Задачи

Линейна алгебра

1. Векторни пространства и бази

Задача 1. Установете кое от следните множества е векторно пространство и в такъв случай намерете естествената му база и размерността му:

а) $F = \{\lambda - (\lambda+\mu)x^2 + 3\mu x^3 \in \mathbb{R}_3[x]\}$;

б) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$;

в) $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3t = 0\}$;

г) $L = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0, p'(1) = 0\}$;

д) $M = \{f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(1) = 2\}$;

е) $N = \{A = (a_{ij}) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$.

Отг.: а) F е векторно пространство, $\dim F = 2$, естествена база $f = \{f_1(x), f_2(x)\}$, $f_1(x) = 1 - x^2$, $f_2(x) = -x^2 + 3x^3$;
б) G не е векторно пространство;
в) H е векторно пространство, $\dim H = 3$, естествената база се състои от векторите $a_1(2,1,0,0)$, $a_2(0,0,1,0)$, $a_3(-3,0,0,1)$;
г) L е векторно пространство. Установяваме, че L е векторно подпространство на $\mathbb{R}_3[x]$. Нека $p(x)$, $q(x) \in L$. Очевидно $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0$. Тъй като $(p+q)'(x) = p'(x) + q'(x)$, получаваме $(p+q)'(1) = p'(1) + q'(1) = 0$. Така установихме, че сумата на два елемента на L е също елемент на L. Аналогично се доказва и че $\lambda p(x) \in L$ за произволни $p(x) \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тъй като $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, то $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. От условията $p(1) = p'(1) = 0$ следва системата: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$, чиито решения са $(a_2 + 2a_3, -2a_2 - 3a_3, a_2, a_3)$. Тогава естествената база на L се състои от полиномите: $p_1(x) = 1 - 2x + x^2$, $p_2(x) = 2 - 3x + x^3$ и следователно $\dim L = 2$.
д) M не е векторно пространство, тъй като $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 4 \neq 2$ за произволни $f(x), g(x) \in M$;
е) матриците от векторното пространство N имат вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ (симетрични матрици) и следователно $\dim N = 3$, естествената база на N се състои от матриците: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Докажете, че първите четири от полиномите на Ермит: $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = 4x^2 - 2$, $h_3(x) = 8x^3 - 12x$ образуват база на $\mathbb{R}_3[x]$ и намерете координатите на $p(x) = 8x^3 - 8x^2 - 12x - 7$ относно тази база.

Отг. $p(x) = -11h_0(x) - 2h_2(x) + h_3(x)$.

Задача 3. Докажете, че векторите $a_1(1,0,-1,-2)$, $a_2(2,1,0,-1)$, $a_3(1,2,0,4)$, $a_4(1,0,-1,0)$ образуват база на $\mathbb{R}^4$ и намерете координатите на вектора $b(3,0,0,2)$ в тази база.

Отг. $b(-4,2,-1,4)$.

Задача 4. Определете стойностите на $x \in \mathbb{R}$, за които системата от векторите $a_1(1,1,1)$, $a_2(1,1,0)$, $a_3(x^2,4,1)$ е линейно зависима.

Отг. При $x = \pm 2$ системата е линейно зависима.

2. Детерминанти

Задача 5. Пресметнете следните детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Отг.: а) 9, 0, 4ab; б) 40, 1, 2; в) -8, -3, -9, 17.

3. Обратими матрици. Намиране на обратна матрица

Задача 6. Установете дали матрицата A е обратима и в такъв случай намерете обратната ѝ матрица A^{-1}, ако:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отг.: а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Линейни преобразувания на векторни пространства. Матрица на преход между две бази. Изменение на матрицата на линейно преобразувание при смяна на базата

Задача 7. Нека $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ е база на векторното пространство V, а системата от вектори $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ е определена от

$$e_1' = e_1 + 2e_2 - 3e_3, \qquad e_2' = e_2 + e_3, \qquad e_3' = e_1 + 2e_2.$$

Докажете, че e' е база на V, намерете матрицата T на прехода от e към e' и координатите на вектора x спрямо базата e', ако $x(3, 2, -1)$ спрямо базата e.

Отг. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = (-1, -4, 4).$

Задача 8. Нека $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е изображение, което съпоставя на вектора (x, y, z) вектора:

а) $(y + z, 2x, 3x - y)$;

б) $(x, y + 1, z)$;

в) $(2x + y, x + z, 0)$;

г) (x, y, z^2);

д) $(x + y, xy, x - y)$;

е) $(x + y + z, 2(x + y + z), 3(x + y + z))$.

Установете дали f е линейно преобразувание и в такъв случай намерете матрицата му относно каноничната база $e = \{e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)\}$ на $\mathbb{R}^3$ и пресметнете ранга и дефекта му.

Отг.: а) f е линейно преобразувание, $M_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(f) = 3$, $\mathrm{def}(f) = 0$;

б) f не е линейно преобразувание;

в) f е линейно преобразувание, $M_e(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(f) = 2$, $\mathrm{def}(f) = 1$
($\ker f = \{(x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$);
г), д) f не е линейно преобразувание;

е) f е линейно преобразувание, $M_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(f) = 1$, $\mathrm{def}(f) = 2$
($\ker f = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$).

Задача 9. Нека $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ е база на векторното пространство V.

а) Проверете дали системата от вектори $e' = \{e_1', e_2', e_3'\}$, където

$$e_1' = e_1, \qquad e_2' = e_1 - e_2, \qquad e_3' = e_1 - e_2 - e_3,$$

е база на V и намерете матрицата T на прехода от e към e'.

б) Ако $b(1, -1, 2)$ относно базата e, намерете координатите на b относно базата e'.

в) Нека f е линейно преобразувание на f, определено от

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3, \qquad f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3, \qquad f(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3.$$

Намерете матрицата на f базата e и координатите на образа $f(b)$ на b чрез f.

г) Намерете матрицата на f в базата e'.

Отг.: а) матрицата на прехода T от e към e' има вида $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det T = 1 \neq 0$, следователно e' също е база на V;

б) $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тогава координатите на b спрямо базата e' получаваме от $T^{-1}b$, т. е. $b(0,3,-2)$ относно e';

в) $A = M_e(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(b) = Ab = (3,1,4)$;

г) $M_{e'}(f) = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Нека f е линейно преобразуване на $\mathbb{R}_3[x]$, определено чрез

$$f\big(p(x)\big) = p(x) - (x+1)p'(x), \quad p(x) \in \mathbb{R}_3[x].$$

Намерете:

а) матрицата на f относно каноничната база на $\mathbb{R}_3[x]$.

б) аналитичното представяне на f.

в) $f\big(p(x)\big)$ за $p(x) = -3 + 2x + 5x^2 - 7x^3$.

г) ранга и дефекта на f, като посочите по една база на $\ker f$ и $\mathrm{im} f$.

Отг.: а), б) $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, аналитичното представяне на f е следното
$f : (a_0, a_1, a_2, a_3) \to (a_0 - a_1, -2a_2, -a_2 - 3a_3, -2a_3)$, $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $f(p(x)) = (-5, -10, 16, 14)$, т. е. $f(p(x)) = -5 - 10x + 16x^2 + 14x^3$;

г) $\mathrm{rg}(f) = 3$, една база на $\mathrm{im} f$ се състои например от полиномите 1, $-2x - x^2$, $-3x^2 - 2x^3$, $\mathrm{def}(f) = 1$, $\ker f = \{a_0 + a_0x \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$, една база на $\ker f$ е например полиномът $1 + x$.

5. Ранг на матрица, система от вектори и линейно преобразуване

Задача 11. Намерете ранга на

а) матриците $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

б) системата от вектори $a_1(1,0,1,1)$, $a_2(1,-1,2,2)$, $a_3(-1,2,3,0)$, $a_4(2,1,1,-1)$;

в) линейното преобразуване $f : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$, определено от $f(X) = MX - XM$ за произволна матрица $X \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 12. Определете ранга на матрицата $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в зависимост от стойността на $k \in \mathbb{R}$.

6. Системи линейни уравнения. Матрични уравнения

Задача 13. Решете системите линейни уравнения

а) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=3 \end{array}\right.$;

б) $\left|\begin{array}{l} 3x_1+4x_2-5x_3+4x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{array}\right.$

в) $\left|\begin{array}{l} x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_4=0 \\ x_1+2x_2-5x_3-x_4=0 \\ 3x_1-x_2-x_3-4x_4=0. \end{array}\right.$

Задача 14. Определете матрицата X от уравненията

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.