена.

2) Нека с-мата (*) е неопределена. Тогава $rg(A) = rg(\overline{A})$ понеже (*) е съвместима $rg(A) \leq n$

Понеже с-мата е неопределена $\Rightarrow rg(A) \neq n$ и следователно $rg(A) < n$

Казваме, че две системи уравнения са еквивалентни, ако всяко решение на едната е решение и на другата.

Всяка система от у-ния която се получава от (*) като премахнем няколко от уравненията ѝ се нарича подсистема на (*)

Ясно е, че $\forall$ реш. на с-мата е реш. на подс-мата. Обратното не е вярно.

Определение: Нека A е ненулева матрица на Δ е базисен минор на A. У-нията от (*) в които участ. коеф., на които участват в Δ ще наричаме базисни уравнения относно базисния минор Δ.

Теорема 4: Нека с-мата (*) е съвместима и A е ненулева матрица. Нека Δ е базисен минор на A. Тогава подс-мата на (*), която се състои от базисните уравнения е еквивалента на (*).

Доказателство: Понеже (*) е съвместима $rg(A) = rg(\bar{A})$ $\Rightarrow \Delta$ е базисен минор и на $\bar{A}$. $\Rightarrow$ Всеки ред на $\bar{A}$, който не участва в Δ е лин. комбин. на редовете на $\bar{A}$, които участват в Δ. За с-мата (*) това означава, че $\forall$ у-ние, което не е базисно може да се получи, като умножим базисните у-ния с подходящи числа и ги съберем. От тук следва, че всяко решение на базисната подс-ма, ~~която се състои от базис~~ (т.е. подс-мата която се състои само от базисните уравнения) е решение на (*).

Следствие: Ако с-мата (*) е определена, тогава всяка нейна подс-ма е Крамерова.

II.1.96

Намиране на решенията на (*) в случай, че тя е неопределена.

1) Нека с-мата (*) е неопределена, т.е. $rg(A) = rg(\bar{A}) < n$

Ако A е нулевата матрица, тогава $\bar{A}$ също е нулева матрица $\Rightarrow \forall (x_1, x_2, \dots, x_n)$ е реш. на (*) на V_n. ~~Нека A е~~

2) Нека A е ненулева матрица и Δ е базисен минор, който има ~~решение~~ ред r.
Ще предполагаме, че Δ е образуван от левите r реда и първите r стълба, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Съгласно теорема 4 (*) е еквивалентна на с-мата

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \Leftrightarrow (**) \cancel{\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 \end{cases}}$$

$r+1$

~~Всички неизв. от r+1~~ $\cancel{\Leftrightarrow (**) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{12} \end{cases}}$

$$\Leftrightarrow (**) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

$x_{r+1}, \dots, x_n$ са свободни членове

$x_1, x_2, \dots, x_r$ се определят единствено от (**) например по формулите на Крамер ($\Delta \neq 0$)

От $(x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{x_{r+1}, \dots, x_n}_{\text{свободна част на това решение}}$ е решение на (*))

Ако две решения на (*) имат еднакви свободни части, тогава решения съвпадат.

Това, кои неизвестни са свободни зависи от базисния минор Δ.

Броят на свободните неизвестни е $= n - rg(A)$

Линейни пространства

V_n - линейно пространство

Матрицата

λa

$\lambda \neq 0 \quad \lambda^{-1}$

$\lambda a = \dots$

Определение: Нека F е множество, $F \neq \emptyset$, в което са дефинирани следните 2 операции.

1. За всеки два елем. $a, b \in F$ е дефинирана сумата $a+b \in F$

2. За всеки два елем. $a, b \in F$ е дефинирано произведението $ab \in F$

Казваме, че относно тези две операции F е тяло, ако са изпълнени следните условия.

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ асоциативно на „+"

(2) $a+b = b+a$ комутативно на „+"

(3) $\exists$ нулев елем. $0 \in F$, такъв че $a+0=a, \forall a \in F$

(4) Всеки елем. $a \in F$ има противоположен елем $-a \in F$, такъв че $a+(-a)=0$

(5) $(ab)c = a(bc)$ асоциативност на умножението

(6) $ab = ba$ комутативност на умножението

(7) $\exists 1 \in F$, такъв че $1a = a, \forall a \in F$

(8) $\forall$ ел. $a \in F$, $a \neq 0$ има обр. елем. $a^{-1} \in F$, такъв че $a \cdot a^{-1} = 1$

(9) $a(b+c) = ab+ac$ дистрибутивност

II.1.99

Примери: 1) $\mathbb{Q}$ е поле
2) $\mathbb{R}$ е поле
3) $\mathbb{C}$ е поле
4) $\mathbb{Z}$ не е поле

Опред. Нека $\mathcal{L}$ ~~(ел)~~ -ел $\mathcal{L} \neq \emptyset$ и F е поле. Нека в $\mathcal{L}$ са дефинирани две операции:

1) За $\forall$ два ~~опер~~ елем. $a, b \in \mathcal{L}$ е дефинирана тяхната сума $a+b \in \mathcal{L}$

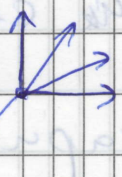
2) За $\forall \lambda \in F$ и $\forall a \in \mathcal{L}$ е дефинирано произведението $\lambda a \in \mathcal{L}$

Казваме, че относно тези операции $\mathcal{L}$ е лин. пространство в полето F, ако са изпълнени следните условия:

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\forall a, b, c \in \mathcal{L}$
2) $a+b = b+a$ $\forall a, b \in \mathcal{L}$
3) $\exists$ ~~0 ел.~~ нулев елем. $0 \in \mathcal{L}$, такъв че $a+0=a$, $\forall a \in \mathcal{L}$
4) $\forall$ ел. $a \in \mathcal{L}$ или противоположен ел. $-a \in \mathcal{L}$, такъв че $a+(-a)=0$
5) $1 \cdot a = a$
6) $\mu(\lambda \cdot a) = (\mu\lambda)a$, за $\forall \mu, \lambda \in F$ и $\forall a \in \mathcal{L}$
7) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$
8) $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$

Условията от 1 до 8 се наричат аксиоми на лин. пространства.

Примери: 1) Геометричните вектори приложени в дадена точка относно опер. събир. в АГ



лин. пространства $\mathbb{R}$

2) V_n е лин. пространство над $\mathbb{R}$. По общо, ако F е поле и ~~F_n е множ. на нар~~ $F_n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in F\}$

Това множ. F_n е лин. пространство в полето F.

3) Множеството на матриците от тип $m \times n$ с елем. от полето F е лин. пространство над полето F.

4) Множ. на всичките функции с обща дефиниционна област относно операциите от АНАЛИЗА образуват лин. пространство над $\mathbb{R}$

5) Множ. на числовите редици също е лин. простр. над $\mathbb{R}$

6) Нулево ~~елементно~~ линейно пространство над полето F

$L = \{\Theta\}$ - съдържа само нулевия елем. в себе си

$\Theta + \Theta = \Theta$

$\lambda \Theta = \Theta$, $\forall \lambda \in F$

Определение: Нека $\mathcal{L}$ е лин. простр. над полето F $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{L}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$.
Елементът $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$ се нарича лин. комбинация на ел. $a_1, \dots, a_k$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ се наричат коеф. на тази лин. комбинация.

Определение: Нека $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}$ е лин. пространство над полето F. Казваме, че $a_1, \dots, a_k$ са лин. независими, ако $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F$, от които поне едно $\lambda_i \neq 0$, такива че
$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$
Казваме, че тези вектори са лин. независими, ако от равенството $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$, където $\lambda_i \in F$. Следва, че $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

Осн. свойства за лин. зависимост и независимост, които док. за V_n, остават в сила за всяко лин. простр. Осн. лема за 2-те с-ми за вектори, също се пренася за свободно лин. пространство, тъй като док. ѝ беше направено така, че да важи за свободно лин. простр.
Макс. бр. с-ми на една с-ма се деф. по същия начин както във V_n. Осн. свойства на макс. бр. с-ми се пренася за всяко линейно простр. По същия начин както във V_n се деф. и ранг на с-ма. (+ваша на чд на с-ма от вектори остават в сила за всяко лин. пространство.

Крайномерни линейни пространства

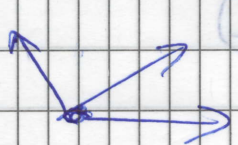
$e_1, e_2, \dots, e_n$ $\{E_{ij}\}$

Определение: Нека L е лин. пространство и $a_1, \dots, a_k$ са ел-на на L. Казваме, че $\{a_1, \dots, a_k\}$ е пораждащо множество на L, ако всеки ел-т на L е лин. комбин. на ел-та $a_1, \dots, a_k$.

Определение: Казваме, че лин. простр. L е крайномерно (лин.) пространство, от L или крайномерно пораждащо множество (ПМ). В противен случай L е безкрайномерно лин. простр., т.е. L е безкрайномерно можем да намерим вектор, който не е линейна комбинация.

Примери: 1) V_n е крайномерно лин. пр-во.
$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0 \dots 0)$
$\vdots$
$e_n = (0, 0, 0 \dots 0, 1)$
е ПМ на V_n

2) Геом. вектори приложени в дадена точка



Всеки три некомпланарни вектора образуват ПМ и поради това тогава лин. пр-во е крайномерно.

II.1.1Э3

3) Матриците от тип $m \times n$ е крайномерно лин. пр-ство понеже матр. $\{E_{ij}\}$ образуват ПМ

4) L е лин. пространство на ~~лин.~~ сочнатните числови редици са безкрайномерно

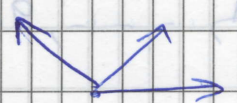
$$a_1 = (* \mid 0\,0 \ldots \mid 0 \ldots)$$
$$a_2 = (\quad * \mid 0, \ldots 0\,0, \ldots)$$
$$\vdots$$
$$a_n = (* \mid 0 \ldots \mid 0 \ldots 0 \ldots)$$
$$b = (0 \ldots 0\,1\,0 \ldots 0 \ldots)$$

Определение: Нека L е крайномерно лин. пр-ство и $a_1, \ldots, a_k$ е крайно множ. от вектори. Казваме че $a_1, \ldots, a_k$ е базис на L, ако са изп. следните условия 1) $\{a_1, \ldots, a_k\}$ е ПМ на L
2) $a_1, \ldots, a_k$ са лин. независими

Примери: 1) Във V_n $e_1 = (1, 0, \ldots 0)$
$e_2 = (0, 1, \ldots 0)$ е базис
$\vdots$
$e_n = (0, 0, \ldots 0, 1)$

2) Матрицата от тип $m \times n$ $\{E_{ij}\}$ образуват база.

3) Лин. пр-во на геометричните вектори приложени в дадена точка.



Всяка тройка некомпланарни вектори е база на това лин. пр-во.

4) Нулевото лин. пространство няма база, тъй като не е удовл. усл. (2)

Очевидно е общо, че нулевото простр. е крайномерно тъй като ~~нулевото~~ ПМ. Това е единство. крайномерно линейно ~~не~~ простр ~~няма~~ няма база. Всички други крайномерни лин. простр. имат база

10. XII. 2012 г.

$a_1, \dots, a_k$ е база

(1) $a_1, \dots, a_k$ е ПМ

(2) $a_1, \dots, a_k$ са лин-независими

Твърдение 1: Нека е крайномерно N-мерно пространство, което е ненулево. Тогава $\mathcal{L}$ има база. По-точно, ако $a_1, \dots, a_k$ е пораждащо множество (ПМ), тогава всяка МЛНП на $\{a_1, \dots, a_k\}$ е база

Доказателство: Нека $a_1', \dots, a_\ell'$ е МЛНП на $\{a_1, \dots, a_k\}$.

$a_1', \dots, a_\ell'$ е база.

Трябва да док, че $a_1', \dots, a_r'$ е ПМ.

Нека $a \neq 0$ е произв. вектор, тогава a е лин. комбин. на $a_1, \dots, a_m$.
От свойствата на МЛНП на $\{a_1, \dots, a_m\}$ имаме, че всеки от векторите $a_1, \dots, a_m$ е лин. комбин. на векторите $a_1', \dots, a_r'$

~~Следствие:~~ $\Rightarrow a_1', \dots, a_r'$ е ПМ
$\Rightarrow a_1', \dots, a_r'$ е база, защото още са лин. независими)

Твърдение 2: Нека L е крайномерно нулево лин. пространство. Тогава всеки 2 бази в L имат равен брой вектори.

Доказателство: $\{a_1, \dots, a_s\}$, $\{b_1, \dots, b_k\}$ 2 бази в L
Да док, че $s=k$. Понеже всеки вектор от едната база е лин. комби. на другата и обратното $\Rightarrow \text{rg}\{a_1, \dots, a_s\} = \text{rg}\{b_1, \dots, b_k\}$
Но $a_1, \dots, a_s$ са лин. незав. $\Rightarrow \text{rg}\{a_1, \dots, a_s\} = s$
$b_1, \dots, b_k$ са лин. незав. $\Rightarrow \text{rg}\{b_1, \dots, b_k\} = k$
$\Rightarrow s=k$

Размерност на лин. пространство

Определение: Нека L е крайномерно ненулево лин. пространство. Броят на векторите в коя да е база на L наричаме **размерност** на L и ще я означаваме с $\dim L$.

Ако L е нулево лин. пространство, тогава размерността на L: $\dim L = 0$.

Примери: 1) Лин. пр-во L на геометр. вектори, приложени в дадена точка.

Всяка тройка некомпланарни вектори е база $\Rightarrow \dim L = 3$.

2) V_n $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ } е база

$\dim V_n = n$

3) Лин. пр-во L на матриците от тип $m \times n$

$\{E_{ij}\}$ е база

$m \times n$ - брой

$\dim L = m.n$

Твърдение 3: Нека L е лин. пространство с размерността на $L = n$. Тогава всеки $n+1$ вектора в L са лин. зависими.

Доказателство: Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на L
Иначе $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$

(A) $a_1, \dots, a_{n+1}$
(B) $e_1, \dots, e_n$

Понеже (B) е базис, всеки ел. от (A) е лин. комби на (B). Векторите в (A) са повече и съгл. осн. лема: за 2те системи вектори $a_1, \dots, a_{n+1}$ са л.н. зависими

Твърдение 4: Нека L е лин. пр-во
~~Разм~~ $\dim L = n$ и $a_1, \dots, a_n \in L$
Ако $a_1, \dots, a_n$ са ЛНЗ, тогава $a_1, \dots, a_n$ е базис.
a_1, a_2, a_3 е базис
a_3, a_2, a_1 е друг базис

Доказателство: $a_1, \dots a_n$ са ~~ЛНЗ~~ е ПМ?
Нека $a \in L$ $\underbrace{a_1, \dots, a_n, a}_{n+1}$ съгл. ТВ.3
$a_1, \dots, a_n, a$ са ЛЗ, но $a_1, \dots, a_n$ са ЛНЗ
$\Rightarrow a$ е лин. комбин. на $a_1, \dots, a_n$
$\Rightarrow a_1, \dots, a_n$ е ПМ $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$ е базис

Твърдение 5: Нека L е лин. пр-во, $\dim L = n$ и $a_1, \dots, a_n \in L$. Ако $a_1, \dots, a_n$ е ПМ, тогава $a_1, \dots, a_n$ е база

Доказателство: Съгласно ТВ. 6 $\dim L = rg\{a_1, \dots, a_n\} = n \Rightarrow rg\{a_1, \dots, a_n\} = n \Rightarrow a_1, \dots, a_n$ са ЛНЗ.

Твърдение 6: Нека L е ~~лин~~ крайномерно ненулево лин. пр-во и $a_1, \dots, a_k$ е ПМ на L. Тогава $\dim L = rg\{a_1, \dots, a_k\}$

Доказателство: Нека $a_1', \dots, a_r'$ е МЛНП на $\{a_1, \dots, a_k\}$. Тогава $rg\{a_1', \dots, a_r'\} = r$. Съгласно ТВ. 1 $a_1', \dots, a_r'$ е база на $L \Rightarrow \dim L = r$

Координати

Сравняване на векторите с координати

$\dim L = n$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ е база на L

Нека $x \in L$. Тогава (*) $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$

Твърдение 1: Разлагането ~~на~~ (*) е единствено

Доказателство: Нека освен (*) имаме и друго равенство (**) $x = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

$\Rightarrow 0 = (\xi_1 - \mu_1) e_1 + (\xi_2 - \mu_2) e_2 + \dots + (\xi_n - \mu_n) e_n$

Понеже $e_1, \dots, e_n$ са ~~лин~~ ЛНЗ $\Rightarrow \xi_1 - \mu_1 = \xi_2 - \mu_2 = \dots = \xi_n - \mu_n = 0$, т.е. $\xi_1 = \mu_1, \xi_2 = \mu_2, \dots, \xi_n = \mu_n$

$\Rightarrow$ (*) и (**) съвпадат

Числата $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ от (*) се наричат координати на x в базиса $e_1, \ldots, e_n$

(Съгл. Т.е. 1 коорд. на x в базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ са опред. еднозначно $\Rightarrow$ понятието координати е напълно коректно понятие.

В друг базис x ще има други координати, единствен. изкл. тривиал нулевия вектор който във всеки базис има координати 0.

$0 = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_n$, в базис $e_1, \ldots, e_n$

Пресмятане на ранга на с-ма вектори чрез координатите

L е лин. пр-ство.

$\dim L = n$

$e_1, \ldots, e_n$ е базис

$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$

$y = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$

$\Rightarrow$ (*) $x + y = (\xi_1 + \mu_1) e_1 + \ldots + (\xi_n + \mu_n) e_n$

$\lambda x = (\lambda \xi_1) e_1 + (\lambda \xi_2) e_2 + \ldots + (\lambda \xi_n) e_n$

$\Rightarrow$ че е верно следното твърдение

Твърдение 2: Ако x има координати $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и y има коорд. $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$.

Тогава: (1) $x+y$ има коорд. $(\xi_1+\mu_1, \xi_2+\mu_2, \ldots, \xi_n+\mu_n)$

(2) λx има коорд. $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$

Твърдение 3: Нека $\mathcal{L}$ е лин. пр-ство; $\dim \mathcal{L} = n$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис. Нека имаме с-ма вектори

$a_1 = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots + \xi_{1n} e_n$

$a_2 = \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \ldots + \xi_{2n} e_n$

$\vdots$

$a_k = \xi_{k1} e_1 + \xi_{k2} e_2 + \ldots + \xi_{kn} e_n$

$\operatorname{rg}\{a_1, \ldots, a_k\}$ чрез коорд.

Нека

$$M = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \ldots & \xi_{kn} \end{pmatrix}$$

Матрица от коорд. на $a_1, \ldots, a_k$

Твърдим, че $\operatorname{rg}\{a_1, \ldots, a_k\} = \operatorname{rg}(M)$

Доказателство: Разглеждаме вектор $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ (произв. лин. комбин. на $a_1, \ldots, a_k$)

Коорд. на $\lambda_1 a_1$ са $(\lambda_1 \xi_{11}, \lambda_1 \xi_{12}, \ldots \lambda_1 \xi_{1n}) = \lambda_1 (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$\lambda_2 a_2$ са $\lambda_2 (\xi_{21}, \xi_{22}, \ldots \xi_{2n})$

$\vdots$

$\lambda_k a_k$ са $\lambda_k (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{kn})$

Съгласно (2) от т. 1

От (1) на т. 2 имаме

$$(\#) \begin{cases} x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \\ \text{има коорд.} \\ \lambda_1 (\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots \xi_{1n}) + \ldots + \lambda_k (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots \xi_{kn}) \end{cases}$$

$\text{rg}\{a_1, \ldots, a_k\} = \text{rg}(M)$?

От (#), че $a_1, \ldots a_k$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow$ съответните им редове в (M) са ЛНЗ.
Същото е вярно за всяка подс-ма на $\{a_1, \ldots, a_k\}$ и съотв. и редове в M.

$\Rightarrow$ Макс. брой ЛНЗ вектори, които можем да изберем из между $\{a_1, \ldots, a_k\}$ е равен на макс. брой ЛНЗ редове на (M), което дом. равенство.
$\text{rg}\{a_1, \ldots, a_k\} = \text{rg}_{\text{ред}}(M) = \text{rg}(M) \Rightarrow \text{rg}\{a_1, \ldots, a_k\} = \text{rg}(M)$

Следствие: Нека $e_1, \ldots, e_n$ е базис и нека

$$a_1 = \xi_{11} e_1 + \ldots + \xi_{1n} e_n$$
$$a_2 = \xi_{21} e_1 + \ldots + \xi_{2n} e_n$$
$$\vdots$$
$$a_n = \xi_{n1} e_1 + \ldots + \xi_{nn} e_n$$

$$M = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \ldots & \xi_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Твърдим, че $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е базис $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$
Доказателство: 1) Нека $a_1, \ldots, a_n$ е базис $\Rightarrow$
$\Rightarrow a_1, \ldots, a_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ съгл. Т6.3 редовете на M са ЛНЗ $\Rightarrow \det M \neq 0$. ~~Нека $\det(M) \neq 0$~~

2) Нека $\det(M) \neq 0$, тогава редовете на M са ЛНЗ. От Т6.3 $\Rightarrow$ векторите $a_1, \ldots, a_n$ са ЛНЗ тъкмо и е размерността $n = \dim \mathcal{L} \Rightarrow$ $a_1, \ldots, a_n$ е базис.

Преобразуване на координатите при смяна на базис

$\dim L = n$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ } 2 базиса
$e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ }

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n \quad (1)$$
$$x = \xi_1^* e_1^* + \ldots + \xi_n^* e_n^*$$

$$e_1^* = \tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_2 + \ldots + \tau_{1n} e_n$$
$$e_2^* = \tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \ldots + \tau_{2n} e_n$$
$$\vdots$$
$$e_n^* = \tau_{n1} e_1 + \tau_{n2} e_2 + \ldots + \tau_{nn} e_n$$

Матрицата

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрица на прехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ към базис $e_1^*, \ldots, e_n^*$

Следователно $\det(T) \neq 0$, т.е. $\exists T^{-1}$

$$(2)\quad x = \xi_1^* e_1^* + \ldots + \xi_n^* e_n^* = \xi_1^*(\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_2 + \ldots + \tau_{1n} e_n) +$$
$$+ \xi_2^*(\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \ldots + \tau_{2n} e_n) +$$
$$+ \ldots + \xi_n^*(\tau_{n1} e_1 + \tau_{n2} e_2 + \ldots + \tau_{nn} e_n) =$$
$$\vdots$$
$$= (\tau_{11}\xi_1^* + \tau_{21}\xi_2^* + \ldots + \tau_{n1}\xi_n^*) e_1 +$$
$$+ (\tau_{12}\xi_1^* + \tau_{22}\xi_2^* + \ldots + \tau_{n2}\xi_n^*) e_2 + \ldots +$$
$$+ (\tau_{1n}\xi_1^* + \tau_{2n}\xi_2^* + \ldots + \tau_{nn}\xi_n^*) e_n$$

От единствеността на разлагането в базиса $e_1, e_2, \dots, e_n \Rightarrow$ (1) и (2) съвпадат

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_{11}\xi_1^* + \tau_{21}\xi_2^* + \dots + \tau_{n1}\xi_n^* \\ \xi_2 = \tau_{12}\xi_1^* + \tau_{22}\xi_2^* + \dots + \tau_{n2}\xi_n^* \\ \vdots \\ \xi_n = \tau_{1n}\xi_1^* + \tau_{2n}\xi_2^* + \dots + \tau_{nn}\xi_n^* \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \dots & \tau_{n1} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \dots & \tau_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{1n} & \tau_{22} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$$

$\exists\, T^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \underbrace{T^{-1}T}_{E}\begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

17.XII.2012г. Подпространства на линейно пространство

Определение: Нека L е лин. пр-во над полето F и $L_1 \subseteq L$, $L_1 \neq \emptyset$. Казваме, че L_1 е подпр-во на L, ако са изпълнени следните условия:

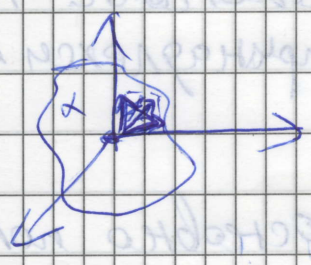
1) Ако $a, b \in L_1$, тогава $a+b \in L_1$
2) Ако $a \in L_1$, тогава $\lambda a \in L_1$, $\forall \lambda \in F$

Пример:

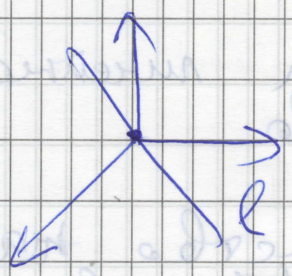
(1) Нулевият елемент сам по себе си е подпр. нулево подпространство
Даденото пр-во L също е подпр-во несобственото подпр-во на L

Ако L лин пр-во, тогава собств подпр-ва, то е 1 или 0

(2) Лин. пр-во на геометр. вектори приложени в дадена точка



L - равнина минаваща през прил. точка
L_1 е лин пр-во на векторите в равн. L
L_1 е подпр-во



L_2 – ~~пр~~ подпространство

Да се док., че освен L_1 и L_2 няма други 2 подпространства.

3) В лин пр-ство на квадратните матрици от n-ти ред

- триъгълни матр от даден вид (Δ) ($\backslash 0$)
- диагонални матр.
- скаларни матр.

4) L е лин. простр. на функциите в $[a, b]$
- ~~перпенд~~ непрекъснатите функции
- функциите, които имат производни

Свойства:

Твърдение 1: Нека L е лин пр-ство и L_1 е подпр-ство. Ако $a_1, \ldots, a_k \in L_1$ са елем. на L_1, тогава $\forall$ лин. комбин. на $a_1, \ldots, a_k$ ~~също~~ също принадлежи на L_1

Док: Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ (основно поле)

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_1 \in L_1 \\ \lambda_2 a_2 \in L_1 \text{ съгл.(2)} \\ \vdots \\ \lambda_k a_k \in L_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \in L_1 \text{ съгл.(1)}$$

От §1 и §2) става ясно, че L_1 наследява операциите на L

Твърдение 2: Относно наследените опр. от L всяко подпр-ство на L е лин. пространство

Док: Нека L_1 е подпр-ство. Трябва да докаже подпр-ството са изп. всички аксиоми на лин. пространство. Това е очевидно за 4 аксиоми, с изкл. на 3 и 4.

$a+b=b+a$

Понеже L_1 не е празно множество $L_1 \neq \emptyset$
$\exists\, a \in L_1$, тогава $\lambda a \in L_1 \ \forall \lambda$
$\lambda = 0 \Rightarrow 0\,a \Rightarrow \in L_1$
$0 \in L_1$
Ако $a \in L$, тогава $\lambda a \in L_1$, понеже $\lambda = -1$
$(-1)\,a \in L_1$
$-a \in L_1$

Твърдение 3: Нека L_1 - крайномерно лин. пр-ство и L_1 е подпр-ство на L. Тогава L_1 също е крайномерно и $\dim L_1 \leq \dim L$
Док: Нека $\dim L = n$, тогава $\forall n+1$ вектора от L са лин-зависими $\Rightarrow \forall n+1$ вектора в L_1 също са лин-зависими
$\Rightarrow \dim L_1 \leq \dim L$

Линейна обвивка на система от вектори

Определение: Нека L е лин. пр-во и $a_1, \ldots, a_k \in L$. Множ. на всички лин. комбинации на $a_1, \ldots, a_k$ наричаме лин. обвивка на $a_1, \ldots, a_k$ и го бележим с $L(a_1, \ldots, a_k)$

Твърдение 1: $L(a_1, \ldots, a_k)$ е подпр-во на лин. пространството L.

Док: Ясно е, че сумата на 2 лин. комбинации на $a_1, \ldots, a_k$ е лин. обвивка и като умножим една лин. комбинация на вектори и получаваме елемент на лин. обвивката.

$\Rightarrow L(a_1, \ldots, a_k)$ е подпространство

Тв. 2: Верният равенството е, че $\dim L(a_1, \ldots, a_k) = \operatorname{rg}\{a_1, \ldots, a_k\}$

Док: Ясно е, че $a_1, \ldots, a_k$ е пораждащо множество на $L(a_1, \ldots, a_k)$ - лин. обвивка и поради това равенството е вярно.

Сечение и сума на подпространства

Твърд. 1: Сечението на подпр-ва на даденo лин. пр-во също е подпростр.

Док: Достатъчно е докаж. за сечението на 2 подпространства.

Нека L_1 и L_2 са подпр-ва и разгл. $\tilde{L} = L_1 \cap L_2$

$0 \in L_1 \Rightarrow 0 \in L_1 \cap L_2$ т.е. $\tilde{L} \neq \emptyset$
$0 \in L_2$

Нека $x, y \in \tilde{L}$, тогава $x \in L_1$ и $y \in L_1 \Rightarrow x+y \in L_1$ (защото L_1 е подпр-во)

$x \in L_2, y \in L_2 \Rightarrow x+y \in L_2$ (———)

$x+y \in \tilde{L}\ (L_1 \cap L_2)$

Ако $x \in \tilde{L}$, тогава $x \in L_1 \Rightarrow \lambda x \in L_1$
$\Rightarrow$
$x \in L_2, \Rightarrow \lambda x \in L_2$

$\Rightarrow \lambda x \in L_1 \cap L_2 = \tilde{L}$

Определение: Нека $L_1, L_2, \ldots, L_k$ са подпр-ства на L. Сума $L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ на тези подпр-ства наричаме множ. от всички елем. $x \in L$, които може да се запишат във вида

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \qquad \begin{array}{l} x_1 \in L_1 \\ x_2 \in L_2 \\ \vdots \\ x_k \in L_k \end{array}$$

Забележка: Сумата е разл. от обедин.

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_k \neq \bigcup_{i=1}^{k} L_i$$

Твърдение 2: Сумата на краен брой подпр-ства също е подпространство

Док: Разглеждаме $L_1, \ldots, L_k$ подпростр. на L

$$\theta = \underset{\in L_1}{\theta} + \underset{\in L_2}{\theta} + \ldots + \underset{\in L_k}{\theta} \Rightarrow \theta \in L_1 + L_2 + \ldots + L_k$$

$$\Rightarrow L_1 + L_2 + \ldots + L_k \neq \emptyset$$

Нека $x, y \in L_1 + \ldots + L_k$

$$\left.\begin{array}{l} x = \underset{\in L_1}{x_1} + \ldots + \underset{\in L_k}{x_k} \\ y = \underset{\in L_1}{y_1} + \ldots + \underset{\in L_k}{y_k} \end{array}\right\} x + y = \underset{\in L_1}{(x_1 + y_1)} + \ldots + \underset{\in L_k}{(x_k + y_k)}$$

първата проверка е направена

$$x + y \in L_1 + \ldots + L_k$$

$\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots + \lambda x_k$

$\lambda x \in L_1 + \dots + L_k$

$\Rightarrow L_1 + L_2 + \dots + L_k$ е подпространство

Примери:

$\dim(L_1 + L_2)$

Лема: Нека L е крайномерно лин. пр-во. Тогава всяка ЛНЗ с-ма от вектори в L, може да се разшири до база на L

Доказателство: Нека $a_1, \dots, a_k$ са ЛНЗ.

Ако $a_1, \dots, a_k$ е ПМ на L, тогава $a_1, \dots, a_k$ е база и $a_1, \dots, a_k$ е търсеното разширение.

Нека $a_1, \dots, a_k$ не е ПМ на L. Тогава $\exists a_{k+1} \in L$, който не е лин. комбинация на $a_1, \dots, a_k$

Сега по-рано доказано свойство

$\Rightarrow a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ са ЛНЗ

Ако $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ е ПМ на L, тогава $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ е търсената база.

Иначе $\exists a_{k+2}$, който не е лин. комбинация на $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$

и т.н.

$\Rightarrow a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$
лин. незав. е-мите от векторите ч/тн.

тъй като L е крайномерно лин. пр-ство ще достигнеме до търсения базис

Нека L е лин. пр-ство и L_1 и L_2 са крайномерни подпр-ства на L, тогава $L_1 + L_2$ също е крайномерно подпр-ство и е вярно равенството, че ~~размерност~~

$$\boxed{\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Доказателство: Нека $\dim(L_1 \cap L_2) = m$ и
(A) $e_1, \ldots, e_m$ е базис на $L_1 \cap L_2$
Нека $\dim L_1 = p$ и разширяваме (A) до базис на L_1 (това е възможно съгл. лемата)

(B) $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_p$ е базис на L_1
разширяваме също базиса (A) до базис на L_2
Ако $\dim L_2 = q$, тогава имаме

(C) $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, f_q$ базис на L_2
и разглеждаме

(D) $\underbrace{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_p, f_{m+1}, \ldots, f_q}_{p+q-m}$

$\boxed{\text{(D) е базис на } L_1 + L_2 \text{ ?!}}$

II 1.122

Защо $(\mathcal{D})$ е ПМ на $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$?

Нека $x \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, тогава $x = x_1 + x_2$
$\in \mathcal{L}_1$ $\in \mathcal{L}_2$

От $x_1 \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow x_1$ е лин. комбин. на векторите от $(\mathcal{B})$
От $x_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow x_2$ е лин. комбин. на векторите от $(\mathcal{C})$
Следов. $x = x_1 + x_2$ е лин. комбин. на векторите от $(\mathcal{A})$

$\Rightarrow (\mathcal{D})$ е ПМ на $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$
$\Rightarrow \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ е краен.

Защо $(\mathcal{D})$ е лин. независима система?

Да допуснем, че $\underbrace{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m + \lambda_{m+1} e_{m+1} + \dots + \lambda_p e_p}_{x} + \mu_{m+1} f_{m+1} + \dots + \mu_q f_q = 0$ (*)

Полагаме: (1) $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p$
Понеже $\mathcal{L}_1$ е подпр-во и $e_1, \dots, e_p \in \mathcal{L}_1$
$\Rightarrow x \in \mathcal{L}_1$
От (*) виждаме, че (2) $x = -\mu_{m+1} f_{m+1} - \dots - \mu_q f_q \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \mathcal{L}_2$

Имаме, че $x \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ~~Съгл. (A) $\Rightarrow$~~ (3) $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_m e_m$
(Съгл. (B) $\Rightarrow$ (3) $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_m e_m$
От (2) и (3) $\Rightarrow \xi_1 e_1 + \dots + \xi_m e_m + \mu_{m+1} f_{m+1} + \dots + \mu_q f_q = 0$, но $e_1, \dots, e_m, f_{m+1}, \dots, f_q$ са ЛНЗ $\Rightarrow \mu_{m+1} = \dots = \mu_q = 0$

Т. 1.123

Заместваме в (*)
$\Rightarrow \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m + \dots + \lambda_p + e_p = \Theta$, но
$e_1, \dots, e_p$ също са лин. ~~комбинезависими~~ независими
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

Доказахме, че (2) е лин. независима с-ма
$\Rightarrow (2)$ е база на $L_1 + L_2$

$$\Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = \underbrace{p}_{=\dim L_1} + \underbrace{q}_{=\dim L_2} - \underbrace{m}_{=\dim(L_1 \cap L_2)}$$

Следствие: Нека L е лин. пр-во, което е крайномерно и L_1 и L_2 са подпр-ва на L. Тогава
$\dim L \geq \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$

Доказателство: Понеже $L_1 + L_2$ е подпр-во
$\dim L \geq \underline{\dim(L_1 + L_2)}$

Пример: 1) Нека $\dim L = 3$, $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$
От следствието получаваме: $3 \geq 2 + 2 - \dim(L_1 \cap L_2)$
$\Rightarrow \underline{\dim(L_1 \cap L_2) \geq 1}$

2) $\dim L = 8$, $\dim L_1 = 7$, $\dim L_2 = 6$

$8 \geq 13 - \dim(L_1 \cap L_2)$

$\dim(L_1 \cap L_2) \geq 5$

Хомогенни линейни системи

$$(\#)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

С-мите от вида (#) се наричат хомогенни лин. с-ми $(b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0)$

Хомогенните лин. с-ми винаги имат разширение, например $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ Това решение наричаме нулево решение на (#).

Ненулево решение, е такова, че поне едно $x \neq 0$.

Поради това, че за съвместност $(\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\bar{A}))$ е нужно да проверяваме. Поради това, критериите за определеност и неопределеност от общата теория на с-мите тук изглеждат по-просто.

11.1125

Твърдение 1: С-мата (#) е определена, т.е. има само нулево решение, тогава и само тогава, когато $rg(A') = n$ - бр. неизвестните
A е матрицата на (#).

Твърдение 2: С-мата (#) е неопределена $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow rg(A) < n$ - бр. на неизвестните

Следствие 1: Ако $m = n$, т.е. (#) е квадратна, тогава с-мата, с която се занимаваме е неопределена, т.е. има ненулеви решения $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

Доказателство:
$rg(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$

Следствие 2: Ако в тази с-ма (#), $m < n$, тогава (#) има ненулево решение.
$\Rightarrow$ Имаме $rg(A) < n < m \Rightarrow$ с-мата (#) е неопределена

Нека V' е множеството на решенията на (#). Ясно е, че $V' \subseteq V_n$

Теорема 1: Множеството на решенията V' на с-мата (#) е подпр-во на V_n.
Доказателство:
1) $\Theta = (0, \dots, 0) \in V' \Rightarrow V' \neq \emptyset$
2) Нека $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V'$
$b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in V'$

$a + b \in V'$?

Имаме, че $a_i = \alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0$
$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0$ $i = 1, 2, \dots, m$

$\Rightarrow a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = 0$
$i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) \in V'$

$a_{i1}(\lambda\alpha_1) + a_{i2}(\lambda\alpha_2) + \dots + a_{in}(\lambda\alpha_n) = 0$

$\Rightarrow \lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n) \in V'$

Теорема 2: Нека V' е подпр-ството на решенията на (#). Тогава $\dim V' = n - rg(A)$, където $rg(A)$ е матрицата на (#)

Доказателство:

I) $rg(A) = 0$, т.е. $A = 0$ в този случай $V' \equiv V_n$
$\Rightarrow \dim V' = n$
Понеже $rg(A) = 0$ равенството е вярно.

II) $rg(A) = n$ с-мата е определена $\Rightarrow V' \in \{0\}$
$\Rightarrow \dim V' = 0$, понеже $rg(A) = n$ д.г. на равенствата са равенства на 0 и е доказано, че е изпълнено.

III) $1 \le rg(A) < n$ Нека $rg(A) = r$ и Δ е базисна матрица от r-ти ред.

т.е. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ (#) е еквивал. на следната

$$(\#\#)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

където $x_{r+1}, \dots, x_n$ са свободни неизв.

dim V базис в V'

С A_{r+1} озн. решението на (#), което се получава при $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$

т.е. $A_{r+1} = (* \mid \underset{r+1}{1}\ 0\ \dots\ 0)$

където (*) се получава от (##) при $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$, откъдето $a_{r+1} \in V'$

С A_{r+2} озн. решението на с-мата (#), което се получава при $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = 0, \dots, x_n = 0$, т.е. $A_{r+2} = (* \mid \underset{r+1}{0}\ 1\ 0\ \dots\ 0)$,

където (*) се пресмята от (#) при $x_{r+2} = 1$ и останалите нули $A_{r+2} \in V'$ и т.к.

С A_n озн. решението на (#), което се получава при $x_{r+1} = \dots = x_{n-1} = 0, x_n = 1$

т.е. $A_n = (* \mid 0\ \dots\ 0\ 1)$

$\downarrow x_n$

където (*) се пресмята от (#) при $x_{r+1} = \dots = x_{n-1} = 0$ и $x_n = 1$

$A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_n$ са базис на V'?

Да допуснем, че $A_{r+1}, \ldots, A_n$ са лин. зависими, точава ще бъдат ЛЗ и тежните свободни части, т.е. излиза че

$$\left.\begin{array}{l}(1, 0, \ldots, 0) \in V_{n-r} \\ (0, 1, \ldots, 0) \in V_{n-r} \\ \vdots \\ (0, 0, \ldots, 1) \in V_{n-1}\end{array}\right\}$$ са ЛЗ, което е противоречие

$A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_n$ са ЛЗ

Защо $A_{r+1}, \ldots, A_n$ са ПМ на V'?

Нека $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_r, \overline{y_{r+1}, \ldots, y_n})$ е решение на (#), т.е. $Y \in V'$

Разглеждаме $B = y_{r+1}A_{r+1} + y_{r+2}A_{r+2} + \ldots + y_nA_n$

Понеже V' е подпр-ство $A_{r+1}, \ldots, A_n \in V'$
$\Rightarrow B = V'$, т.е. B е решение на (#)

$y_{r+1}A_{r+1} = (* \mid y_{r+1}\ 0 \ldots 0)$
$y_{r+2}A_{r+2} = (* \mid 0\ y_{r+2} \ldots 0)$
$\vdots$
$y_nA_n = (* \mid 0\ 0 \ldots y_n)$

$B = (* \mid y_{r+1}\ y_{r+2} \ldots y_n)$

Получихме, че B е решение на с-мата, което има същата свободна част както и Y.
$\Rightarrow B \equiv Y$.

тъй като B е лин. комбин. на (#).

A_n е базис на V' $\Rightarrow$ $\dim V' = n - rg(A)$.

~~Дефиниция:~~ Определение: Нека V' е подпростр-ството на решенията на (#). Тогава всеки базис на V' се нарича фундаментална с-ма от решения на (#).

В док. на теоремата избрахме спец. фундаментална ~~реш~~ с-ма от решения

$(1, 0, \ldots, 0)$ В общия случай

$(0, 1, \ldots, 0)$ $(*|\alpha_{1r+1} \ldots \alpha_{1n})$ → лин. незав.

$\vdots$ $(*|\alpha_{2r+1} \ldots \alpha_{2n})$ свободни части

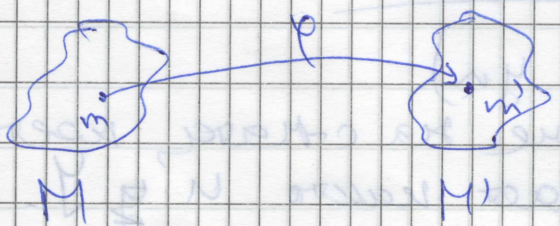
$(0, 0, \ldots, 1)$ $(*|\alpha_{rr+1} \ldots \alpha_{rn})$

Ако $B_1, \ldots, B_n - r$ е фундаментална с-ма от решенията на (#) $\in V$ тогава всяко решение на (#) ~~има~~ има вида

$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_r B_r$ – общо решение

07.X.2013г. Линейни изображения

Изображ. на множества



$M \xrightarrow{\varphi} M'$

$m \xrightarrow{\varphi} m'$

$m' = \varphi(m)$

II 1 130

φ изображава различни елем. в различни, ако $m_1 \xrightarrow{\varphi} m_1'$, $m_2 \xrightarrow{\varphi} m_2'$ и $m_1 \neq m_2$ тогава $m_1' \neq m_2'$, т.е. $\varphi(m_1) \neq \varphi(m_2)$

φ е „върху" M', ако във всеки елем. на M' се „изобразява" поне един елем. от M, т.е. ако $m' \in M'$, тогава $\exists\, m \in M$, такъв че $m \xrightarrow{\varphi} m'$

Казваме, че φ е еднозначно обратимо изображение, ако φ изобразява различни в различни и φ е „върху" M', казваме още, че φ е биективно изображение

1 – 1 изображение

Определение: Нека L и L' са лин. простр-ва над поле F. Казваме, че изображението $L \xrightarrow{\varphi} L'$ е линейно, ако са изпълнени следните две условия:

(1) ако $x, y \in L$ и $x \xrightarrow{\varphi} x'$, $y \xrightarrow{\varphi} y'$ тогава $x+y \xrightarrow{\varphi} x'+y'$, т.е. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(2) ако $x \xrightarrow{\varphi} x'$, тогава $\lambda x \xrightarrow{\varphi} \lambda x'$, $\forall \lambda \in F$, т.е. $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

Примери:

1) Нулево изображение:

$x \xrightarrow{\varphi} 0'$ (нулев елем. на Z') е лин. изображение

2) Нека Z е лин. простр-во на матриците (квадратните матр от n-ти ред)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to (a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn})$$

φ е лин. изобр. на Z в V_n

3) V_n $(\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \underset{\text{"върху"}}{\alpha_k}\ \alpha_{k+1}\ \dots\ \alpha_n) \xrightarrow{\varphi} (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$

$1 \le k \le n$

φ е лин. изобр. на V_n върху V_k

Основни свойства на линейните изображ.

Св 1: Лин. изображ. изобразяват лин. комбин. в съответна лин. комбин, в смисъл ще ако φ е лин. изображение

$a_1 \xrightarrow{\varphi} a_1'$

$a_2 \xrightarrow{\varphi} a_2'$

$\vdots \qquad \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k \xrightarrow{\varphi}$

$a_k \xrightarrow{\varphi} a_k' \xrightarrow{\varphi} \lambda_1 a_1' + \lambda_2 a_2' + \dots + \lambda_k a_k'$

т-е. $\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k)$

Доп: Съгласно (2)

$\lambda_1 a_1 \Rightarrow \lambda_1 a_1'$

$\lambda_2 a_2 \Rightarrow \lambda_2 a_2'$

$\lambda_k a_k \Rightarrow \lambda_k a_k'$

Съгласно (1) $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \Rightarrow \lambda_1 a_1' + \dots + \lambda_k a_k'$

Св. 2: Линейните изображения изобразяват в нулев елемент нулев елемент

Доп: $L \Rightarrow L'$ е лин. изобр.

0 е нулев елем. на L $0'$ е нулев елем. на L'

Нека $0 \Rightarrow x$ съгласно (2)

$\lambda \cdot 0 \Rightarrow \lambda x$, $\forall \lambda \in F$ избираме $\lambda = 0$

$\underbrace{0 \cdot 0}_{0} \Rightarrow \underbrace{0 \cdot x}_{0'} \rightarrow 0 \Rightarrow 0'$

Св. 3: Ако $x \Rightarrow x'$ тогава $-x \Rightarrow -x'$

Доп: Иначе съгл. (2)

$\lambda x \Rightarrow \lambda x'$, $\forall \lambda$

избираме $\lambda = -1$

$\underbrace{(-1)x}_{-x} \Rightarrow \underbrace{(-1)x'}_{-x'}$

Св. 4: Лин. изобр. изобр. лин. зависими ~~вектори~~ вектори в лин. зависими вектори

Док: Нека $L \xrightarrow{\varphi} L'$ е лин. изобр. и $a_1, \dots, a_k \in L$ са лин. зависими, т.е. $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ и някое $\lambda_i \neq 0$

Нека $a_1 \xrightarrow{\varphi} a_1', \dots, a_k \xrightarrow{\varphi} a_k'$
$a_1', \dots, a_k'$ също са лин. зависими?

Съгл. ~~Св. 1~~ Св. 1: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k \xrightarrow{\varphi}$
$\xrightarrow{\varphi} \lambda_1 a_1' + \dots + \lambda_k a_k'$

, но $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

Съгл. Св. 2: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \xrightarrow{\varphi} 0'$
и някое $\lambda_i \neq 0$
$\Rightarrow a_1', \dots, a_k'$ са ЛЗ.

Възможно е, едно лин. изобр. ~~лин.~~ ЛНЗ вектори в ЛЗ вектори, такива са например лин. изобр. които изобр. ненулев елем. в нулев.

~~Твърд~~ Св. 5: Ако едно лин. изобр. изобразява различните елем. в различни, ~~такава~~ точава то изобразява и ~~лин.~~ ЛНЗ вектори в ~~лин. не~~ ЛНЗ вектори

II.1.134

Док: Нека $L \xrightarrow{\varphi} L'$ е лин. изображение и $a_1, \dots, a_n$ са лин. независ.

$a_1 \xrightarrow{\varphi} a_1', \dots, a_n \xrightarrow{\varphi} a_n'$

$a_1', \dots, a_k'$ са лин. независ.

Да допуснем, че $\lambda_1 a_1' + \dots + \lambda_n a_n' = \vec{0}'$

Разглеждаме $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \in L$

Свгл. св. 1

$x \xrightarrow{\varphi} \lambda_1 a_1' + \dots + \lambda_k a_n' \to \vec{0}'$

$x \xrightarrow{\varphi} \vec{0}'$ Освен това $\vec{0} \xrightarrow{\varphi} \vec{0}'$ понеже φ изобразява разл. елем. в различни. Тряба $x = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0}$ и понеже $a_1, \dots, a_n$ са лин. независ.

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow a_1', \dots, a_n'$ са лин. независими

Св. 6: Ако лин. изобр. $L \xrightarrow{\varphi} L'$ е в/у L', то-гава φ изобр. пораждащо множество на L (ПМ) в ПМ на L'

Док: Нека $a_1, \dots, a_n$ е ПМ на L

$\varphi(a_1) = a_1', \dots, \varphi(a_n) = a_n'$ е ПМ на L'

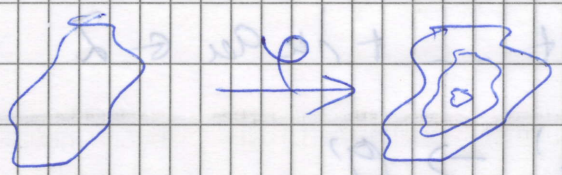
Нека $x' \in L'$ (произволен елем.)

Понеже φ е „върху" L' $\exists x \in L$, такъв че $x \xrightarrow{\varphi} x'$

Понеже $a_1, \ldots, a_n$ е ПМ на $L \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$

Съгл. св. 1 $x \xrightarrow{\varphi} \underbrace{\lambda_1 a_1' + \ldots + \lambda_n a_n'}_{x'} \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = \lambda_1 a_1' + \ldots + \lambda_n a_n' \Rightarrow a_1', \ldots a_n'$ е ПМ на L';



Нека L и L' са лин. пр-ства.

и $L \xrightarrow{\varphi} L'$ е лин. изобр.

С $Im(\varphi)$ означаваме образа на L, при изображението φ, т.е.

$Im(\varphi) = \{ x' \in L', \text{ такива че } \exists x \in L, \text{ което } x \xrightarrow{\varphi} x' \}$

$Im(\varphi) \subseteq L'$

Твърдение 1: Нека $L \xrightarrow{\varphi} L'$ е лин. изобр. Тогава $Im(\varphi)$ е подпр-ство на L'.

Доказателство: Нека $x', y' \in Im(\varphi)$, тогава ~~такива~~
$\exists x, y \in L$ такива, че $x \xrightarrow{\varphi} x'$, $y \xrightarrow{\varphi} y'$
Съгласно (1): $x + y \xrightarrow{\varphi} x' + y' \Rightarrow x' + y' \in Im(\varphi)$
Имаме, че $\lambda x \xrightarrow{\varphi} \lambda x' \Rightarrow \lambda x' \in Im(\varphi)$, $\forall \lambda$

Определение: Нека L и L' са лин. пр-ства и $\varphi: L \to L'$ е лин. изобр. Тогава $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ наричаме ранг на лин. изобр. φ и го бележим с $\mathrm{rg}(\varphi)$, т.е.

$$\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))}$$

Пример: L е лин. пр-ство на квадратна матрица от $n^{\text{-ти}}$ ред. Разглеждаме лин. изображението $L \to V_n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) = V_n \quad \mathrm{rg}(\varphi) = \dim V_n = n$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) \xrightarrow{\varphi} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) = V_k \quad \mathrm{rg}(\varphi) = \dim V_k = k$$

Твърдение 2: Нека L и L' са лин. пр-ства и $L \xrightarrow{\varphi} L'$ е лин. изобр.
Ако L е крайномерно лин. пр-ство, тогава и образът е крайномерно лин. пр-ство.
По точно, ако $a_1, \ldots, a_k$ е ПМ на L, тогава $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)$ е ПМ на $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Доп: Ако φ е лин. изобр. на L в/у $Im(\varphi)$ образа.

Съгл. св.6: φ изобр. ПМ на L в ПМ на L', т.е. $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)$ е ПМ на $Im(\varphi)$

Следствие: Нека $L \to L'$ е лин. изображение. $\dim L = n$ и $e_1, \dots, e_n$ е базис на L. Тогава $rg(\varphi) = rg\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$

Док: Съгласно Тв.2: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ е ПМ на $Im(\varphi) \Rightarrow \dim(Im(\varphi)) = rg\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$
$= rg(\varphi)$

~~Твърдение 3:~~ Определение: Нека L и L' са лин. пр-ства и $L \to L'$ е лин. изображение. Множ. на всички вектори от L, които φ изобразява в нулеви вектори на L' се нарича ядро на φ и се бележи с $Ker(\varphi)$ т.е. $Ker(\varphi) = \{x \in L : x \to \Theta'$ (нулев елем. на $L')\}$
$Ker(\varphi) \subseteq L$

Твърдение 3: $Ker(\varphi)$ е подпр-во на L.
Док: Нека $x, y \in Ker(\varphi)$, тогава
$x \to \Theta'$, $y \to \Theta'$

$x + y \xrightarrow{\varphi} \Theta' + \Theta' = \Theta' \Rightarrow x + y \in Ker(\varphi)$

$\lambda x \xrightarrow{\varphi} \lambda \underbrace{\Theta'}_{\Theta'} \Rightarrow \lambda x \to \Theta' \Rightarrow \lambda x \in Ker(\varphi)$

Защо $Ker(\varphi) \neq \emptyset$, защото $\mathcal{O} \overset{\varphi}{\mapsto} \mathcal{O}'$
$\Rightarrow \mathcal{O} \in Ker(\varphi) \Rightarrow Ker(\varphi) \neq \emptyset$

Определение: $\dim(Ker(\varphi))$ се нарича дефект на лин. изобр. φ и се бележи с дефект(φ)

Пример: $\mathcal{L}$ е лин. пр-во на квадр. матр. от $n^{\text{-ти}}$ ред и $\mathcal{L} \overset{\varphi}{\mapsto} \mathcal{L}_n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\mapsto} (a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn})$$

$$Ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

дефект$(\varphi) = n^2 - n$

Теорема: Нека $\mathcal{L}$ е крайномерно лин. пр-во и $\mathcal{L} \overset{\varphi}{\mapsto} \mathcal{L}'$ е лин. изобр. Тогава е вярно равенството:
$\dim \mathcal{L} = rg(\varphi) + $ дефект(φ)

Изоморфизъм на лин. пр-во

Определение: Нека $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ са лин. пр-ства и $\mathcal{L} \overset{\varphi}{\mapsto} \mathcal{L}'$ е лин. изображение.
Казваме, че φ е изоморфизъм м/у $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$, ако допълнително φ е 1-1 изображение м/у $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$

Казваме, че лин. изобр. Z и Z' са изоморфни, ако н/у тях може да се построй изображение, което е изоморфизъм

Пример: Z е лин. пр-ство на диагоналните матрици от n-ти ред, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} (a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn})$$

$$Z \xrightarrow{\varphi} V_n$$

φ изобразява Z върху V_n. Ясно е, че φ е лин. изобр. и е 1-1 изображение.

$\Rightarrow Z$ и V_n са изоморфни.

2) Z е лин. пр-ство $\dim Z = n$

$e_1, \dots, e_n$ е базис на Z : $x \in Z$

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

$$x \xrightarrow{\varphi} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in V_n$$

$Z \xrightarrow{\varphi} V_n$, φ е изоморфизъм

Теорема: Нека Z и Z' са крайномерни лин. пр-ства над полето F. Тези лин. пр-ства са изоморфни $\Leftrightarrow$ имат равни размерности, т.е.

$\dim Z = \dim Z'$

Доказателство: 1) Нека L и L' са изоморфни и $L \not\cong L'$ е изоморфизъм.

Нека $\dim L = n$ и $e_1, \dots, e_n$ е базис на L.
Понеже φ е изображение различни елем. в различни
$\Rightarrow \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ са лин. независими

Понеже, че φ е „върху" $L' \Rightarrow \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ е ПМ на L

$\Rightarrow \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ е базис на L'
$\Rightarrow \dim L' = n = \dim L$

2) Нека $\dim L = \dim L' = n$
$e_1, \dots, e_n \in L$ базис
$e_1', \dots, e_n' \in L'$ базис

Разглеждаме $x \in L$

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

$$x \xrightarrow[\text{def}]{\varphi} x' = \xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' + \dots + \xi_n e_n'$$

φ е изоморфизъм м/у L и L'?

Нека $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ и $x \neq y \Rightarrow$ някое $\xi_i \neq \mu_i$
$y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

$x \to x' = \xi_1 e_1' + \dots + \xi_n e_n'$ } понеже м/у някое
$y \to y' = \mu_1 e_1' + \dots + \mu_n e_n'$ } $\xi_i \neq \mu_i \Rightarrow x' \neq y'$

$\square$ 1.141

Нека $x' \in L'$ (произволен)

$x' = \xi_1 e_1' + \dots + \xi_n e_n'$

Разглеждаме $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$

Ясно е, че $x \Rightarrow x' \Rightarrow \varphi$ е „вярно"

Доказваме, че φ е 1-1 изображение $L \to L'$

Условия за линейност:

1)

$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$

тогава $x \xrightarrow{\varphi} x' = \xi_1 e_1' + \dots + \xi_n e_n'$

$y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

$y \xrightarrow{\varphi} y' = \mu_1 e_1' + \dots + \mu_n e_n'$

$x + y = (\xi_1 + \mu_1) e_1' + \dots + (\xi_n + \mu_n) e_n'$

$x + y \xrightarrow{\varphi} (\xi_1 + \mu_1) e_1' + \dots + (\xi_n + \mu_n) e_n' =$

$= \underbrace{(\xi_1 e_1' + \dots + \xi_n e_n')}_{x'} + \underbrace{(\mu_1 e_1' + \dots + \mu_n e_n')}_{y'}$

и получаваме, че $x + y \xrightarrow{\varphi} x' + y'$

2) $\lambda x = \lambda \xi_1 e_1 + \lambda \xi_2 e_2 + \dots + \lambda \xi_n e_n$

$\Rightarrow \lambda x \xrightarrow{\varphi} \lambda \xi_1 e_1' + \lambda \xi_2 e_2' + \dots + \lambda \xi_n e_n =$

$= \lambda \underbrace{(\xi_1 e_1' + \dots + \xi_n e_n')}_{x'}$

и получихме, че $\lambda x \xrightarrow{\varphi} \lambda x'$

$\Rightarrow \varphi$ е изоморфизъм м/у L и L'

Линейни оператори

A : A

B :

Определение: Нека L е лин. пр-ство над полето F и $L \xrightarrow{A} L$ е изображ. на L в L.

Казваме, че това изобр. е лин. оператор в лин. пространство L, ако то е линейно, т.е. $A(x+y) = A(x) + A(y)$.

$A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Лин. опер. са спец. вид лин. изобр., те имат всички свойств на лин. изобр.

$L \xrightarrow{\varphi} L'$

Примери: 1) нулев оператор $O(x) = \theta$, $\forall x \in L$

2) Тъждествен оператор $E(x) = x$, $\forall x \in L$

3) Скаларен оператор $\mathcal{H}(x) = \lambda x$ (λ е едно и също за $\forall x$)

$\lambda = 0$ $\quad O$

$\lambda = 1$ $\quad \mathcal{E}$

4) $V_n \xrightarrow{A} V_n$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) \xrightarrow{A} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0)$

k фиксираме

лин. оператор във V_n

L - лин. пр-ство на квадр. матрици от n-ти ред.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица на лин. оператори в даден базис

L, $\dim L = n$

$e_1, \ldots, e_n$ е базис

A - лин. оператор

$x \in L$, $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$

$\Rightarrow A(x) = \xi_1 A(e_1) + \xi_2 A(e_2) + \ldots + \xi_n A(e_n)$

Ако знаем $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ ние знаем и $A(x)$, т.е. лин. опер. A се определя напълно от векторите $A(e_1), \ldots, A(e_n)$

II.1.144

$A(e_1) = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1n} e_n$
$A(e_2) = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{2n} e_n$
$\vdots$
$A(e_n) = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n$

Матрицата:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \dots & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича на матрица на лин. опер. A в базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Примери на матрици:
1) нулев оператор ще има нулева матрица
2) тъждествен оператор ще има единична матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

3) Скаларен оператор – ~~ще бъде опер.~~
$H(\lambda) = \lambda x, \ \forall x$

$$H \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \; \lambda \end{pmatrix}$$

Тези оператори ~~на~~ матриците на не зависят от базис, на всички останали зависи.

Пресмятане на коорд. на образа на даден вектор

$\dim L = n$

$e_1, \dots, e_n$ е базис

A - лин. оператор

$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$

$A(x) = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$

Твърдение: $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, където A е матрицата на A в базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$A(e_1) = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1n} e_n$$

$$A(e_2) = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{2n} e_n$$

$$A(e_n) = \alpha_{n1} e_1 + \dots + \alpha_{nn} e_n$$

$$A(x) = \xi_1 A(e_1) + \xi_2 A(e_2) + \dots + \xi_n A(e_n) =$$

$$= \xi_1 (\alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1n} e_n) +$$
$$\xi_2 (\alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{2n} e_n) + \dots +$$
$$\xi_n (\alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n) =$$

$$= \underbrace{(\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \dots + \alpha_{n1}\xi_n)}_{\mu_1} e_1 +$$
$$+ \underbrace{(\alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{n2}\xi_n)}_{\mu_2} e_2 + \dots +$$
$$+ \underbrace{(\alpha_{1n}\xi_1 + \alpha_{2n}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n)}_{\mu_n} e_n$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \dots + \alpha_{n1}\xi_n \\ \mu_2 &= \alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{n2}\xi_n \\ &\vdots \\ \mu_n &= \alpha_{1n}\xi_1 + \alpha_{2n}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n \end{aligned}$$

В матричен вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Преобразуване на матрицата на лин. оператор при смяна на базиса

$\dim L = n$

$e_1, e_2, \dots, e_n$

$e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$

Лема: Нека $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ са 2 квадратни матрици от n-ти ред и матрицата

$$A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad \text{за } \forall \text{ стълб} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = B$

Доказателство: Полагаме $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$

$$\underbrace{A}_{n\times n}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times 1} = \underbrace{B}_{n\times n}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$\Rightarrow$ 1-вия стълб на A = 1-вия стълб на B

Полагаме $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0, \ldots \xi_n = 0$

$\Rightarrow$ (2-рия стълб на A) = (2-рия стълб на B)

$\dim \mathcal{L} = n$

$e_1, \ldots, e_n$ | два базиса на $\mathcal{L}$

$e_1^*, \ldots, e_n^*$ |

A е лин. опер.

Теорема: Нека лин. опер. A има в базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица A и в базиса $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ матрица A^*, тогава

$A^* = T^{-1} A . T$, където T е матрицата на прехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ към базиса $e_1^*, e_2^*, \ldots e_n^*$

$x \in \mathcal{L}$ - произволен $\quad x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$

$x = \xi_1^* e_1^* + \xi_2^* e_2^* + \ldots + \xi_n^* e_n^*$

$A(x) = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$

$A(x) = \mu_1^* e_1^* + \ldots + \mu_n^* e_n^*$

(1) $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$ където T е матрицата на прехода от (e) към (e^*)

(2) $\begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_n \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$

От (2) и (4) $\Rightarrow$ $T^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$

От (3): $T^{-1} A \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}} = A^* \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$

От (1): $T^{-1} A T \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$

Понеже ξ е произволен вектор последното равенство е изпълнено за всеки стълб $\begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix}$

Следователно $\Rightarrow T^{-1} A T = A^*$

Собствени вектори и собствени стойности на линеен оператор

Определение: Полином на променливата „x" наричаме функция от вида $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, където $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ са числа и се наричат коефи. на $f(x)$

„x" – се нарича променлива

Ако $a_n \neq 0$, казваме че $f(x)$ има степен n. Степента на $f(x) = n$ (има $\deg f(x) = n$)

Единствено полинома, на който всички коефи. са нули, няма дефинирана степен.

Нулев полином, чиито коефи. са нули

Ако α е число, тогава $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha$ се нарича стойност на $f(x)$ при $x = \alpha$

Ако $f(\alpha) = 0$, тогава α се нарича корен на $f(x)$

$f(0) = a_0$ – свободен член на полинома $f(x)$

Д. 1.150

Определение: Нека $A=(a_{ij})$ е квадратна матрица от n-ти ред и „λ" е променлива.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & \\ \dots & a_{22}-\lambda & \dots \\ \dots & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Матрицата се нарича характеристична матрица на матрицата A.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}\cdot a_{21}=$$

$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\underbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}_{\det(A)}=$$

$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\det(A).$$

Виждаме, че в този частен случай det на характеристичната матр. е квадр. тричлен на λ.

Ясно е, че в общия случай $\det(A-\lambda E)$ ще бъде полином на λ.

Определение: Нека A е квадр. матр. Детерминантата на характеристичната матр. на A се нарича характеристичен полином на A и се бележи с $f_A(\lambda)$ т.е. $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

$f_A(0) = \det(A)$

$f_A(0) =$ св. член

λ^n се получава единствено от главния диагонал (произведение на гл. диагонал)

$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) \Rightarrow$ коефициентът пред λ^n е равен на $(-1)^n \neq 0$

$\Rightarrow$ степента на $f_A(\lambda) = n$

Задача: Да се определи коефициентът пред λ^{n-1}?

Определение: Нека A и B са квадратни матрици от n-ти ред. Казваме, че тези матрици са спрегнати, ако съществува обратима матрица T, такава че $A = T^{-1} B T$

$B = T^{-1} A T$

Забележка: Съгл. доказаната теорема, матрицата в различни базиси са спрегнати.

Твърдение: Ако 2 матрици са спрегнати, тогава техните характеристични полиноми са равни.

Доказателство: $B = T^{-1}AT$

$$f_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) =$$

$$= \det(T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda E)T) =$$

$$= \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \det(T^{-1}) \cdot \underbrace{\det(A - \lambda E)}_{f_A(\lambda)} \cdot \det T =$$

$$= \underbrace{\det T^{-1} \cdot \det(T)}_{1} \cdot f_A(\lambda) = f_A(\lambda)$$

Определение: Нека λ е крайно-мерно лин. пр-во $\dim \lambda = n$ и $e_1, \dots, e_n$ е базис. Нека A е лин. опер. в λ, която в базиса $e_1, \dots, e_n$ има матрица A. Характеристичният полином на матрицата A наричаме характеристичен полином на лин. оператор A и го бележим с $f_A(\lambda)$

Тъй като матр. на един и същи лин. опер. са спрегнати съгл. твърдението, тези матрици имат един и същи характеристичен полином, така че характ. полином не зависи от базиса и е характеризиран коректно.

Определение: Нека L е лин. пр-ство и A е лин. оператор в L, казваме че вектора $u \in L$ е собствен вектор на лин. оператор A, ако:

1) този вектор е ненулев $u \neq \vec{0}$
2) $A(u) = \lambda u$, за някое $\lambda \in F$.

21.I.2013г.

Определение: Нека L е лин. простр-ство и A е линеен оператор в L. Казваме, че вектора $u \in L$ е собствен вектор на A, ако:

1) $u \neq \vec{0}$

2) $A(u) = \lambda . u$ за някое λ, от основното поле F.

λ се нарича собствена стойност на A съотв. на собствения вектор u.

Твърдение: $\forall$ собствен вектор има собствена стойност.

Доказателство: Да допуснем, че

$A(u) = \lambda . u$, $A(u) = \mu . u$

и $u \neq \vec{0}$ - Тогава $\lambda . u = \mu . u$, понеже $u \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda = \mu$.

На една собствена стойност отговарят безбройно много собствени вектори, защото ако u е собствен вектор със собствена стойност $\lambda \Rightarrow (\mu . u)$, $\mu \neq 0$ също е собствен вектор със собствена стойност λ.

Теорема: Нека V е крайномерно ненулево лин. пространство над полето F и A е линеен оператор в V. Тогава собствените стойности на A са корените на характеристичния полином $f_A(\lambda)$ на A, които принадлежат на основното поле F и само те.

$$\boxed{f_A(\lambda) = 0}$$

Доказателство: Нека $\dim V = n$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис на V
$A = (a_{ij})$ е матрицата на A в $e_1, \ldots, e_n$

1) Нека λ_0 е собствена стойност на A.
Съгласно дефиницията: $\lambda_0 \in F$
Остава да докажем, че λ_0 е корен на характеристичния полином $f_A(\lambda)$.

Нека u е собствен вектор на A със собствена стойност λ_0, т.е. $A(u) = \lambda_0 u$, $u \neq \vec{0}$

$u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$
разлагане на вектор спрямо ~~вектора~~ базиса

Стълбът от координатите на вектора $A(u)$ е:

$$A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Стълбът от координатите на вектора $\lambda_0 u$ е:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \xi_1 \\ \vdots \\ \lambda_0 \xi_n \end{pmatrix}$$

поради това от равенството:

$$A(u) = \lambda_0 u \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(2) \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = \lambda_0 \xi_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = \lambda_0 \xi_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n = \lambda_0 \xi_n \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} (a_{11}-\lambda_0)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda_0)\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda_0)\xi_n = 0 \end{cases}$$

От (3) виждаме, че $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ са решения и то нетривиални, защото $u \neq 0$ (и някое $\xi_i \neq 0$) на системата:

$$(4)\begin{cases}(a_{11}-\lambda_0)x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_0)x_2+\dots+a_{2n}x_n=0\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+(a_{nn}-\lambda_0)x_n=0\end{cases}$$

квадратна хомогенна линейна с-ма

Тъй като (4) има ненулево решение $\xi_1,\dots,\xi_n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ det на тази с-ма (4) е равна на 0.

$$\det(A-\lambda_0 E)=0$$

$$\| $$

$$f_A(\lambda_0) \Rightarrow f_A(\lambda_0)=0,$$ т.е. λ_0 е корен на $f_A(\lambda)$

Нека λ_0 е корен на $f_A(\lambda)$, т.е.

$\det(A-\lambda_0 E)=0$ и $\lambda_0\in F$

Понеже det на (4) е 0 $\Rightarrow$ тази с-ма (4) има ненулево решение $\xi_1,\dots,\xi_n$ (т.е. някое $\xi_i\neq 0$)

Понеже $\lambda_0\in F \Rightarrow$ коефф. на (4) също принадлежи на F.

Важно е, че $\boxed{\lambda_0\in F}$ $\Rightarrow$ решенията на (4) $\in F$.

В частност тези числа: $\xi_1,\dots,\xi_n\in F$.

Разглеждаме $u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$.
Понеже $\xi_1, \ldots, \xi_n \in F \Rightarrow u \in Z$

Понеже $\xi_1, \ldots, \xi_n$ са решения на (u)
$\Rightarrow \xi_1, \ldots, \xi_n$ удовлетворяват равенството (3)

От (3) $\Rightarrow$ те са изпълнени равенствата (2).

От (2) $\Rightarrow$ те са изпълнени равенството (1).

Щом доказахме, че $\xi_1, \ldots, \xi_n$ удовлетворяват равенството (1).

Лявата част на (1) дава координатите на вектора $A(u)$.
Дясната част на (1) дава координатите на вектора $\lambda_0 u$.

Поради това от (1) $\Rightarrow A(u) = \lambda_0 u$.

Понеже някое $\xi_i \neq 0 \Rightarrow u$ е ненулев
$\Rightarrow u$ е собствен вектор на A.
и λ_0 е собствена стойност.

Забележка: В първата част на доказателството, вместо да доказваме, че ако u е собствен вектор на A със собствена стойност λ_0, тогава координатите на u са ненулево решение на (u).

Във втората част на доказателството, доказахме че всяко ненулево решение на (и) дава коорд. на собствен вектор със собств. стойност λ_0.

$u \in L$ е собствен вектор със собств. стойност $\lambda_0 \Leftrightarrow$ коорд. на u са ненулево решение на системата (и).

$f_A(\lambda) = 0 \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - корени

Избираме измежду $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ тези, които принадлежат на основното поле F. И за $\forall \lambda_i \in F$ решаваме хомогенната с-ма:

$$(A - \lambda_i E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_{i \in F}$$