

Упражнение 9

Ранг на матрица, система от вектори и линейно преобразуване

Задача 1. Намерете ранга на матриците:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 5 & -3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -8 \\ 3 & 5 & 5 & 1 & 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Намерете ранга на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на $\lambda \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Намерете ранга на системите от вектори:

а) $a_1(1, 1, -1)$, $a_2(1, 0, 1)$, $a_3(1, 2, 1)$, $a_4(2, 0, 2)$;

б) $a_1(3, -1, 3, 2, 5)$, $a_2(5, -3, 2, 3, 4)$, $a_3(1, -3, -5, 0, -7)$.

Задача 4. Намерете ранга на линейните преобразувания:

а) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, дефинирано чрез $f: (x, y, z) \rightarrow (x + y - z, 2x - y + z, x + 2z)$;

б) $f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, дефинирано чрез $f(p(x)) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$, където $p'(x)$ и $p''(x)$ са съответно първата и втората производна на $p(x)$.