ПЪРВО КОНТРОЛНО ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИЙ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ
спец. ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА
14.12.2012 г.

Задача 1. (5т.) Нека

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Да се намерят A^{-1} и $\det A$.

Решение: Забелязваме, че $AA^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E$. Сега $A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}A^t$.

От свойства на детерминанти, знаем че $\det A = \det A^t$. От друга страна имаме $\det A \det A^t = \det((a^2+b^2+c^2+d^2)E)$ и $\det A = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Тъй като коефициентът пред a^4 в изходната детерминанта е $+1$ (a^4 се получава само от елементите от главния диагонал), то $\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

Забележка: Тук елементите a, b, c, d приемат различни стойности за различните варианти на контролното. Във всеки вариант $a^2+b^2+c^2+d^2 = 14$, а отговорите за всеки вариант са $A^{-1} = \frac{1}{14}A^t$ и $\det A = 196$.

Критерий: Намиране на обратна матрица A^{-1} - 2,5т. Намиране стойността на детерминантата - 2,5т.

Задача 2. (5т.) а) Да се реши системата в зависимост от стойностите на параметъра λ.

$$\left|\begin{array}{l} \lambda x_1+ax_2+bx_3+ax_4= b \\ ax_1+\lambda x_2+bx_3+ax_4= b \\ ax_1+bx_2+\lambda x_3+ax_4= b \\ ax_1+bx_2+ax_3+\lambda x_4= b \\ ax_1+bx_2+ax_3+bx_4= \lambda \end{array}\right.$$

б) Ако A е матрицата на системата, намерете рангът на A, в зависимост от стойностите на параметъра λ.

Решение: а) С помощта на еквивалентни преобразувания получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{rrrrr} \lambda x_1 & + ax_2 & + bx_3 & + ax_4 & = b \\ (a-\lambda)x_1 + (\lambda - a)x_2 & & & & = 0 \\ & (b-\lambda)x_2 + (\lambda - b)x_3 & & & = 0 \\ & & (a-\lambda)x_3 + (\lambda - a)x_4 & & = 0 \\ & & & (b-\lambda)x_4 & = (\lambda - b) \end{array}\right.$$

Откъдето:

1) случай

$\lambda = b$, откъдето намираме общо решение на системата $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{b-(a+b)p}{a+b}, \frac{b-(a+b)p}{a+b}, p, p), \quad \forall p$.

2) случай

$\lambda = a$, откъдето намираме общо решение на системата $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{b+a-(a+b)q}{a}, q, q, -1), \quad \forall q$.

3) случай

$\lambda = -2(a+b)$ - системата е определена, с решение $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, -1, -1, -1)$.

4) случай

$\lambda \neq a, b, -2(a+b)$ - системата е несъвместима.

Тук $a \neq b$ във всички варианти.

б) Рангът на $A \in M_{5X4}(F)$ - матрицата на системата в случаи 1) и 2) е равен на 3. При $\lambda \neq a, b$ имаме $r(A) = 4$.

Критерий: а) За изследване на всеки от случаите - по 0,75т. на случай. б) За правилно определяне на матрицата на системата - 0,2т. Изследване на всеки от трите случая - по 0,6т. на случай.