

Упражнение 6

Линейни преобразувания и техните матрици

Задача 1. Нека f е изображение на $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$, при което векторът (x, y, z) се изобразява във вектора

а) $(x - y, x + y)$;

б) $(x, y + z)$;

в) $(x + y + z, 0)$;

г) $(y + 1, z)$;

д) (x^2, y) .

Установете дали f е линейно преобразуване и в такъв случай определете матрицата му относно каноничните бази на $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Нека V е реално векторно пространство с база $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, а f е линейно преобразуване на V , определено от

$$f(e_1) = 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$$

$$f(e_2) = e_1 + e_2 - e_4$$

$$f(e_3) = e_2 + 2e_3 - e_4$$

$$f(e_4) = e_1 + e_3.$$

Намерете:

а) матрицата $M_e(f)$ на f относно базата e ;

б) аналитичното представяне на f ;

в) образа на вектора $a(1, -1, 2, 1)$ чрез f .

Задача 3. Намерете ранга и дефекта на линейното преобразуване f като посочите по една база на $\text{im } f$ и $\text{ker } f$, ако:

а) $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, като $f(X) = MX - XM$ за произволна матрица $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

а $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, като $f(p(x)) = (x + 1)p'(x) + (x^2 - 2)p''(x)$ за произволен полином $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, а $p'(x)$ и $p''(x)$ са съответно първата и втората производна на $p(x)$.