

1. ДИС - 1 част - Людмила Николова

Изпит: писмен + усен

2 контролни средно ≥ 4.5 и се освобождават от задачи

Конспект - на изпита не се пада цял въпрос, а само част от него

211-катедра „Анализ“

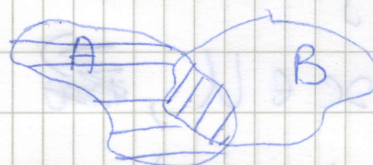
СИЧ - доц. Николова

$$x \in A, x \notin A$$

Литература: Димитров, Малеев, Троянски
Математически анализ или ДИС

$$A = \{a, b, c, \dots, z\}$$

$$B = \{a, b, c, \dots, z\}$$



$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ и (едновременно) } x \in B\} - \text{сечение}$$

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\} - \text{обединение}$$

$$A \setminus B = \{x = x \in A, \text{ но } x \notin B\}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) - \text{симетрична разлика}$$

$$\text{Обединение } \bigcup_{t \in T} A_t$$

$$T = \{1, 2, \dots, n\}$$

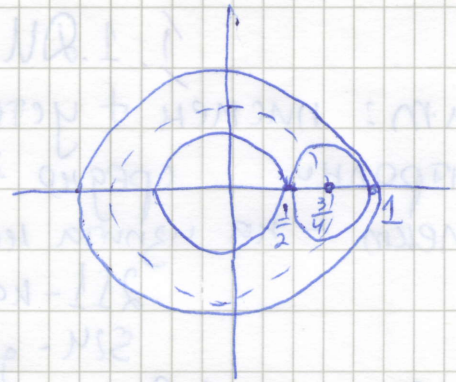
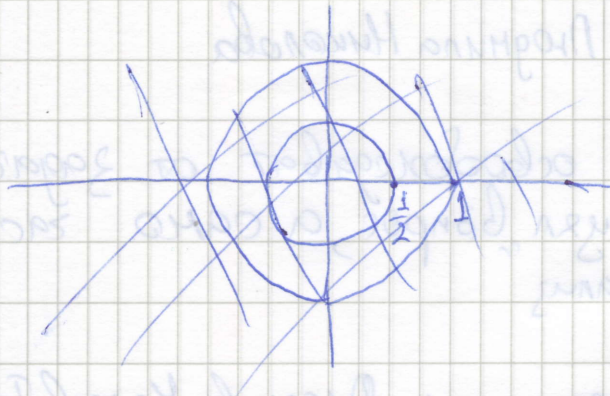
$$T = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

$$T = [0; 2\pi)$$

$$\uparrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Литература: Таганкилдески ДС и УС - два тома
или ДИС - в 1 том

Саргванджян, Ишхан, Семенов Мат. анализ



$U = V$ доказва се че $U \subset V$ и $V \subset U$

$U \subset V$; ако $x \in U$, ~~то~~ $x \in V$

Изходна: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(a+b)c = ac + bc$$

1) Нека $x \in$ л.з. (лява част), ще док., че $x \in$ д.з. (дясна част)

$x \in$ л.з. $\Rightarrow x \in \{A \cup B\}$ и (едновременно) $x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \text{ или } x \in B)$ и едновременно $x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \text{ и едновременно } x \in C) \text{ или } \{$

$(x \in B \text{ и едновр. } x \in C) \Rightarrow (x \in A \cap C) \text{ или } (x \in B \cap C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - дясна част

Нека $\exists x \in \mathcal{U}$. $x \in (A \cap C)$ или $x \in (B \cap C)$ $\xrightarrow{\text{за определяне}}$

$\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ и едновр. с това $x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ и едновременно $x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C, x \in \mathcal{U}$.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$ab + c = (a+c)(b+c) = ab + \underbrace{ac + bc + c^2}$$

$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \Delta B &= B \Delta A \\ A \Delta B &= B \Delta A \end{aligned}$$

Естествени числа

$\mathbb{N}$ - множеството на ест. числа $1, 2, 3, \dots$

Нека M е множество със следните свойства:

1. $1 \in M$ — база
 2. Ако $n \in M$, то $(n+1) \in M$ — индукционен преход
- Показва M съдържа всички ест. числа

P_n — твърдение $n \geq 1$ Ако P_n е изп. $\Rightarrow P_{n+1}$ — изп.
 $\Rightarrow$ Показва P_n е изпълн. за всички $\underline{n}$ (ефекта на домина-
 то)

$$2^n \geq n+1$$

$$n=1, 2 \geq 2$$

$$2^{n+1} \geq n+1+1$$

$$2^{n+1} \geq 2(n+1) = 2n+2 > n+2$$

$$(a+b)^n \geq a^n + b^n \quad a+b > 0 \quad (a+b)^n \leq 2^{n-1} (a^n + b^n)$$

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$0 \leq (a - \theta)^2$$

Нека твърдението е вярно за n

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n+b^n) \quad \text{f. } (a+b) > 0$$

Укажем $(a+b)^{n+1} \leq 2^n (a^{n+1} + b^{n+1})$

$$(a+b)^{n+1} \leq 2^{n-1} (a^n + b^n) (a+b)$$

$$2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b) \stackrel{?}{\leq} 2^{\frac{n}{2}}(a^{n+1} + b^{n+1})$$

$$a^{n+1} + a^n b + ab^n + b^{n+1} \leq 2a^{n+1} + 2b^{n+1}$$

$$0 \leq a^{n+1} - a^n b - a b^n + b^{n+1}$$

$$0 \leq a^n(a-b) - b^n(a-b)$$

$$0 \leq (a^n - b^n)(a - b) \leq a^{n+1}$$

$$0 \leq \left(1 - \frac{b}{a}\right) \left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)$$

$a+b > 0 \Rightarrow$ поке 100 рях
е попоке.
 $a > 0$

$$\frac{b}{a} = x$$

$$a+b>0 \quad |:a$$

$$1 + \frac{b}{a} > 0$$

$$1+x \geq 0$$

22-1 mpa ba ga goe.

9.1.4

$$0 \leq (1-x)(1-x^n)$$

за $x > 1$ $\frac{1-x}{1-x^n} < 0$ О.К.



$$|x| < 1 \quad |x^n| < 1 \quad x^n < 1$$

$$n \cdot (+)(+) \geq 0$$

формули на ДеМорган

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$A \cap \overline{B} = \overline{A \cup \overline{B}}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ - за доказ. за дом.}$$

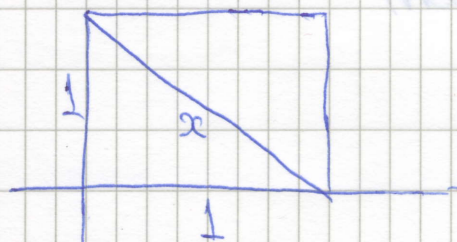
Важни числа

$\mathbb{N}$ - естествени числа

$\mathbb{Z}$ - цели числа

$\mathbb{Q}$ - рационални числа

$+$, $\cdot$
 $+$, $-$, $\cdot$
 $\frac{p}{q}$, p и q - цели $+$, $-$, $\cdot$, $:$



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

Ще покажем, че $x \notin \mathbb{Q}$
Допускаме обратното,
 $\exists \frac{p}{q}$ - несъкратима дроб

$$(2p)^2 = 2q^2 \quad 4p^2 = 2q^2$$

$$2p^2 = q^2 \Rightarrow q \text{ - четно}$$

$$x = \frac{p}{q} \quad \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$$p \text{ - четно} \quad p = 2r$$

$\frac{p}{q}$ не е несъкратима дроб, противоречие

1.15

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ - реални числа

$\mathbb{R}$ = рационал. + иррационални

Аксиоми (свойства):

1. $a+b = b+a$ - комутативност
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$ - асоциативност
3. $\exists!$ (съществуване и единственост) на нулев елемент $a+x=a$
4. $\exists!$ обратен (противоположен) $a+x=0$, $x := -a$

$$a+x=b \quad x=b+(-a)=b-a \quad a+b+(-a)=b \Rightarrow a+(-a)+b=b \Rightarrow 0+b=b$$

5. $ab=ba$ - комутативност
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ - асоциативност
7. $\exists!$ ~~нулев~~ единичен елемент $a \cdot e = a$, $e=1$
8. $\exists!$ обратен елемент $a \cdot x = e$, $x = \frac{1}{a}$

$$x=b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a} \quad a \cdot x = b \quad a \cdot b \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} \cdot b = e \cdot b = b$$

9. дистрибутивност $(a+b) \cdot c = ac+bc$

10. наредба: Ако $a \neq b$, то или $a < b$, или $b < a$

11. $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$ - транзитивност

12. $a < b \Rightarrow a+c < b+c$

13. $a < b$ и $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

14. принцип на Архимед: Не $\exists$ реално число $>$ всички $\mathbb{N}$ числа

1.1.6

$$a < b \Rightarrow a - b < b - b \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow -a + a - b < -a \Rightarrow -b < -a$$

$$0,125723...$$

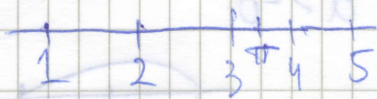
$$\frac{1}{3} = 0,3333...$$

$$\frac{p}{q} = A_x = \{z \in \mathbb{Q}, z < x\}$$

$$\sup A_x =$$

Множество ограничено отгоре

М е ограничено отгоре, ако $\exists$ число L , такова че за $\forall x \in M$ $x \leq L$

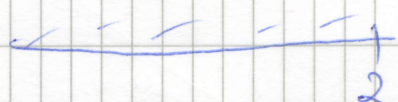


Принцип за непрекъснатост на $\mathbb{R}$ число
Ако едно множество M е ограничено отгоре и има най-малка горна граница $-\sup M$

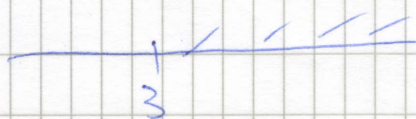
$$\sup M = 2$$

$$\inf M = 1$$

Ако M е ограничено отдолу има най-голяма долна граница $\inf M$

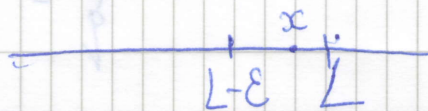


ограничено отгоре

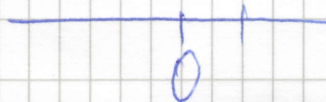


ограничено отдолу

Повзрдене: Ако $L = \sup M$, то $L - \varepsilon$ (когато $\varepsilon > 0$ -произволно), не е вие горна граница, т.е. за $\forall \varepsilon$ може да се намери $x \in M$, такова че $x > L - \varepsilon$



$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

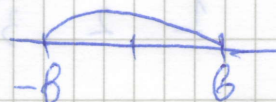


$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$$|a| < b, \text{ когато } b > 0$$

$$-a < b \Leftrightarrow a > -b$$

$$\boxed{-b < a < b}$$



Неравенство за триъгълника

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$+ a \leq |a|$$

$$b \leq |b|$$

$$\underline{a+b \leq |a|+|b|}$$

$$+ -a \leq |a|$$

$$-b \leq |b|$$

$$\underline{-a-b \leq |a|+|b|}$$

$$\begin{aligned} a+b &\leq |a|+|b| \\ -(a+b) &\leq |a|+|b| \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{полож.} \\ \text{отриц.} \end{array} \right\} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b|$$

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$$

$$\underline{|a+b| \leq |a-b| \leq |a|+|b|} \quad (*)$$

$$\leq |a-b| \leq |a|+|b|$$

$$\begin{aligned} |a-b| &\leq |a+b| \quad (*) & b=5 & a=3 & |a|=3 & |b|=5 \\ |a|-|b| &\leq |a-b| & |3-5| &= 2 & 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\cancel{|a|-|b| \leq |a-b|} \quad -|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b| \quad (*)$$

$$|a| \leq |b| + |a+b|$$

$$|a+b-b| \leq |a+b| + |-b|$$

Еpsilon-околност (ϵ) на точката a

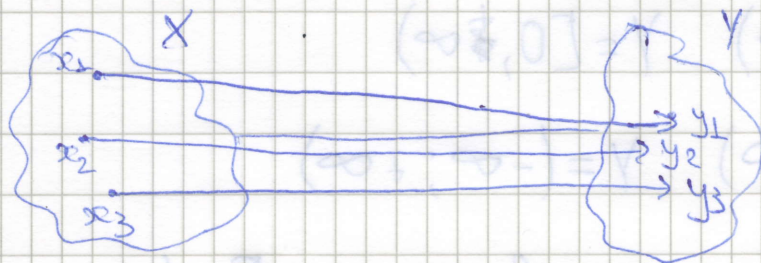
$$\begin{aligned} |x-a| &< \epsilon \\ -\epsilon &< x-a < \epsilon \end{aligned}$$

$$a-\epsilon < x < a+\epsilon$$



симетричен отворен интервал ~~око~~ с център точката a

Функции, графики.
Обратно изображение



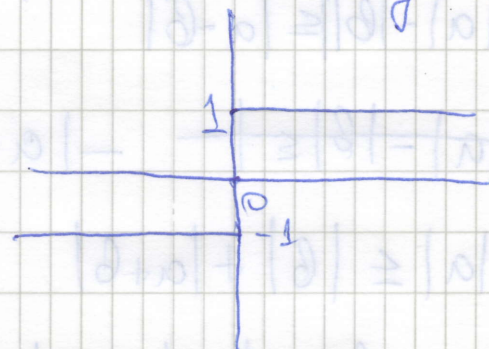
Деф: Казваме, x е зададена $f: X \rightarrow Y$ Ако за $\forall x \in X$ е съпоставен един елемент $y \in Y$
 $f(x) = x^2$ - еднозначни функции

X - дефиниционна област на f (Df)
 $\text{Im } f$ - образ на f { $y \in Y$, за които има $x \in X$:
 $y = f(x)$ }

Образът на f ($\text{Im} f$) може да е по-малко от Y .
 Примери:

$$1) f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x > 0 \\ 0 & \text{ако } x = 0 \\ -1 & \text{ако } x < 0 \end{cases}$$

$$X = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty) \\ Y = \text{Im} f = \{0, 1, -1\}$$



2) функция на Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \text{ е рационално} \\ -1 & \text{ако } x \text{ е ирационално} \end{cases}$$

$$X = [0, 1] \quad Y = \text{Im} f = \{1, -1\}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \text{ е рац.} \\ 1-x, & \text{ако } x \text{ е ирац.} \end{cases}$$

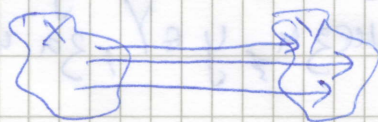
$$X = [0, 1] \quad Y = \text{Im} f = [0, 1]$$

$$4) f(x) = x^2 \quad X = (-\infty, +\infty) \quad Y = [0, +\infty)$$

$$5) f(x) = x^3 \quad X = (-\infty, +\infty) \quad Y = (-\infty, +\infty)$$

Деф: казваме че f е инективно изобр. (функция) ако за всяка двойка $x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2$ имаме $f(x_1) \neq f(x_2)$

$$4') X = [0, +\infty) \quad Y = [0, +\infty) \\ f(x) = x^2 \quad x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \quad x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0$$

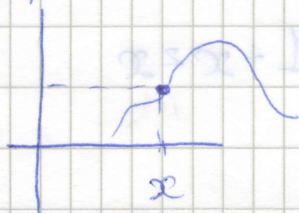


Одр: (корективно изобр. (функция) -
 f е корективна, ако $\forall y \in Y$ свщ. $x \in X$, такова
 че $f(x) = y$

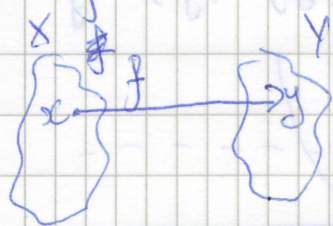


Одр: Бијективно изобр. (функция):
 това, което е инјективно и корективно

Графика на функција: совокупността $(x, f(x))$, $x \in X$



Нека f е бијективно



$f^{-1}(y)$ - обратен образ

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ за } \forall x \in X$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ за } \forall y \in Y$$

Примери:

5) $f(x) = x^3$ $X = (-\infty; +\infty)$ $Y = (-\infty; +\infty)$

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \quad (\sqrt[3]{y})^3 = y \quad \sqrt[3]{x^3} = x$$

Пр. 4') $f(x) = x^2$ ($x = [0; +\infty)$) $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ - прав.} \\ 1-x, & x \text{ - управ.} \end{cases} \quad X = [0; 1] \quad Y = [0; 1]$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{ако } y \text{ - прав.} \\ 1-y, & \text{ако } y \text{ - управ.} \end{cases}$$

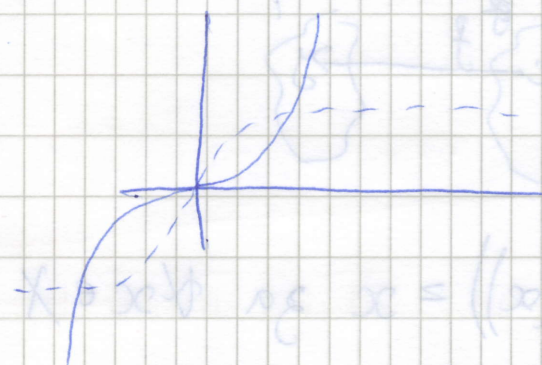
$$f^{-1}(f(x))$$

Нека x е управ.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1-x) = 1-(1-x) = 1-1+x = x$$

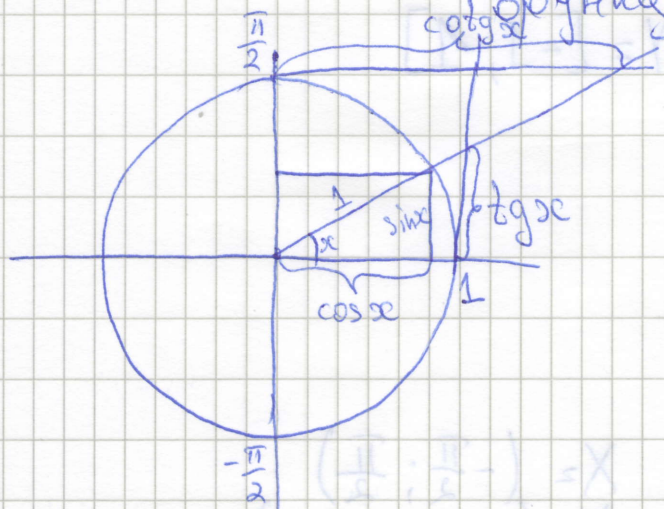
x - прав. $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) = x$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ако } x \text{ е прав.} \quad f^{-1}(f^{-1}(y)) = y$$



$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f^{-1}(y) &= y \end{aligned}$$

Обратни кръгови или тригонометрични функции.



1. разглеждаме $\sin x$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = X$$

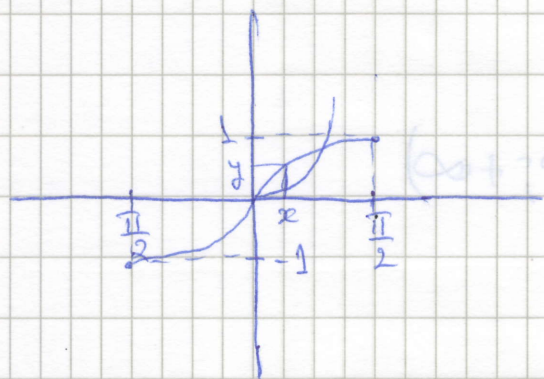
$$Y = [-1; 1]$$

двукратно изобр., пресича оср. в 1 точка и единствено 1 точка

$$\arcsin y \quad \forall y \in Y = [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{за } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin y) = y \quad \text{за } y \in [-1; 1]$$



На контролното: ср. тригон. функции

Да е голямо:

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$$

$$\text{но! } d = \arcsin y$$

$$\sin d = y$$

$$d \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos d = +\sqrt{\cos^2 d + 1 - y^2}$$

$$\cos^2 d + \sin^2 d = 1$$

$$\cos^2 d = 1 - \sin^2 d = 1 - y^2$$

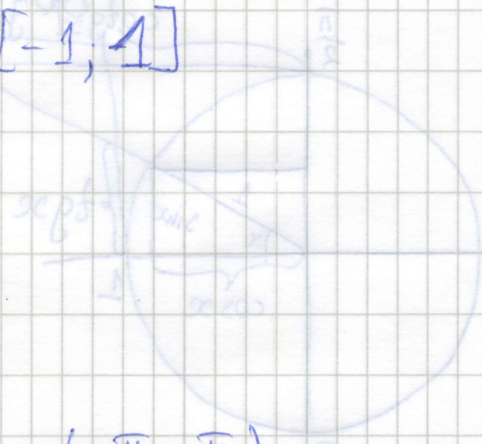
$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$$

$\arcsin y$ - многозначная функция

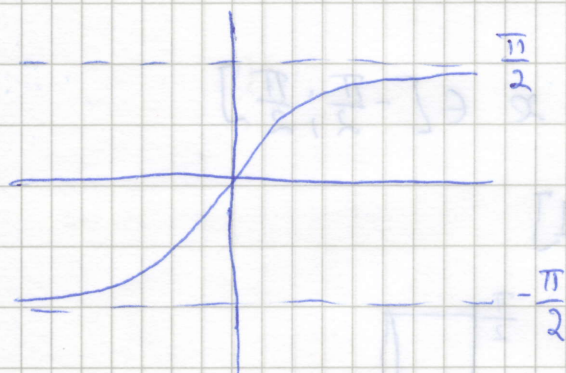
2. $\cos x \quad x \in [0; \pi] = X \quad Y = [-1; 1]$

$\arccos y$ - обр. на $\cos x$

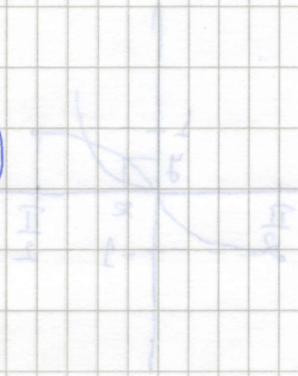
$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0; \pi]$
 $\cos(\arccos y) = y, \quad y \in [-1; 1]$



3. $\arctg y \quad X = (-\infty; +\infty) \quad Y = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$



4. $\operatorname{arccotg} y \quad X = (0; \pi) \quad Y = (-\infty; +\infty)$



Граница на редица. Аритметични действия
със сходящи редици.

$$f: X \rightarrow Y$$

$$X = \mathbb{N} \quad 1, 2, 3, \dots \quad Y = \mathbb{R} \quad \text{на } \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n$$

$$a_n = n \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

$$a_n = n^2 - 1 \quad 0, 3, 8, 15, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Дефо: Казваме, че числото a е граница на редицата $\{a_n\}$ ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери число N , такова че за всяко $n > N$ да е изпълнено следното: $|a_n - a| < \varepsilon$

$$- \varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$\begin{array}{c} | \\ \hline a - \varepsilon \quad a \quad a + \varepsilon \end{array}$$

$$N = 17, 3 \quad a_{18}, a_{19}, \dots$$

За $\forall \varepsilon > 0$ извън околността $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ има само краен брой елементи на редицата.

Ако една редица има граница, то тя е

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$$

$$\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Задаване ε . Търсим N : ако $n > N$ то $|\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \gamma = \frac{1}{\varepsilon} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1\,000\,000}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1\,000\,000}{\varepsilon}$$

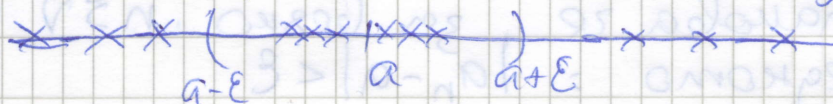
$$\frac{A}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \text{за } \forall \varepsilon \quad \exists N: \text{за } n > N \text{ да е изпълнено } |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{за } \forall N: \exists n > N \quad |a_n - a| \geq \varepsilon$$

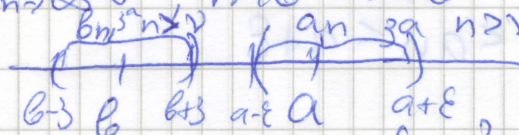
(войства:

1) Ако присъединим (премахнем) в една редица, краен брой членове, то нейната сходност не се променя.



2) Ако $a_n \leq b_n$ и $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, то $a \leq b$

Допускаме $b < a$
 $\varepsilon = \frac{a-b}{3} > 0$



Извън $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има краен брой елементи на $\{a_n\}$. Елементите са с индекси $\leq N_1$.
 $N_1 = 27,3$

Извън $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ има краен брой елементи на $\{b_n\}$. Елементите са с индекси $\leq N_2$.
 $N_2 = 12,4$

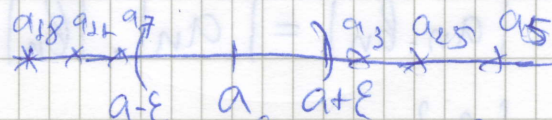
$$N = \max(N_1, N_2) \quad \text{за } n > N \quad b_n < a_n !!!$$

Забележка: Достатъчно е $a_n \leq b_n$ да е изпълнено за безброй много $n \Rightarrow a \leq b$

$\{a_n\}$ е ограничена $\Leftrightarrow \exists M < |a_n| \leq M \Leftrightarrow \exists m, M$

$$m \leq a_n \leq M$$

3) $\forall$ сходяща редица е ограничена



Взимаме $\varepsilon = 1$, $\exists N$ ($N = 7, 4$), така че $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ има краен брой членове на редицата с индекс $1, 7, 18, 3, 5, 25 \rightarrow a_1, a_7, a_{18}, a_3, a_5, a_{25}$

$$m = \min(a_k, a - \varepsilon) \quad M = \max(a_k, a + \varepsilon)$$

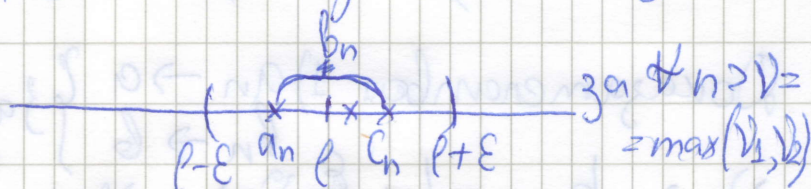
Лема: Нека $a_n \leq b_n \leq c_n$. Нека $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \Rightarrow b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ за полицайте

Доказателство: Задаваме $\varepsilon > 0$. Погрешим N , такава че за всички $n > N$ да е изпълнено $|b_n - l| < \varepsilon$ ($l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$) тъй като $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, то по $\frac{\varepsilon}{2}$

намираме $N_1: \forall n \geq N_1$ да е изпълнено $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

тъй като $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, по ε намираме $N_2: \forall n \geq N_2$ $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$

$b_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ за $\forall n \geq N$



$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

Следствие 1: Нека $0 \leq b_n \leq c_n$

Нека $c_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ тогава $b_n \rightarrow 0$ $a_n \equiv 0$

Следствие 2: Нека $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и нека $\{b_n\}$ е ограничена редица. Тогава $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Доказательство: $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow |a_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$$\exists |a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n|$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ -M \quad m \quad M \end{array}$$

$\{b_n\}$ е ограничена $\Rightarrow \exists M: |b_n| \leq M$

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M \cdot |a_n| \rightarrow 0$$

$$M |a_n| < \varepsilon \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Пвържение: Нека $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$

$$1) a_n \pm b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \pm b$$

$$2) c \cdot a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c \cdot a$$

$$3) a_n \cdot b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} ab$$

$$4) \text{ Ако } b_n \neq 0, \text{ то } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{a}{b}$$

Доказателство: 1) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ } задаване $\varepsilon > 0$. По него избираме
 $\forall \varepsilon: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, n > n_1 \quad \forall \varepsilon: |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, n > n_2$

Взимаме $N = \max(n_1, n_2)$. Нека $n > N$
 $|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |a_n - a - (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|m \pm n| \leq |m| + |n|$$

$$3) \begin{matrix} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \end{matrix} \quad |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$\xrightarrow{0+0=0} 0$$

$\{b_n\}$ е сходяща $\Rightarrow \{b_n\}$ е ограничена

ср. $\downarrow$

ср. $\downarrow$

$$a_n b_n \rightarrow ab$$

$$4) b_n \neq 0, b \neq 0 \quad b_n \rightarrow b \quad \text{Ще докажем, че } \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$$

$$b > 0$$

$$b_n \geq \frac{b}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & \frac{b}{2} & b & \frac{3b}{2} & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

$$\varepsilon = \frac{b}{2}$$

$$|b_n| \geq \frac{b}{2}$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n b|} = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|} \leq \frac{|b_n - b|}{\frac{|b|}{2} |b|} =$$

$$= \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$4'') \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$4'' \text{ е следствие на } 4' \text{ и } 3. \quad \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow$$

$$\rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{губернатор}} \infty$$

Def: ~~Ка~~ Казване $a_n \rightarrow \infty$ (или $a_n = +\infty$), ако

за $\forall$ число M съществува число N , такова че за $\forall n > N$ да е изпълнено $a_n > M$.

$$a_n = n^2 + 1 \quad M \quad n^2 + 1 > M \\ n^2 > M - 1 \\ n > \sqrt{M - 1} \\ N = \sqrt{M - 1}$$

$$\frac{1}{a - \varepsilon} \quad a \quad a + \varepsilon$$

$$(M, \infty)$$

Поборжение: 1) Нека $a_n \rightarrow +\infty$ тогава $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$

2) Нека $a_n \rightarrow 0$, $a_n > 0$. Тогава $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$

Доказателство: 1) $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$, тъй като $a_n \rightarrow +\infty$
 $a_n > 0$. По ε мерещи N , такова че ако $n > N$, то
 $|\frac{1}{a_n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon \Leftrightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon}$

Имаме $a_n \rightarrow +\infty$ $M = \frac{1}{\varepsilon}$ Тогава за $n > N$ имаме
 $a_n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |\frac{1}{a_n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow Q.E.D$

Пример: x^n

$$1) x > 1 \quad x^n = \left(\frac{1+x-1}{a} \right)^n$$

$$= 1 + n \cdot 1^{n-1} (x-1) + \frac{n(n-1)}{2} (x-1)^2 + \dots + (x-1)^n > n(x-1)$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

~~$$k!! =$$~~

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)$$

$$(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)$$

$$(2k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+1)$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Искаме да докажем, че $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

Задаваме M , търсим $\nu = n > \nu$ да е изпълнено $x^n > M$
 $n(x-1) > M \Leftrightarrow n > \frac{M}{x-1} \quad \nu = \frac{M}{x-1} \Rightarrow \text{ако } n > \nu$

$$x^n > n(x-1) > M$$

$$2) |x| < 1 \quad \frac{1}{|x|} \geq 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$|x| = \frac{1}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$x=1 \quad 1, 1, 1, \dots, 1, \dots \rightarrow 1$$

$$x=-1 \quad -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$$

$$x < -1 \quad x^n = (-1)^n \underbrace{(-x)^n}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \quad \text{разходваща}$$

Defo: Казваме че $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, ако за $\forall M \exists \nu$,
 такова че $n > \nu$ да е изпълнено $a_n < M$

$$\underbrace{\quad}_{M}$$

$$x_n \rightarrow 0$$

$$|x| < 1$$

Монотонни редици

Дефиниция: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща, ако $a_n \leq a_{n+1}$ за $\forall n$.

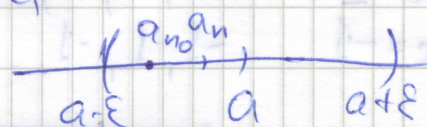
Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща, ако $a_n < a_{n+1}$ за $\forall n$.

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща, ако $a_n \geq a_{n+1}$ за $\forall n$.

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго монотонно намаляваща, ако $a_n > a_{n+1}$ за $\forall n$.

Твърдение 1: Ако $\{a_n\}$ е монотонно растяща и ограничена, то тя е сходяща.

Доказателство: Разглеждаме множество M от стойностите на редицата $\{a_n\}$. То е ограничена отгоре
 $\Rightarrow \exists \sup M = \sup \{a_n\} = a$
 пример за непрекъснатост
 ще док., че $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$



Заг. $\epsilon > 0$, $a - \epsilon$ - не е горна граница за $\{a_n\}$

$$\exists a_{n_0} > a - \epsilon$$

Нека $n > n_0$. Тогава $a_n \geq a_{n_0} > a - \epsilon$

$\Rightarrow$ Всички a_n с индекс $\geq n_0$ се намират в ϵ -околността $\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

Повръждане 2: Нека $\{a_n\}$ е монотонно растяща сходяща редица с граница числото a . Тогава $a_n \leq a$.

Доказателство: Допускаме противното, $\exists a_{n_0} > a$ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
 $a-\varepsilon < a_{n_0}$

В ε околността ~~има~~ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има само краен брой елементи на редицата $\Rightarrow a_n \not\rightarrow a$!!!

Неперово число e

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ще докажем, че тя е монотонно растяща и ограничена.

$$a_n \leq a_{n+1} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$\left[\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad \frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n} \quad \frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n} \right]$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) +$$

$$\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
& a_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
& + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\
& + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq \\
& \leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \leq \\
& \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < \\
& < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \quad a_n \leq 3 \quad 2 \leq e \leq 3
\end{aligned}$$

Теорема на Уорну.

Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ $b_n < b_{n+1}$ (строго растяга $\{b_n\}$)
 $b_n \rightarrow +\infty$

Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ и ме са
 равни.

Пример: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$ $b_n = n^{k+1}$ $b_n < b_{n+1}$, $b_n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + (n+1)^k - 1^k - 2^k - \dots - n^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \dots + 1 - n^{k+1}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{\binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n^k}} = \frac{1}{\binom{k+1}{1} + 0 + \dots + 0} = \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Теорема Коши: Если $\{a_n\}$ — последовательность, сходящаяся, и $a_n \rightarrow a$ тогда $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a$

$b_n \rightarrow \infty$ — стр. растущая. a_n
 $b_n \geq n$

$$b_{n+1} - b_n \geq n+1 - n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{1} = a$$

$$a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a$$

$$b_{n+1} - b_n \geq a_1 + \dots + a_{n+1} - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1}$$

Почка на сгущающей.

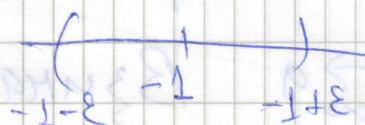
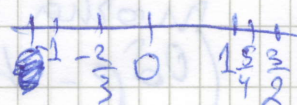
Подпоследовательность

Теорема Вейерштрасса и Кантор

$$a_n = (-1)^n$$



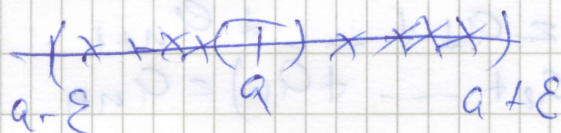
$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$



Деф: Казваме, че т. A е точка на състояване на $\{a_n\}$ ако $\forall \epsilon > 0$ околност на точката A има безброй много членове на редицата $\{a_n\}$

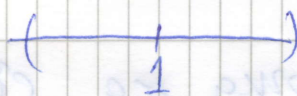
Деф': Казваме, че т. A е точка на състояване за $\{a_n\}$ ако $\forall \epsilon > 0$ всяка околност на точката A има поне 1 елемент на редицата разлик от A .

Деф' $\Rightarrow$ Деф. Ако нека a е точка на състояване според деф.', тогава тя е точка на състояване и според деф. Доукаме обратното, а не е точка на състояване според деф., т.е. $\exists$ околност $U_\epsilon(a)$ която няма само краен брой елементи на $\{a_n\}$



$$a_n \geq 1^n \quad a_n \geq 1$$

$$a_n = (-1)^n$$



Твърдение 1: Ако $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ (a е ср. отс.), то a е точка на състояване. (Тя е единствена точка на състояване)
(Обр- не е вярно $a_n = (-1)^n$)

Нека $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ Взимаме $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ в нея са

са всички a_n е асимптотично на краен брой
 $\Rightarrow$ В нея са безкраен брой a_n . т.е.
 a е точка на състояване

Да допуснем, че $\{a_n\}$ има поне още една точка на съотязване в

$\begin{array}{c} \text{безброй много} \quad \text{безброй много} \\ \text{---} \left(\frac{1}{n} \right) \quad \left(\frac{1}{n} \right) \text{---} \\ \text{---} a \uparrow \quad b \\ \text{---} \end{array}$
 трябва всички с изгл. на краен брой.

Подпоследич.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_k, \dots, X, \dots, X$
 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
 $b_k = a_{n_k}$

Твърдение 2: Ако $\{a_n\}$ е сходяща и $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, то

всяка нейна подпоследича $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е сс. и $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$

Доказ: Вземаме произволно $\varepsilon > 0$ ($a - \varepsilon, a + \varepsilon$) има безброй много

Доказваме противното, нека $a_{n_k} \not\xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$.
 Доказваме противното, $a_{n_k} \not\xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$. Съществува околност ε -околността на a .
 Избегн ε -околността има само краен брой елементи на $\{a_n\} \Rightarrow$ избегн ε -околността има само краен брой елементи на $\{a_{n_k}\}$

Нека $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$

Твърдение 3: Ако $\{a_n\}$ има точка на съотязване a , то същ. подпоследича $\{a_{n_k}\}$, такава че $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$.

$\begin{array}{c} a - \varepsilon \quad a \quad a + \varepsilon \\ \text{---} \end{array}$
 $a_n \quad o$
 $a_{n_k} \quad x$

Обратно: Ако a е гранична на подпоследича $\{a_{n_k}\}$, то тя е точка на съотязване за $\{a_n\}$

2. Ако $a_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$, то a е точка на съвстване за $\{a_n\}$, защото

произволна ε -околност на a се съдържа в някъде един от елементите на $\{a_n\}$. Всъщност, съществува пряк брой n_k , т.е. безброй много членове на $\{a_n\}$. Те са членове и на $\{a_n\}$. Безброй много членове на $\{a_n\}$.

1.2.

$$\left(a-1 \quad a \quad a_{15} \quad a+1 \right)$$

$$\left(a-\frac{1}{2} \quad a \quad a_{23} \quad a+\frac{1}{2} \right)$$

$$a_{15}, a_{23}, a_{47}$$

$$\left(a-\frac{1}{3} \quad a \quad a_{47} \quad a+\frac{1}{3} \right)$$

$$\left(a-\frac{1}{k} \quad a \quad a+\frac{1}{k} \right)$$

$$\boxed{a - \frac{1}{k} < a_n < a + \frac{1}{k} \\ n_k < n_{k+1}}$$

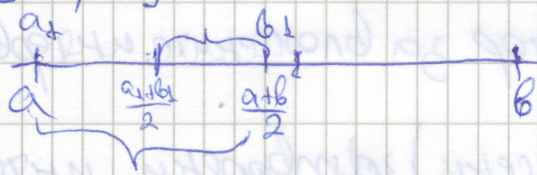
Лема за полицията: $a_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$

~~Теорема~~ Теорема на Болцано-Вайерштрас

Всяка ограничена редица има поне една точка на съвстване.

(От всяка ограничена редица може да се избере следваща подредица.)

Док: Разг. ограничената редица $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ в интервал $[a, b]: a \leq c_n \leq b$



$[a_1, b_1] \subset [a, b]$ в него има безброй много членове на $\{c_n\}$.

$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ в него има безброй много членове на $\{c_n\}$.

$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ в него има безброй много членове на $\{c_n\}$.

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a) \quad (*)$$

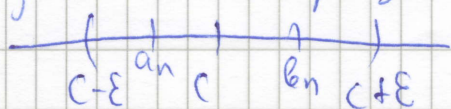
$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$$

Редицата $\{a_n\}$ е монотонно растяща и ограничена (в $[a, b]$) $\Rightarrow$ е сходяща. Означаваме с $\tilde{a}$ нейната граница. Редицата $\{b_n\}$ е монотонно намаляваща и ограничена (в $[a, b]$) $\Rightarrow$ е сходяща. Означаваме с $\tilde{b}$ нейната граница.

В (*) правим граничен преход $\tilde{b} - \tilde{a} = 0$. Означаваме $\tilde{a} = \tilde{b} = c$, общата стойност на

$$2^n > n-1 \quad \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n-1} \Rightarrow 0$$

Ще док, че c е точка на съвпадане за $\{c_n\}$
Задаваме $\varepsilon > 0$ произволно.



a_n - монотонно растяща
 $a_n \rightarrow \tilde{a}$ $a_n \leq \tilde{a}$ $a_n \leq c \leq b_n$

В $[a_n, b_n]$ има безброй много членове на $\{c_n\}$.
 $\Rightarrow$ в $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ има безброй много членове на $\{c_n\}$.

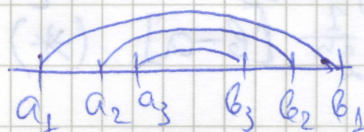
$\Rightarrow C$ е точка на съвпадение за $\{C_n\}$.

Теорема на ~~Кантор~~ Кантор за вложени интервали

Нека има редица от (вложени) затворени интервали $[a_n, b_n]$ със свойства: ~~а)~~

1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \dots$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ Тогава $\exists!$ точка P , обща за интервалите $[a_n, b_n]$



a_n - растяща и ограничена - сходяща

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_1$$

b_n - намаляваща и ограничена - сходяща

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_2$$

$$a_n \leq P_1$$

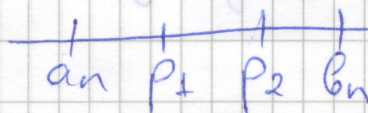
$$b_n \geq P_2$$

$$a_n \leq b_n$$

$$a_n \leq b_n$$

$$P_1 \leq P_2$$

граничен
преход



$$b_n - a_n \rightarrow 0$$

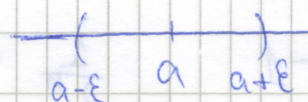
$$P_2 - P_1 = 0$$

граничен
преход

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$$

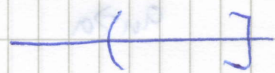
a е точка на съвпадение

$$\Leftrightarrow a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$$



Твърдение: Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ~~ограничена~~ ограничена редица, то тя има най-голяма и най-малка точки на съвстване.

ако E е ~~множество~~ от точки на съвстване
 $\sup E$ е точка на съвстване



Доказателство:

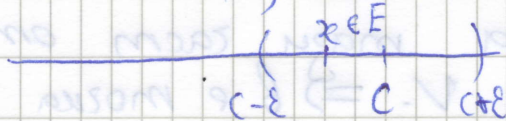
$$|a_n| \leq M \Rightarrow \frac{a_n}{M} \in [-1, 1] \\ \Rightarrow \text{то } 0 \in E \subset [-M, M]$$

$$|a_n| \leq M \Rightarrow 0 \in E \subset [-M, M]$$

По теорема на Боуцако-Вайерштраас, E не е празно, то е ограничено.

$$\exists \sup E \text{ и } \exists \inf E$$

Ще покажем, че $c := \sup E$ е точка на съвстване



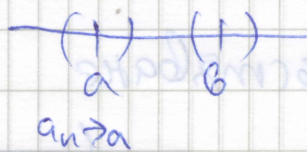
$c - \varepsilon$ - не е горна граница за E , т.е. $\exists x \in E: x > c - \varepsilon$

Щом $x \in E$, т.е. x е точка на съвстване, то в околността $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, която е околност и на точка x има безброй много членове на редицата $\{a_n\}$.
 c е точка на съвстване за редицата $\{a_n\}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = c \\ \Downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \\ \Downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

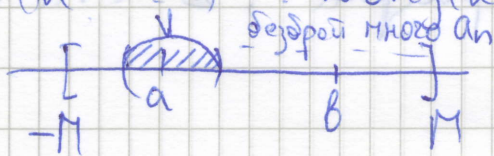
Покажем, че ако $\{a_n\}$ е сходяща, то тя има единствена точка на съвпадение.



Ако $a_n \rightarrow a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Върно ли е, обратното: Ако $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$, то $\{a_n\}$ е сходяща $a_n \rightarrow a$. ($\{a_n\}$ е ограничена)

Нека $\{a_n\}$ е ограничена и $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$. Ще докажем, че $a_n \rightarrow a$. Допускаме противното $a_n \not\rightarrow a$.



$a_n \rightarrow a$ във всяка околност на точк. a се съдържат всички, с изкл. на краен брой елементи на $\{a_n\}$.

$a_n \not\rightarrow a$, има околност, такава извън тази околност има безброй много a_n .

$\exists b$ - точка на съвпадение на тази част от редицата, която не е в околността V . $\Rightarrow b$ е точка на съвпадение на редицата $\{a_n\}$.

Примери: 1) $a_n = 1 + (-1)^n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$2) a_n = \left(1 + \frac{n}{n+2}\right) \cos n \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2n+2}{n+2} = \frac{n(2+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{2}{n})} \Rightarrow \frac{2+0}{1+0} = 2$$

не забравяй

$$\cos k\pi = (-1)^k$$

$$n=4l$$

$$1$$

$$a_{4l} = 1 + \frac{4l}{4l+2} \rightarrow 2$$

$$n=4l+2$$

$$-1$$

$$a_{4l+2} = \left(1 + \frac{4l+2}{4l+4}\right)(-1) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} -2$$

$$n=4l+1$$

$$0$$

$$a_{4l+1} = 0$$

$$4l+3$$

$$a_{4l+3} = 0$$

$$3) n = \overline{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu}$$

$$a_n = 0, \alpha \beta \gamma \dots \nu$$

$$n = 237$$

$$n = \overline{237}$$

$$a_1 = 0, 1$$

$$a_2 = 0, 2$$

$$a_{23} = 0, 23$$

$$a_{237} = 0, 237$$

$$0, 237$$

$$a_{237}$$

$$0, 2370$$

$$a_{2370}$$

$$0, 23700$$

$$a_{23700}$$

$$\overline{(\quad)}$$

Твърдение: Ако всички подредици на една редица са сходящи, то тогава те има една и съща граница.

a_n е ограничена

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\left(\begin{array}{c} a_{m_k} \rightarrow c \quad a_{n_p} \rightarrow d \\ \hline c \quad d \end{array} \right)$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

НДУ (необходимо и достатъчно условие) на Коши за сходимост на редици.

Теорема: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$, може да се намери ν , такова че когато $m, n > \nu$ да е изпълнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Доказателство $\Rightarrow$ Нека $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Ще докажем е изпълнено условието на Коши. Задаваме ε , тъй като $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, то $\exists \nu$: за $n > \nu$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Нека $m > \nu$, тогава $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$ 1) a_n е ограничена. Задавам $\varepsilon = 1$; $\exists \nu$, такова че $m, n > \nu$ $|a_m - a_n| < 1$ $m = m_0$ $(n > \nu)$
 $|a_{m_0} - a_n| < 1 \Leftrightarrow |a_n - a_{m_0}| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n - a_{m_0} < 1 \Leftrightarrow$
 $a_{m_0} - 1 < a_n < a_{m_0} + 1$

фиксирано число $\Rightarrow a_n$ е ограничена

1) По Болцано - Вайерштрас: $\exists$ сходяща подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$
 $a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$

2) Ще докажем, че $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$. Задаваме ε , $\exists \nu_1: k > \nu_1$
 $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$

По същото $\varepsilon > 0$, камираме $\nu_2: m, n > \nu_2$ да е изпълнено:

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**) \quad \nu = \max(\nu_1, \nu_2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k > \nu \text{ за } (*) \\ m, n > \nu \text{ за } (**) \end{array}}$$

Фиксираме $k > \nu$ и $(*)$ е изпълнено:
 $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Нека $n > \nu$, тъй като $k > \nu$, а викага $n_k \geq k$
 $n, n_k > \nu \Rightarrow$ ~~използваме~~ използвам $(**)$ с $m = n_k$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{за } n > \nu, \text{ т.е. } a_n \rightarrow a$$

$$\boxed{k = 302 > \nu}$$

$$a_{n_{302}}$$

$$\frac{a_{n_k}}{a}$$

$$a_{n_k} - a \rightarrow \text{малко}$$

Редица удовлетворяваща ~~ре~~ условието на Коши е фундаментална редица.

в еднопространство

$\forall$ фундаментална е сходяща.

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$ не е сходяща

$$|a_{2m} - a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn} + \dots + \frac{1}{2m} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{m} =$$

$$= \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m}$$

$$\cancel{a_{2m} - a_m} \quad \varepsilon = \frac{1}{4} : \nu = m, 2m > \nu$$

$$|a_{2m} - a_m| < \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{m}{2m} = \underbrace{\frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m}}_m \leq a_{2m} - a_m \leq$$

1.34

$$D = D(f)$$

Дефо: казваме, че x_0 е точка на съвстяване за $\odot D$, ако във всяка околност на x_0 има елемент на D , различен от x_0 .



Пъзрение: x_0 е точка на съвстяване за $D \Leftrightarrow$

$\exists x_n \in D, x_n \neq x_0, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

$\Rightarrow$ Взимаме околност с радиус $\frac{1}{n}$.

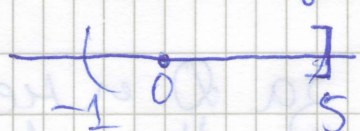
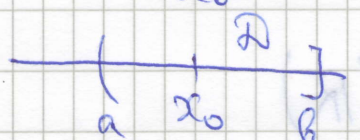
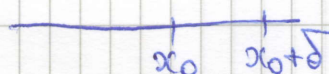
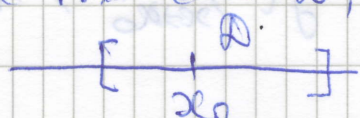
В нея намираме ел. на $D \neq x_0$

Кръжиме го x_n $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$

$x_n \in D, x_n \neq x_0$

$\Leftarrow x_n \in D, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0$. Взимаме околност V .

Във V са всички от $\{x_n\}$ с изкл. на краен брой. $\Rightarrow$ нека m от D , която е във V .



$a \neq D$, но a е точка на съвстяване
 $\frac{1}{x}$ $0 \notin D$, но 0 е точка на съвстяване за D

Дефиниция на Хайне

Нека x_0 е точка на съвстяване за $\odot D = D(f)$

Дефо. на Хайне: казваме, че $f(x)$ клони към A при x клонящо към x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$) или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

Ако за всяка редица $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, редица $f(x_n)$ клони към A (при $n \rightarrow \infty$), редица

$$\text{От } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

(Свойства на граници:

1. Ако $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} B$ (x_0 е точка на съставяване на $D(f)$ и на $D(g)$)

$f(x) \pm g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \pm B$, $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} AB$, ако освен това $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{A}{B}$.

2. Ако $f(x) \leq g(x)$ в $D(f) \cap D(g)$

~~x_0 е точка~~ $\Rightarrow A \leq B$

3. Ако $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ в D и $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

4. Нека $f: D \rightarrow D'$, $g: D' \rightarrow D''$ ($\mathbb{R}$)

Нека x_0 е точка на съставяване за D и нека $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$ като $f(x) \neq A$ за $x \neq x_0$. Нека $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow A} B$

Образоване $g(f(x)) = h(x)$ $h(x): D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Показва } g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} B$$

* (Goucmbo 4: $x_n \in D, x_n \neq x_0, f(x_n) \neq A$ u $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$
 ~~$y_n \rightarrow f(x_n)$~~ $y_n \rightarrow A$ $g(y_n) \rightarrow B$
 $y_n \neq A$

$$g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$$

$$f(x) = x \quad x \rightarrow A \quad f(x) \rightarrow A$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

$$x \rightarrow A \quad x^2 \rightarrow A^2 \quad x^n \rightarrow A^n$$

$$f(x_n) = x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

$$a x^n \rightarrow a A^n \quad f(x) \equiv a \quad g(x) = x^n$$

$$P_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} P_n(x_0)$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= \frac{1-1+2}{1+1} = 1$$

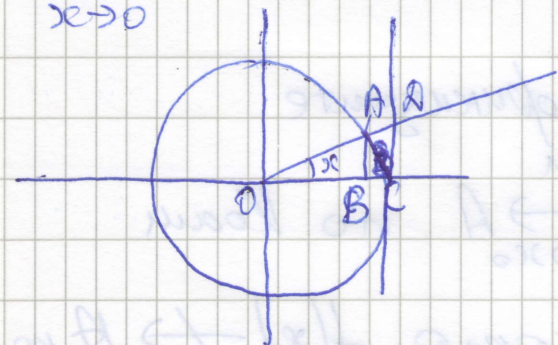
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 + 2}{x^3 - 1} = \frac{34}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$SOAC \leq SOAC \leq SOCA$$

$$OC = 1 \quad AB = \sin x \quad CD = \tan x$$

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

$$\pi \cdot 1^2 = \pi \quad \frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1 \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad (*)$$

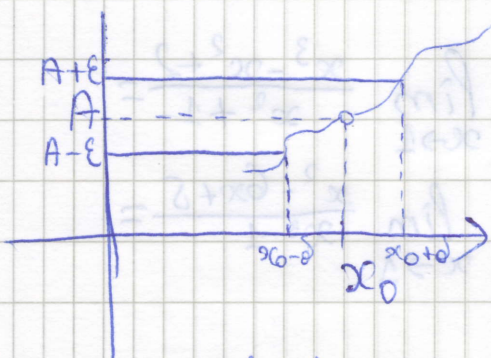
$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \Rightarrow |\sin x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{x}{2} \rightarrow 0, \sin \frac{x}{2} \rightarrow 0, \sin^2 \frac{x}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1$$

Правила при преход при $x \rightarrow 0$
 н.з. $\rightarrow 1$, г.з. $\rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$



Дефиниция на Коши: Нека $x_0 \in \mathbb{R}$ на свст.
 казваме, че $f(x) \rightarrow A$, ако
 за $\forall \epsilon > 0$ съществ. $\delta > 0$, такова че
 ако $0 < |x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - A| < \epsilon$
 $x \in D(f)$

$$A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$x \neq x_0$$

Еквивалентност на дефинициите
 на Хайне и Коши

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \text{ по Хайне} \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \text{ по Коши}$$

Доказателство: Допускаме противното $f(x) \not\xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$ по Коши
 $\Rightarrow \exists \epsilon_0$ за $\forall \delta$ същ. поне едно $x(\delta) \in D(f)$ $0 < |x(\delta) - x_0| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$
 $\delta = \frac{1}{n}$ $x(\frac{1}{n}) = x_n$ $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow x_0$ Хайне
 $x_n \neq x_0$

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A, \text{ но } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 \quad 0 > \varepsilon_0 !!!$$

⇐ Искане от това, че $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0 (\in D)$

? По ε търсим $\nu: n > \nu$ да е изпълнено $|f(x_n) - A| < \varepsilon$
 От Коши $\Rightarrow$ по ε намиране $\delta: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. По δ намиране $\nu: n > \nu, |x_n - x_0| < \delta$
 (т.к. $x_n \rightarrow x_0$) $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

НДУ на Коши за анализ на граница
 $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$ за $\forall \varepsilon: \exists \delta: x', x'' \in D(f), x', x'' \neq x_0$ и

$$\begin{aligned} |x' - x_0| < \delta, \text{ то } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \\ |x'' - x_0| < \delta \end{aligned}$$

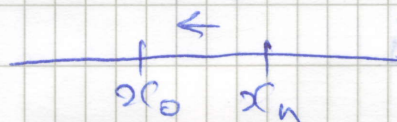
~~Фундаментална редица~~

на x_0 лява и дясна граница
 Дефиниция: казваме, че $f(x_0) \rightarrow A$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$

$(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A$ ако за $\forall$ редица $x_n \in D(f)$

$x_n > x_0, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ е изпълнено $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

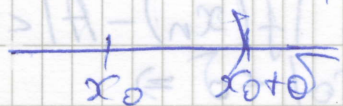
дясна граница



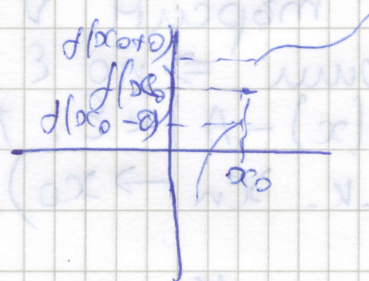
лява граница $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = B$ от $x_n \in D, x_n < x_0,$

$$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

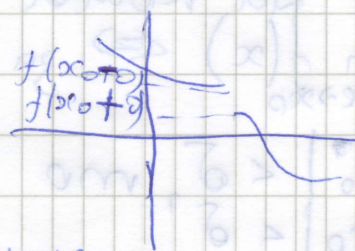
Дефиниция на Коши: ~~дясна граница~~ казваме, че $f(x) \rightarrow A$, ако за $\forall \varepsilon > 0$ същ. $\delta > 0$, така че ако $x \in D$, $x_0 < x < x_0 + \delta$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$



$f(x_0 + 0)$ - дясна граница в т. x_0
 $f(x_0 - 0)$ - лява граница в т. x_0

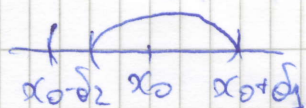


Пъвърденче: Ако $\exists f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и са равни, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и е равно на тях.



Доказателство, по Коши: По ε ~~дясна граница~~ намиране δ_1 , така че $x_0 < x < x_0 + \delta_1$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ $x \in D_f$. Когато с A сме означили общата стойност на $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ ~~по~~ ε ~~лява граница~~ намиране δ_2 : за $x_0 - \delta_2 < x < x_0$ $x \in D_f \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Si $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$: за $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \in D_f$, $x \neq x_0$, $|f(x) - A| < \varepsilon$



Примери: 1) a^x , $a \geq 1$ Ако $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
 $a^{x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2 - x_1} > a^{x_1} \cdot 1 = a^{x_1}$

Искаме да док. че $a^x \rightarrow 1$ $x = \frac{1}{n}$
 $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ $a^{\frac{1}{n}} = b_n + 1$

$$a = (b_n + 1)^n = 1 + n \cdot b_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 + \dots \geq 1 + n b_n$$

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n} \Rightarrow b_n \rightarrow 0$$

1, 140

По ε можем да намерим $N: a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$ за $n > N$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$?

По ε търсим δ : Ако $0 < x < \delta$, то $a^x - 1 < \varepsilon$

Взимаме някаква $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}: a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon \Rightarrow a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$

~~δ~~ $\delta = \frac{1}{n_0} \quad \left(0 < x < \frac{1}{n_0} \right) \quad a^x < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$

$\Rightarrow a^x - 1 < \varepsilon \quad |a^x - 1| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)}$

$x_n \rightarrow x_0$
 $x_n > x_0$

$\frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^x$

$\lim_{x \rightarrow 0-0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} a^{-t} =$
 $= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1}{a^t} = \frac{1}{\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} a^t} = \frac{1}{1} = 1$

Лява граница $= 1 \Rightarrow$ истинската граница $\exists$ и $e = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

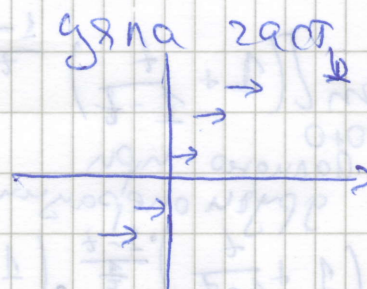
Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$x_n = \frac{1}{n} \quad \frac{1}{x} \rightarrow \infty \quad n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

$n \leq \frac{1}{x} < n+1 \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$
 $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \rightarrow \frac{e}{1+0} = e$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e$



-1,3	-2	3,5	3
2	2	8,8	8
0	0		

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & x & & 1 \\ & & \frac{1}{n+1} & & \frac{1}{n} & & \frac{1}{n-1} \\ x & & & & & & \end{array}$$

Задаване $\varepsilon > 0$ намираме $N_1: n > N_1$
 $e - \varepsilon < a_n < e + \varepsilon$ (*)

По $\varepsilon > 0$ намираме $N_2: n > N_2$
 $e - \varepsilon < b_n < e + \varepsilon$ (**)

$$N = \max(N_1, N_2)$$

$$\text{Искаме } (1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{x > 0} e$$

По ε търсим $\delta: \text{за } 0 < x < \delta \Rightarrow |(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$ - дясна граница
 $e - \varepsilon < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e + \varepsilon$

Взимаме $\delta := \frac{1}{N+1}$ За $x \in (0, \delta)$ $x < \frac{1}{N+1}$ Ако $n = \lfloor \frac{1}{2x} \rfloor$
 ~~$\delta := \frac{1}{n+1}$~~ имаме $n \leq \frac{1}{x} < n+1$ или $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow n > N = \max(N_1, N_2) \Rightarrow$ за n са валидни (*) и (**)
 $e - \varepsilon < a_n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq b_n < e + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ за $x \in (0, \delta) \Rightarrow e - \varepsilon < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e + \varepsilon$, т.е. $|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0+0} (1-t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{1}{1-t} = \frac{1-t+t}{1-t} = 1 + \frac{t}{1-t}$$

$$y = \frac{t}{1-t} \quad t \rightarrow 0+0 \Rightarrow y \rightarrow 0+0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+0} \left[\left(1 + \frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1-t}{t}} \right]^{\frac{1}{1-t}} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1-t}{t} + 1} =$$

валидно при
групи операции

$$= \lim_{t \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1-t}{t}} \cdot \left(1 + \frac{t}{1-t} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \cdot 1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{kx}} = k - \text{ест. число}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}} \right]^k = e^k$$

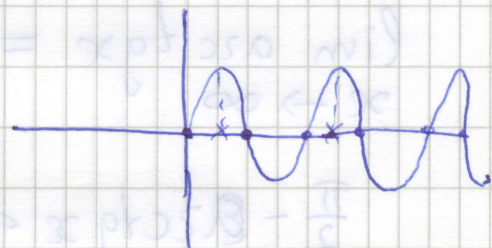
~~Не~~ Не $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ $x_n \rightarrow 0$ $y_n \rightarrow 0$

$$\sin \frac{1}{x_n} \rightarrow A$$

$$\sin \frac{1}{y_n} \rightarrow B$$

$$\sin \frac{1}{x_n} = 0 \quad \frac{1}{x_n} = n\pi \Rightarrow x_n = \frac{1}{n\pi}$$

$$\frac{1}{y_n} = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$$



Треници на функции, които аргументът
катои към ∞

Имаме $D(f)$ да е неограничена (отгоре)

Това $\exists x_n \in D(f)$, $x_n \rightarrow \infty$. Наистина, за всяко n същ. елемент $x_n \in D(f) : x_n > n \Rightarrow x_n \rightarrow \infty$

Дефиниция: (Хайне) Казваме че $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$, ако
за всяка редица $x_n \in D(f)$, $x_n \rightarrow \infty$ имаме че
 $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Дефиниция: (Коши): Казваме, че $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$, ако за
всяко $\varepsilon > 0$, същ. M , такова че ако $x \in D(f)$ и
 $x > M$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$

Пвърждение: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ и $\lim_{t \rightarrow 0+0} f(\frac{1}{t})$ [както и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и
 $\lim_{t \rightarrow 0-0} f(\frac{1}{t})$] $\Rightarrow$ съществуват едновременно и са равни.

Доказателство: $x_n \rightarrow +\infty$, $x_n \in D(f) \Leftrightarrow$
 $t_n = \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$, $t_n > 0$, т.е. $t_n \rightarrow 0+0$

$$f(x_n) \xrightarrow{x_n \rightarrow +\infty} A \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{t_n}\right) \xrightarrow{t_n \rightarrow 0+0} A$$

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+0} e \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \xrightarrow{y \rightarrow \infty} e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \quad \text{Задаване: } \varepsilon > 0 \quad \left| \arctg x - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$$

за $x > M$

$$\frac{\pi}{2} - \arctg x < \varepsilon$$

$$\arctg x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon \Leftrightarrow x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

$$M := \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

Безкрайно малки и безкрайно големи
 величини

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$$

$$c = x_0, \quad c = x_0 - 0, \quad c = x_0 + 0$$

$$c = -\infty, \quad c = +\infty$$

$$c = 0 \quad f(x) = x^5 \quad f(x) = (x-3)^5 \text{ е безкрайно малка при } x \rightarrow 3$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ е безкрайно малка при } x \rightarrow \infty$$

$$f(x) = o(g(x))$$

Дефиниция: $f(x) < g(x)$ или (безкрайно малка от по висок ред в точка c), ако $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$

при $c = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 \\ g(x) &= x^3 \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

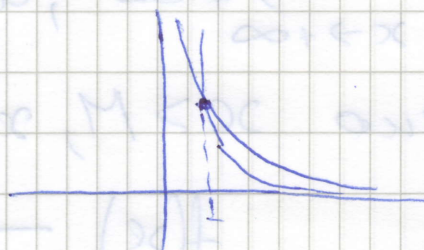
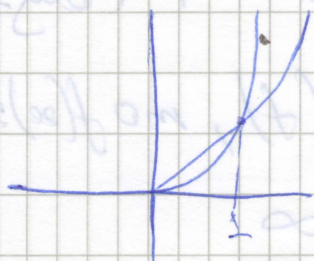
$$f(x) < g(x)$$

$$g(x) \sim \infty \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{x^{3/2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$f(x) = o(g(x))$$

0 - 0 малко
0 - 0 голямо

$$f(x) = o(h(x)) \quad h(x) = \frac{1}{x}$$



$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

за $x \rightarrow c$

$$f(x) = O(M)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$$

$$f = O^*(g)$$

$$0 < K < \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-5}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-5}{x} = \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x} = 1$$

$$f(x) = O^*(g)$$

$$f \sim g$$

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = x^5$$

$$x \rightarrow c = \infty$$

$$f(x) = o(g(x))$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$g(x)$ има по-висок порядък в ∞
 $g(x)$ е безкрайно голямо от по-висок порядък

Дефиниция: (по Коши) Казваме, че $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ако за всяка M (или N) $\exists x_0$ такова че за всяко $x > x_0$ имаме $f(x) > M$ (или N).

Дефиниция: (по Коши) Казваме, че $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ $\exists M$ такова че за всяко $x > M$ имаме $f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

за $\forall$ околност на $+\infty$ (P, ∞) да $\exists M$: за $x > M$;
 $f(x) \in (P, \infty)$ т.е. $\forall P$ да $\exists M$: $x > M$ и $x \in \mathcal{D}(f)$, то
 $f(x) > P$
 (по Коши)
 Казваме, че $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ако за $\forall P$ съществува

M , такова че ако $x > M$, $x \in \mathcal{D}(f)$, то $f(x) > P$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

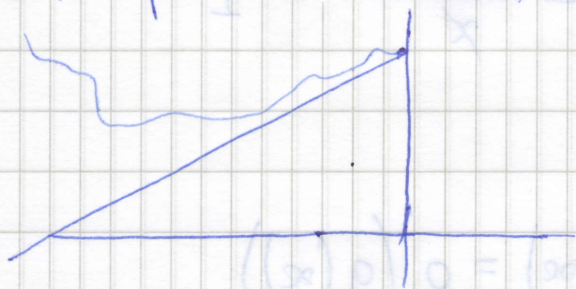
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

$\forall P \exists M$: $x < M$ и $x \in \mathcal{D}(f)$ $f(x) < P$

Асимптоти

Def:

Казваме, че правата $y = kx + b$ е асимптота за $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, ако $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$



Пълно определение: $y = kx + b$ е асимптота за $f(x)$ в $\infty \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

Доказателство: $\Leftarrow$ очевидно

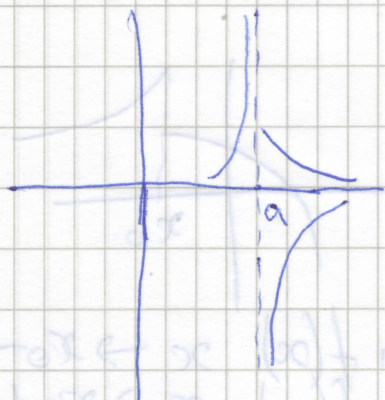
$\Rightarrow$ Нека $y = kx + b$ е асимптота

$$\boxed{f(x) - kx - b \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0}$$

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

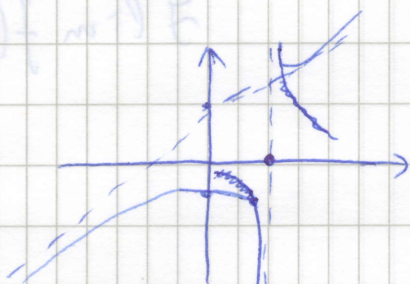
$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} k$$

Ако $k \neq 0$, асимптотата е хоризонтална
 Дефиниция: Казваме, че $x = a$ е вертикална асимптота за $f(x)$, ако $f(x) \rightarrow +\infty$ (или $f(x) \rightarrow -\infty$)
 $x \rightarrow a$



$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow k \quad x \rightarrow \infty$$

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$



$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x})} = 1 \quad k=1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1+\frac{3}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = 1$$

$$y = 1x + 1$$

$$y = x + 1$$

$$\frac{x+3}{x-1}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x(x-1)} = 0 \quad k=0$$

$$y = \sqrt{x} + 1$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x}+1}{x} = \frac{\sqrt{x}(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{x}) = \infty$$



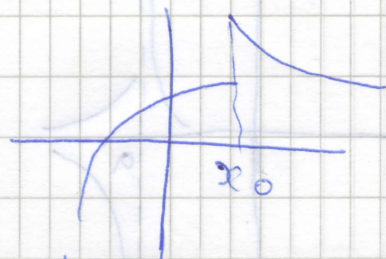
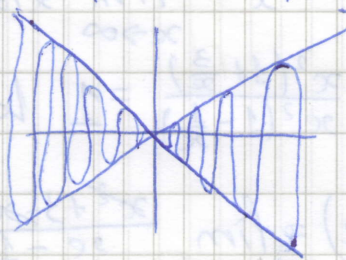
Непривзкнатост

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ е непревзската в $x_0 \in D(f)$, ако $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad A = f(x_0)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , \text{за } x = 0 \end{cases}$$

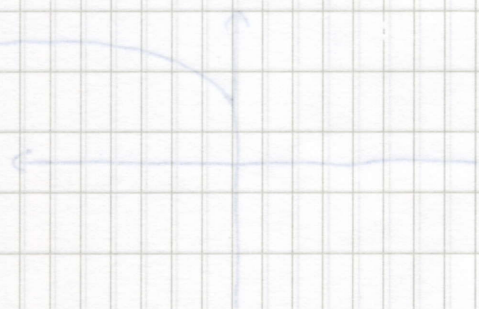


$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \end{aligned}$$

Дефиниция на Хајне: Казваме, че $f(x)$ е непрек. в x_0 ако за $\forall$ редица $x_n \in D(f)$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ имаме $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$ (редицата $f(x_n)$).

Дефиниция на Коши: Казваме, че $f(x)$ е непревзката в x_0 , ако за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, та че ако $x \in D(f)$ и $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (такова че).

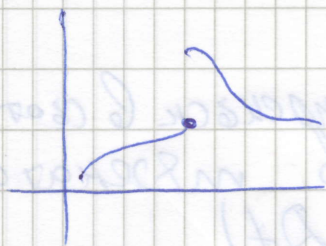
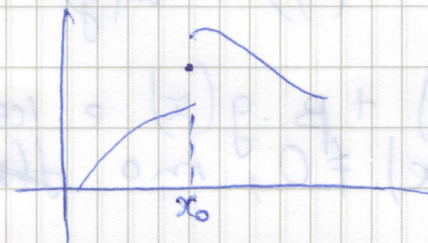
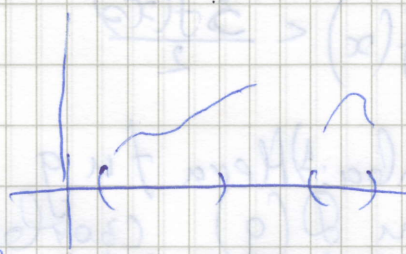
$$\text{и } |x - x_0| < \delta, \text{ то } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



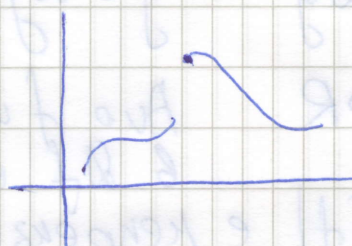
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ е непрекъснатата отляво в т. $x_0 \in D(f)$ ако $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$

$$x \rightarrow x_0 \quad (f(x_0-0) = f(x_0))$$



непрекъснатата
отляво



непрекъснатата
отдясно

Ако една функция е непрекъснатата отляво и отдясно е просто непрекъснатата.

Твърдение: Нека $f(x)$ е непрекъснатата в т. x_0 и нека $f(x) > 0$. Тогава $\exists$ околност на т. x_0 , в която $f(x) > 0$.

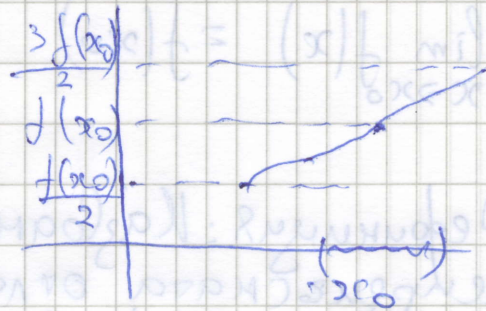
Доказателство: Задаваме $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. От непрекъснатостта по Коши следва, че по това ε може да се намери $\delta > 0$: $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $x \in D(f)$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$$

(войства:) Нека f и g са непрекъснати в $D(f)$ и $D(g)$ съответно, тогава за $x \in D(f) \cap D(g)$



$\alpha f(x) + \beta g(x)$ е непрекъсн. $f(x), g(x)$ е непрекъсната ако $g(x) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ е непрекъсн.

2) Нека $f: Df \rightarrow Dg$ $g: Dg \rightarrow \mathbb{R}$

$g(f(x)): D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ Ако f и g са непрекъснати в Df и Dg , то композицията $g(f)$ е непрекъсн. (в Df)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ x^n \rightarrow x_0^n \end{matrix} \quad P_n(x) \rightarrow P_n(x_0)$$

$$f(x) = \sin x$$

$$\sin x \rightarrow \sin x_0 \text{ при } x \rightarrow x_0 ? \quad |\sin y| \leq |y|$$

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-x_0|}{2} \cdot 1 =$$

$$= |x - x_0|$$

Задаваме $\varepsilon > 0$: За δ е дост. да вземем ε , тъй като от $|x - x_0| < \delta$, т.е. $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$

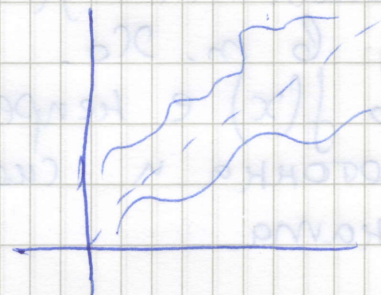
$$|f(x) - f(x_0)| \leq K |x - x_0|$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K |x - x_0|^\alpha$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{непрерывна.}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{непрерывна за } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{непрерывна за } x \neq k\pi$$



-обратна функция

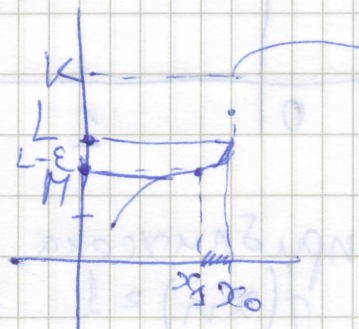
Непрерывность на монотонни функции

Правднение:

Нека $f(x)$ е монотонно растяща и x_0 е вътрешна точка за $D(f)$ ($x_0 \in D(f)$ заедно със своя околност).
 Тогава ~~свѝ~~ $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$$

Доказателство: За $x < x_0$: $f(x) \leq f(x_0)$
 $\Rightarrow M = \{f(x) : x < x_0\}$ е ограничена отгоре
 например с $f(x_0)$. От принципа за
 непрерывност $\Rightarrow \exists L = \sup M = \sup_{x < x_0} f(x)$



Задаваме $\varepsilon > 0$: Тогава $L - \varepsilon$ не е горна граница
 за M . $\exists x_1 \in M : f(x_1) > L - \varepsilon$

~~За $x > x_1$: $f(x) \leq f(x_1)$~~ За $x > x_1, x < x_0$: $L - \varepsilon < f(x) \leq L < L + \varepsilon$

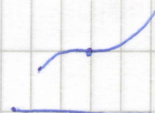
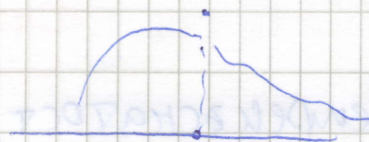
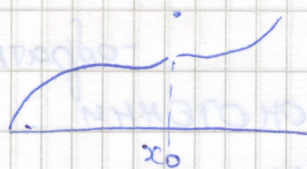
$x \in (x_1, x_0)$; то $f(x)$ е в ε -околност на т. L
 $\delta = x_0 - x_1$. По ε намерихме $\delta : x_0 - \delta < x < x_0$, то

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = L$$

~~Дефиниция~~

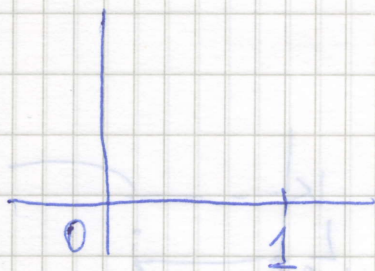
Величината $f(x_0+0) \cdot f(x_0-0)$ се нарича скок на $f(x)$ в т. x_0 .

Ако $f(x)$ е непрекъснатата, то скокът $= 0$. Ако $f(x)$ е монотонна и скокът $\neq 0$ в т. x_0 , то тя е непрекъснатата.



Преизване от I род, е когато $\nexists f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, но
нямаме $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Преизване от II род, не $\exists$ или са $\infty f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$



1, за x -рационални
0, за x -ириционални

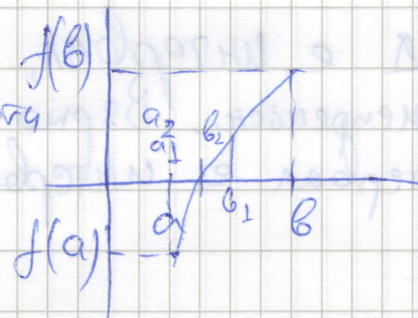
Преизката е във всяка своя точка, така
че $\forall$ ирационално число x_0 може да бъде
приближена с редица от рационални.

$f(x_n) \geq 1$ $f(x_0) = 0$.

Непреривска функција в краен затворен интервал

Твврдение: Теорема на ѓерма: Нека $f(x)$ е непреивската в крайниј затворен интервал $[a, b]$. Нека $f(a)$ и $f(b)$ имаат различни знаци (т.е. $f(a)f(b) < 0$).
Тогаваш $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$

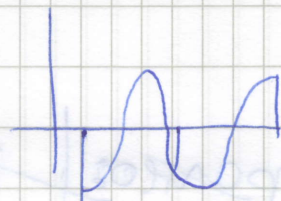
Доказателство: Нека $f(a) < 0, f(b) > 0$.
Делим $[a, b]$ на 2^n равни засти
и с $[a_1, b_1]$ означаваме и-а,
за които $f(a_1)$ и $f(b_1)$ имаат
различни знаци.
 $[a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$



$\{a_n\}$ е монотонно растаща и
ограничена $\Rightarrow a_n \rightarrow \alpha$

$\{b_n\}$ е монотонно намаляваща и
ограничена $\Rightarrow b_n \rightarrow \beta$

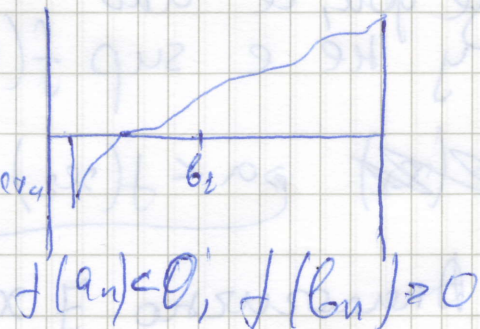
така, че $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$, то след граничен
проход попукава $\alpha = \beta \in \mathbb{C} \quad f(a_n) \geq 0 \Rightarrow f(\alpha) \geq 0$



Познато f е непреивската в т. $\mathbb{C}$ то
 $f(\mathbb{C}) = \lim f(a_n) \geq 0$. Аналог $f(\mathbb{C}) = \lim f(b_n) \leq 0$
 $\Rightarrow f(\mathbb{C}) = 0$

Следствие: Нека $f(x)$ е непреи. в $[a, b]$.

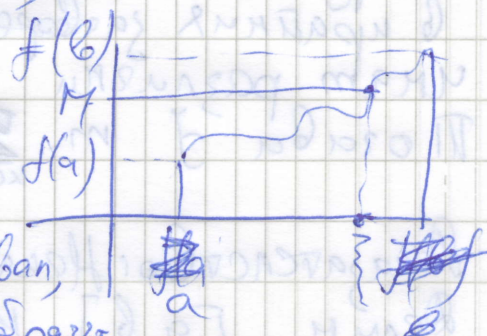
Тогаваш $f(x)$ приема
мж $f(a)$ и $f(b)$.
Всички стойности



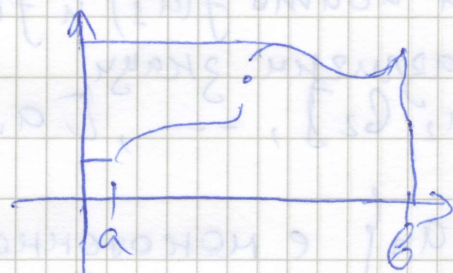
Доказателство: Нека $f(a) < f(b)$, $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
 $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - (f(b)-f(a)) = f(a)$

Нека M е число м/у $f(a)$ и $f(b)$
 $g(x) = f(x) - M$

$$g(a) < 0, g(b) > 0 \Rightarrow \exists \xi: g(\xi) = 0$$



Ако Δ е интервал, то $f(\Delta)$ е интервал, за f непрекъсн. Вярно, ли, е че ако образът на интервал е интервал $\Rightarrow$ функцията е непрекъсната? - за домашно



За контролно: IV вярдение:

~~Да се докаже, че ако~~

IV вярдение: Нека $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ и Δ е интервал и f е непрекъсната в него, тогава $f(\Delta)$ е интервал

Доказателство: $a := \inf_{x \in \Delta} f(x)$ $b := \sup_{x \in \Delta} f(x)$

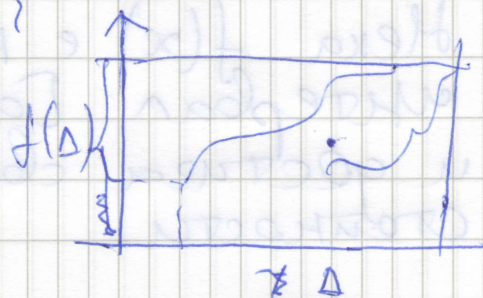
Ще докажем, че ако $a < y < b \Rightarrow \exists x \in \Delta: f(x) = y$
 y не е $\sup f(x) \Rightarrow \exists x_1: f(x_1) > y$

~~y не е $\inf f(x) \Rightarrow \exists x_2: f(x_2) < y$~~

Аналогично $\exists x_2: f(x_2) < y$

тъй като f е непрекъсната, то тя приема всички стойности н/у $f(x_1)$ и $f(x_2) \Rightarrow \exists \xi$

$$f(\xi) = \eta$$



Ако $f(x)$ е монотонно растяща и

$f(\Delta)$ е интервал за $\forall \Delta$, то тя е непрекъсната

тъй като f е монотонна, то тя е кривската от I ред. От това, че $f(\Delta)$ няма дупки $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ скокът $\Rightarrow$ в т. $x_0 = 0!!!$ f е непрекъсната

Твърждение: Нека f е непрекъсната и строго растяща. Тогава f^{-1} тя е непрекъсната, строго растяща.



Нека $g(y)$ е обратната на $f(x)$, нека $y_1 \leq y_2$. Ако допуснем, че $g(y_1) \geq g(y_2)$, то $f(g(y_1)) \geq f(g(y_2))$ $\Rightarrow$ тъй като f е растяща $y_1 \geq y_2 !!!$

$$\begin{array}{l} \text{и-л} \quad \text{и-л (интервал)} \\ f: \Delta \rightarrow \Delta_1 \\ g: \Delta_1 \rightarrow \Delta \end{array}$$

$\Rightarrow$ при g образът на и-л е и-л + монотонност $\Rightarrow$ непрекъснатост

Теорема на Вайерштрас:

Нека $f(x)$ е непрекъснатата в затворения интервал $[a, b]$. Тогава $f(x)$ е ограничена и достига своята най-малка и най-голяма стойности.

Примери: Ако интервалът не е затворен, то $f(x)$ може да не е ограничена. $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекъснатата в $(0, 1)$, но е неограничена.

Ако интервалът не е краен, то $f(x)$ може да не е ограничена $f(x) = x^2$ в $(5, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}$ за $(0, 1]$ - ограничена, но $\inf$ не се достига

Доказателство: 1) $f(x)$ е ограничена. Допускаме обратното т.е. $f(x)$ е неограничена. Тогава за $\forall n$ може да се намери $x_n \in [a, b]: f(x_n) > n$. (т.е. като x_n е о.р. м/у a и b)

По теоремата на Болцано-Вайерштраас: $\Rightarrow \exists x_{n_k}$, която е сходяща. $x_{n_k} \rightarrow x_0$ $k \rightarrow \infty$

От неравенствата $a \leq x_{n_k} \leq b$ с граничен преход по $k \rightarrow +\infty \Rightarrow a \leq x_0 \leq b$

Използваме, че f е непрекъснатата в т. x_0 : $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$

Но $f(x_{n_k}) > n_k \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow \infty$!!!

~~(т.е. x_k е о.р. м/у a и b)~~

$a < x_{n_k} < b$ Ако допуснем, че f е непрекъснатата в (a, b)
 $a \leq x_0 \leq b$ и се ползва $x_0 = a$, то не можем да
 продължим. Не можем да напишем
 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$

$$f(x) = \frac{1}{x} ; (0, 1)$$

$$\frac{1}{x_{n_k}} > n \quad x_n < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow 0, \text{ но } f(x) = \frac{1}{x} \text{ не е непрекъсната в т. } 0.$$

3 доказани $\rightarrow$ могат да повлияят положително/у съвременно.
 2 контролни-задачи $\rightarrow$ с. архив. 2, 4, 5
 1 контролно $\rightarrow$ теория

2) Пазят като по гл. 1: $OP = \{f(x), x \in [a, b]\}$ е ограничено, то то има $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M$ и $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = m$

Да допуснем, че $\sup f(x) = M$, не се достига, т.е.
 $f(x) < M$ за $\forall x \in [a, b]$.

Образоваме $g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \Rightarrow g(x)$ е непрекъснатата

По гл. 1) $g(x)$ е ограничена $\Rightarrow \exists c: \frac{1}{M - f(x)} \leq c$

$$\frac{1}{c} \leq M - f(x) \quad f(x) \leq M - \frac{1}{c} !!! \quad M - \frac{1}{c} \text{ излиза, че}$$

е горна граница за $f(x)$, а на е най-малката горна
 граница е M .

Равномерна непрекъснатост

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ е равномерно непрекъсната в множеството M , ако за $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такава че ако $|x' - x''| < \delta$, $x', x'' \in M$, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$x'' = x_0$ От равномерната непрекъснатост $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ непрекъснатост в M .

Примери: 1) $f(x) = x^2$ в интервала $M = [0, a]$
 $|x'^2 - x''^2| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| \leq \delta \cdot (|x'| + |x''|) \leq 2a\delta < \varepsilon$

$$2a\delta < \varepsilon \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2a} \text{ достат. } \delta = \frac{\varepsilon}{4a}$$

$\Rightarrow f(x) = x^2$ е равномерно непрекъсната в $M = [0, a]$

2) $f(x) = x^2$ за $M = [0, +\infty)$ Искаме да покажем, че

f не е равномерно непрекъсната в M , т.е. $\exists \varepsilon_0$, такава че за $\forall \delta > 0$ да има x', x'' , $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$

$$x' = \frac{1}{\delta}, \quad x'' = x' + \frac{\delta}{2} \geq x' = \frac{1}{\delta}$$

$$x'' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

$$|x' - x''| < \delta \quad |f(x') - f(x'')| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| = \frac{\delta}{2} \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)$$

$$\geq 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

$$\varepsilon_0 = 1$$

Теорема: Всяка непрекъснатата, в краен затворен интервал, функция е равномерно непрекъснатата.

Доказателство: Допускаме, противното
 $\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 \exists \text{ двойка } x_{(\delta)}' \text{ и } x_{(\delta)}'' : |x_{(\delta)}' - x_{(\delta)}''| < \delta$

$$\text{но } |f(x_{(\delta)}') - f(x_{(\delta)}'')| \geq \varepsilon_0$$

$$(\delta) \sim \delta = \frac{1}{n} \quad x_{(\frac{1}{n})}' = x_n'$$

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}, \text{ но } |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0$$

Намираме $x_{n_k}' \rightarrow x_0'$ по Болцано - Вайерштрас, тъй като x_n' е ограничена в крайния интервал

От редицата x_{n_k}'' ~~из~~ избираме сходяща подредица

$x_{n_{k_e}}'' \rightarrow x_0''$ Тъй като $x_{n_{k_e}}'$ е подредица на

сх. редица x_{n_k}' , то тя ще клони също x_0'

Имаме $|x_{n_{k_e}}' - x_{n_{k_e}}''| < \frac{1}{n_{k_e}}$ след граничен преход
по $k \rightarrow \infty$

$$|x_0' - x_0''| \leq 0 \quad \text{От тук} \Rightarrow x_0' = x_0'' = x_0$$

От неравенството $|f(x_{n_{k_e}}') - f(x_{n_{k_e}}'')| \geq \varepsilon_0$

$$\text{получаваме } |f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \quad !!!$$

$$\varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad x', x'' \in M$$

$$|x' - x''| < \delta, \text{ то } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

f е непрекъсн. в $[a, b] \Rightarrow$ равномерно непрекъснатост

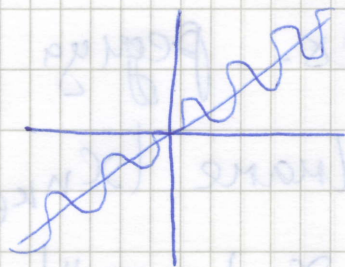
Пример на функция равномерно непрекъсн.
 $(-\infty, +\infty)$ (в произв. интервал)

$$f(x) = x + \sin x$$

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |\sin x' + x' - \sin x'' - x''| \leq \\ &\leq |\sin x' - \sin x''| + |x' - x''| = 2 \left| \sin \frac{x' - x''}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x' + x''}{2} \right| + |x' - x''| \\ &\leq 2 \cdot \frac{|x' - x''|}{2} + |x' - x''| = 2|x' - x''| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Достатъчно е да вземем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$|f(x') - f(x'')| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



Функции на Липшиц

Деф: Назваме, че $f(x)$ удовлетворя условието на Липшиц в $\odot M$ ако $\exists \text{ const } 0 < k < \infty$, такава че $|f(x') - f(x'')| \leq k \cdot |x' - x''|$

Пъверение: $\forall$ функция на Липшиц е равномерно непрекъсната в $\odot M$.

Доказателство: $|f(x') - f(x'')| \leq k |x' - x''|$
 по ε търсим $\delta = |x' - x''| < \delta$, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$
 Взимаме $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ $|x' - x''| < \delta = \frac{\varepsilon}{k}$

$$|f(x') - f(x'')| < k \cdot \delta = \varepsilon$$

Теорема за Осцилацията

Дефиниция:

Осцилацията ω за f на Δ наричаме разликата

$$\sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{x \in \Delta} f(x) \quad (M - m)$$

Теорема за осцилацията:

Нека f е непр. в $[a, b]$. Тогава за $\forall \varepsilon > 0$ може да се намери деление на $[a, b]$ на интервалите Δ_k , такова че осцилацията в/у Δ_k да е $< \varepsilon$.
 Краен брой Δ_k .

Доказателство: Тъй като f е непрекъсната в $[a, b]$, то тя е равномерно непрекъсната там.

По $\varepsilon > 0$ намираме $\delta > 0$ $|x' - x''| < \delta$, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

на $\Delta_k = [a_k, b_k]$ интересуваме се,



от осцилацията в/у Δ_k , т.е. $\sup_{x \in \Delta_k} f(x) - \inf_{x \in \Delta_k} f(x) =$

$$= M_k - m_k$$

От непрекъснатостта на f в/у $[a_k, b_k]$ по теоремата на Вайерштраас $\Rightarrow \exists x'_k$ и x''_k , в които се достигат M_k и m_k .

$0 \leq M_k - m_k = f(x_k') - f(x_k'') < \epsilon$, тої иаго
 $|x_k' - x_k''| < \delta$, тої иаго са в интервал
 $[a_k, b_k]$ с дължс. $\frac{\delta}{2}$) ~~краен брой~~ Δ_k

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{y}$$

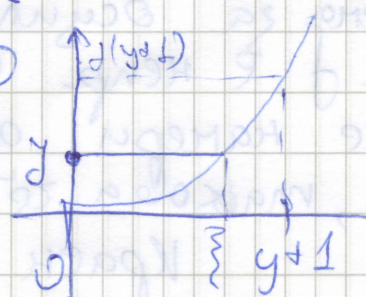
Съществуване $\sqrt[n]{y}, y \geq 0$

$$\sqrt[n]{y}$$

Дадено е $y \geq 0$, искаме да
 докажем, че $\exists \xi = \xi^2 = y, \xi \geq 0$

$$f(x) = x^2$$

$$f(0) = 0$$



$$f(y+1) = (y+1)^2 = y^2 + 2y + 1 > y$$

$$\frac{f(0)}{f(y+1)}$$

$$f(\xi) = y \quad \xi^2 = y$$

$a > 1$ a^x е def. в $\mathbb{Q}$ (рационални числа)
 $x \in \mathbb{R}$

$$M_x = \{a^y, y \in \mathbb{Q}, y \leq x\}$$

$$\sup M_x = a^x$$

$$N_x = \{a^y, y \in \mathbb{Q}, y \geq x\}$$

$$\inf N_x = a^x$$

$$a = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

$$\left| \begin{array}{l} a^x \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right| \quad a^x = a^{x-x_0} \cdot a^{x_0} \rightarrow 1 \cdot a^{x_0}$$

$$a^x \rightarrow a^{x_0}$$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow$$

1.1.62

$$a^x \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$a^x \rightarrow a^{x_0}$$

$$a^x = a^{x-x_0} \cdot a^{x_0} \rightarrow 1 \cdot a^{x_0}$$

a^x — строго растяща
непрерывна

$\log_a x$ — обратна функция на a^x

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^x = x$$

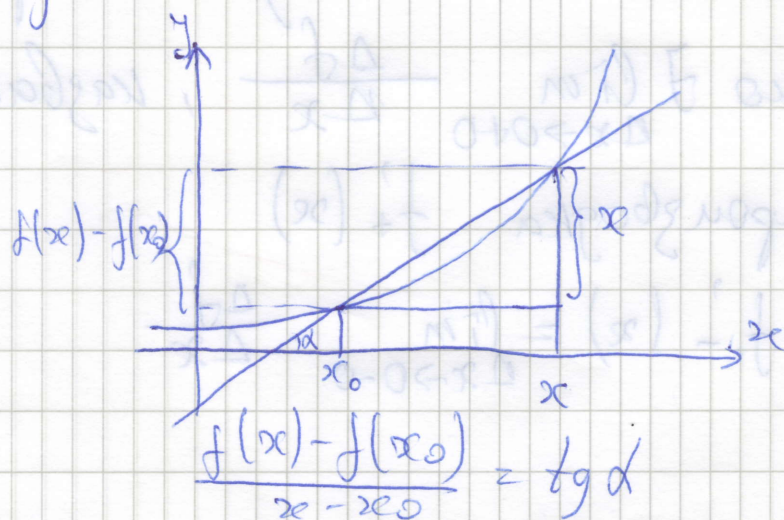
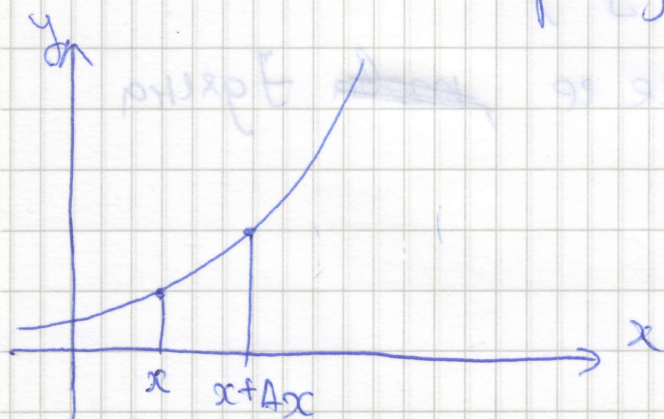
От дефиниция на
обратна функция

$$\log_e x = \ln x \quad (\text{или } \log x)$$

натурален
логаритъм

$\lg x$ — десетичен логаритъм
 $a \geq 10$

Производни



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ - гранична стойност на $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ или $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ докато $x \rightarrow x_0$

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ е диференцируема (диференцируема) в т. x_0 , ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ съществува.

ако $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и тоя е краен.

(стойността на тази граница наричаме производна на $f(x)$ в т. x_0 и бележим $f'(x_0)$)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Δx е карактеристиката от x до $x + \Delta x$

Лява и дясна производна

Ако $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, казваме се ~~лева~~ дясна

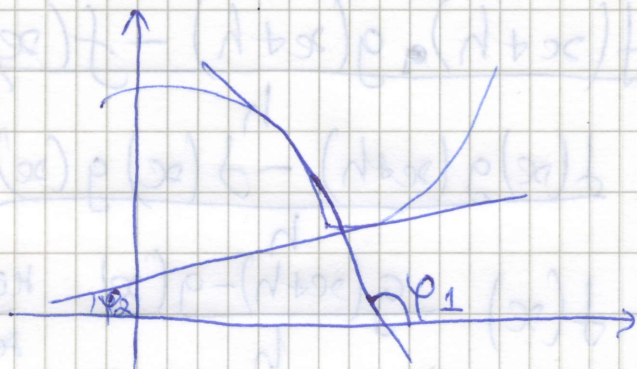
производна $f'_+(x)$

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Ано

$$f'_+(x_0) = \operatorname{tg} \varphi_2$$

$$f'_-(x_0) = \operatorname{tg} \varphi_1$$



(вспомогательные: 1) Если $f(x) \equiv c \Rightarrow f'(x) = 0$

2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

3) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4) Если $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$, то $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Доказательство: 1) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

2) $[f(x) + g(x)]' = ?$

$$\frac{f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned}
 3) \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \\
 &+ \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \\
 &+ f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \xrightarrow[\text{на } g]{\text{непрерывно}} f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)
 \end{aligned}$$

дифференциална част на g

Използвахме, че ако $g(x)$ е диференцируема, то тя е непрекъсната. Ще го докажем.

$$g(x+h) - g(x) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x) \cdot 0 = 0$$

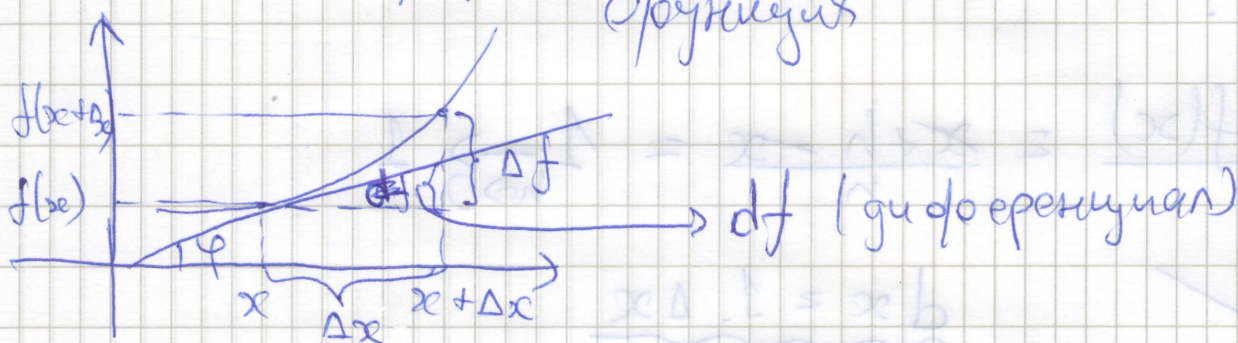
$$4) \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{h g(x) g(x+h)} \rightarrow \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right]' =$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[\frac{1}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} - \frac{g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$5) [C f(x)]' = 0 \cdot f(x) + C \cdot f'(x)$$

Дифференциал -
Дифференциране на сложна (съставна)
функция



$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \Delta x}{\Delta x}$$

$$z(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x) \Delta x$$

$$\frac{z(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \quad z(\Delta x) = o(\Delta x)$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x + z(\Delta x)$$

$$\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x) \cdot \Delta x$$

$$\parallel$$

$$df \rightarrow 0$$

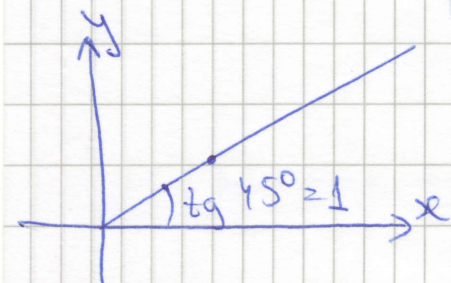
(**) Дифференциал: Дифференциал на f в т. x
наричаме линейната част на нарастването
(от 1-степен) Δf на функцията в $f(x)$

$$\Delta f = f'(x) \Delta x$$

Ано вземем $f(x) \equiv x$

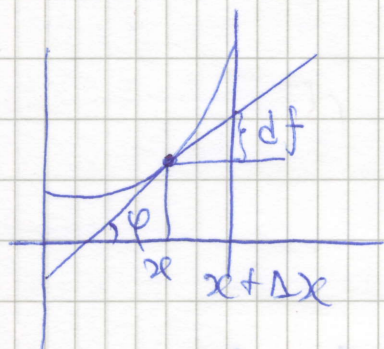
$$f'(x) = ?$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h - x}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$



$$dx = 1 \cdot \Delta x$$

$$\boxed{df = f'(x) dx}$$



$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\boxed{\Delta f = f'(x) \Delta x + \underbrace{o(\Delta x)}_{o(\Delta x)} \Delta x (*)}$$

$$o(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

Теорема: Нека $f(x): (a, b) \rightarrow (a, b)$ е диференцируема
 $g(y): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема

Тезис:

$F(x) = g(f(x))$ е диференцируема и

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Доказателство: $g(y + \Delta y) - g(y) = g'(y) \Delta y + \beta(\Delta y) \Delta y (**)$

$$\beta(\Delta y) \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} 0$$

Даден $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ има $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$$

Прилагаме (***) за $y = f(x)$, за да е диференцируема $\Delta y = \Delta f$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{g(f(x) + \Delta f) - g(f(x))}{\Delta x} \stackrel{(***)}{=} \frac{g'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y}{\Delta x}$$

$$\stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{=} g'(f(x)) = \underbrace{\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)}_{\substack{\downarrow f'(x) \\ \rightarrow 0}} + \beta(\Delta y) \underbrace{\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)}_{\substack{\downarrow f'(x) \\ \rightarrow 0}} \Rightarrow g'(f(x)) - f'(x)$$

Когато $\Delta x \rightarrow 0$, тъй като f е непрекъсната, то $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0$, т.е. от $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$

Нека $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и е строго монотонна
($\Leftrightarrow f'(x) > 0$) и диференцируема

Образът на интервал при непрекъснатата функция f е интервал (c, d)

$g: (c, d) \rightarrow (a, b)$ - обр. функция

$$g(f(x)) = x$$

$$g(y)$$

$$g(y)$$

$$\Delta y$$

$$\Delta g = g(y + \Delta y) - g(y)$$

За Δx взимаме Δg

$$y + \Delta y = f(g(y + \Delta y)) = f(g(y) + \Delta g) = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta g}} = \frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}} \rightarrow \frac{1}{f'(x)}$$

$$g(f(x)) = x \quad x' = 1 \quad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Следствие: Инвариантност на формулата на първа диференциал.

$$dy = dF(f(x)) = F'(f(x)) \cdot \overbrace{f'(x) dx}^{y = f(x)} = dF(y)$$

$$\boxed{dF(y) = F'(y) \cdot dy}$$

$$\boxed{df = f'(x) dx}$$

Таблица на производните

$$1. (x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{R}$$

$$8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2. (e^x)' = e^x$$

$$9. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$10. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4. (\sin x)' = \cos x$$

$$11. (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$5. (\cos x)' = -\sin x$$

$$12. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$13. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Доказателство:

$$1) \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \frac{1}{x \frac{h}{x}} \cdot \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \underbrace{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}_{\rightarrow \ln e} \rightarrow \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

$$(1+y)^{\frac{1}{y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} e$$

$$2) \ln e^x = x \quad (\ln y)' = \frac{1}{y}$$

$$x \cdot \frac{x+h-x}{h} \geq 1 \rightarrow 1$$

$$\frac{1}{e^x} (e^x)' = 1 \quad (e^x)' = e^x$$

$$3) x^n = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$$

$$(x^n)' = e^{n \ln x} (n \cdot \ln x)' = e^{n \ln x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^n}{x} = n x^{n-1}$$

За теоретичното контролно: (сряда)

$$1. (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

2. Всяка сходяща редица е ограничена

3. Лема за полизайт

4. a е точка на съставяне на редицата $\{a_n\}$
 $\exists$ подредица $\{a_{n_k}\}$, клоняща към a .

5. Множеството M е неограничено отгоре $\Leftrightarrow$
 $\exists$ ~~не~~ редица ~~a_n~~ $a_n \rightarrow \infty$

6. Теорема на ъорема: $f(a)f(b) < 0$ за непрекъсната функция.

7. Всяка непрекъсната в $[a, b]$ функция е ограничена.

$$4) \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos(x + \frac{h}{2})$$

$$\rightarrow 1 \cdot \cos x$$

$$5) \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (0 - 1) = -\sin x$$

$$6) (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7) аналогично

$$\begin{aligned} 8) \sin(\arcsin x) &= x \\ \cos(\arcsin x) (\arcsin x)' &= 1 \end{aligned}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

9) аналогично

$$\begin{aligned} 10) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x \\ \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} \cdot (\operatorname{arctg} x)' &= 1 \end{aligned}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

11) аналогично

$$12) (a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

13) аналогично

Гиперболически функции

$\text{sh } x$ - синус гиперболическ

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{sh } 0 = 0$$

$$\text{ch } 0 = 1$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \quad (\text{sh } x)$$

$$\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$$

$$(\text{sh } x)' = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x$$

$$(\text{ch } x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$$

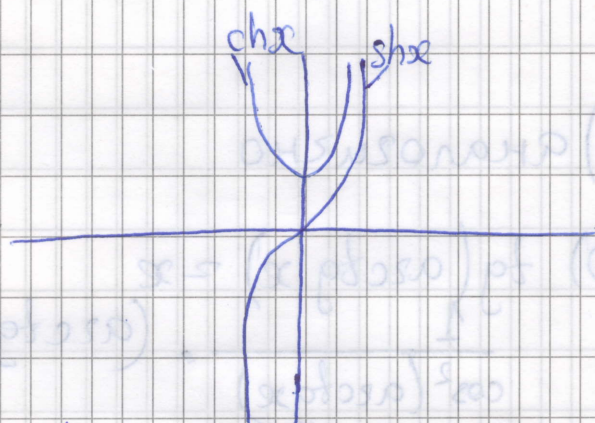
$$\text{sh}(\text{arsh } x) = x$$

$$(\text{arsh } (\text{sh } y)) = y$$

Дифференцируем $\text{sh}(\text{arsh } x) = x$
 $\text{ch}(\text{arsh } x) (\text{arsh } x)' = 1$

$$(\text{arsh } x)' = \frac{1}{\text{ch}(\text{arsh } x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{arsh } x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(\text{arch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$



$$\left(\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (0+2x) \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$\left(\sqrt{x} \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \stackrel{?}{=} \operatorname{arcsinh} x$$

$$\text{Dann } \operatorname{sh}(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) = x$$

$$\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\text{n.z.} = \frac{1}{2} \left(e^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - e^{-\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^2 - 1}{x + \sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 - 1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{2x(x + \sqrt{1+x^2})}{2(x + \sqrt{1+x^2})} = x$$

$$\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}) = x$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{sh}(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) = x$$

$$\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}) = x$$

$$\ln(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln e^x = x$$

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

$$y' = e^{v(x) \ln u(x)} (v(x) \ln u(x))' = u(x)^{v(x)} (v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)})$$

$$y = u(x)^{v(x)}$$

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$$

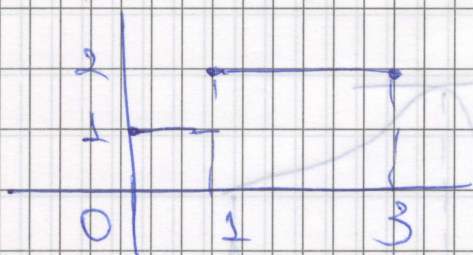
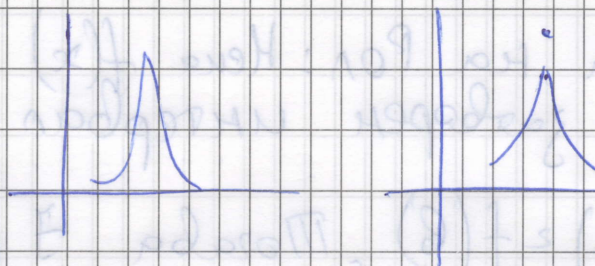
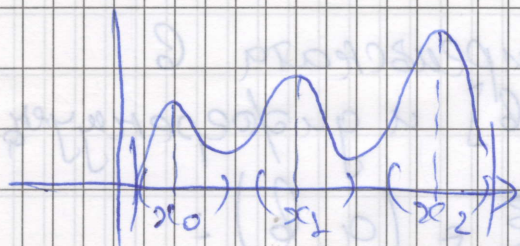
$$y = x^x$$

Теорема на Рол. Теорема на Лагранж
за крайните нараствания.

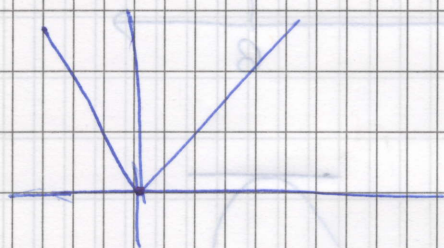
Теорема на Коши.

ОТТС - осн. теорема на интегралното
смятане

Дефиниция. Казваме, че $f(x)$ има локален максимум
в т. x_0 , ако $\exists$ околност V на т. x_0 . $V \in \mathbb{D}$, т. че
 $f(x) \leq f(x_0)$ за $\forall x \in V$.



$f(x) \geq f(x_0)$ - локал. минимум



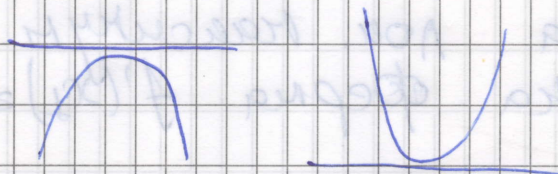
Теорема на Ферма:
Ако $f(x)$ е диференцируема в т. x_0 и има в нея локал. екстремум (min или max), то производната в тази точка е равна на 0. $f'(x_0) = 0$

Доказателство: Нека имаме локал. макс. в т. x_0

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow - \leq 0 \quad \neq 0$$

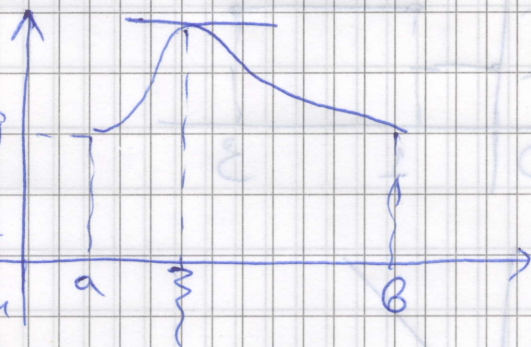
$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{н.з.} &= f'(x_0) & f'(x_0) &\leq 0 \\ & & f'(x_0) &\geq 0 \\ & & \downarrow & \\ & & f'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

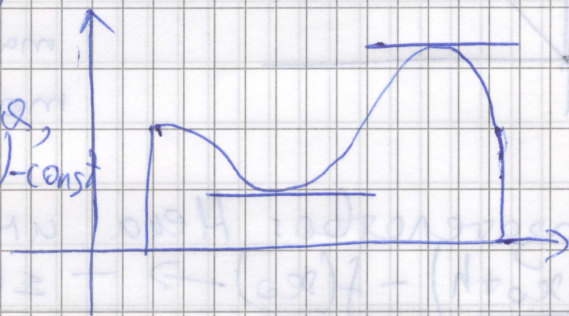


Теорема на Рол: Нека $f(x)$ е непрекъснатата в крайния затворен интервал $[a, b]$ и диференцируема в (a, b) .
 Нека $f(a) = f(b)$. Тогава $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Доказателство: $f(x)$ е непрекъснатата в $[a, b]$. По т. на Вайерштраас $\exists x_1$ и $x_2 \in [a, b]$ които се достигат най-голяма и най-малка стойности непрекъснатата в $M = f(x_1)$, $m = f(x_2)$.



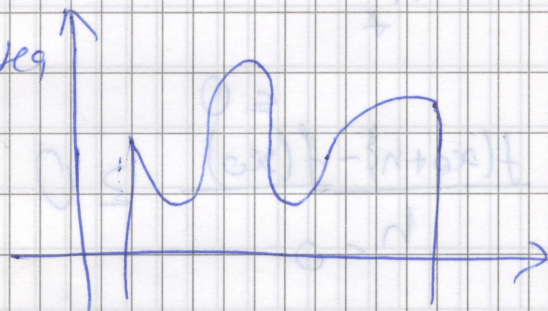
Ако x_1 и x_2 са в двата края, то $M = m$, тъй като $f(a) = f(b) = \text{const}$.



$\Rightarrow f'(x) = 0$ за $\forall x \in (a, b)$

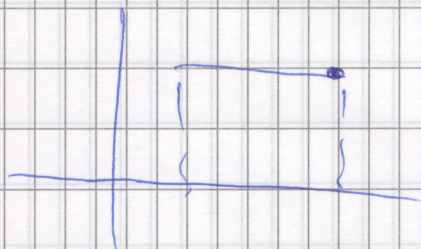
Нека например x_1 е вътрешна точка за $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) \leq f(x_1) = M$$

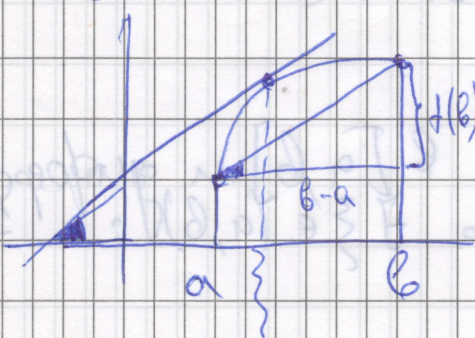


$\Rightarrow x_1$ е точка на лок. максимум

$\Rightarrow$ по теорема на Ферма $f'(x_1) = 0$



Теорема на Лагранже за крајните вредности



Нека $f(x)$ е непрекинуто во $[a, b]$ и диференцируемо во (a, b) .

Тогаша $\exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Доказателство: Образуваме функцијата $\varphi(x) = f(x) - kx$ каде k е определен, така се $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$f(a) - ka = f(b) - kb$$

$$k(b-a) = f(b) - f(a)$$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

За φ прилагаме теоремата на Рол:

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : \varphi'(\xi) = 0$$

$$\varphi'(x) = f'(x) - k$$

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - k$$

$$k = f'(\xi)$$

Теорема на Коши (Обобщена теорема за краиците на растежания)

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b) . Ако $g'(x) \neq 0$. Тогава $\exists \xi \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Забележка: Не е нужно да искате $g(b) \neq g(a)$, тъй като $g(b) = g(a)$ то по теоремата на Рол g' ще е нула някъде в (a, b) .

Доказателство:

поз: $\varphi(x) = f(x) - kg(x)$ търсим k :

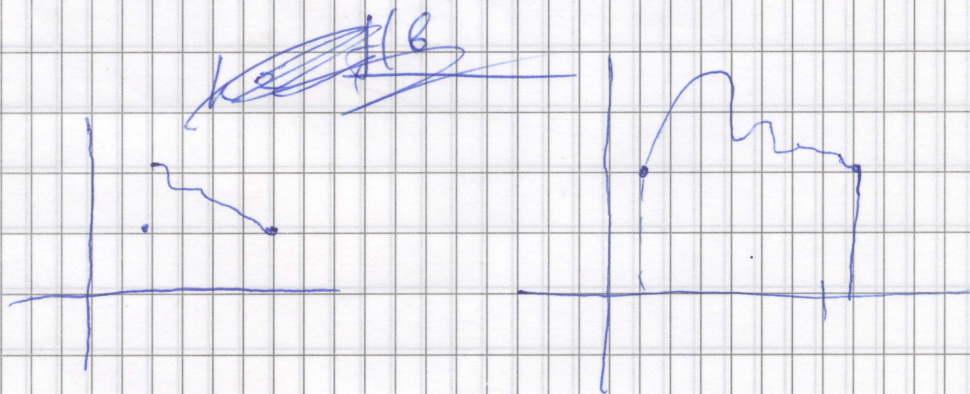
$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \quad k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По теорема на Рол $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$
 $\varphi'(\xi) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= f'(x) - kg'(x) \\ \varphi'(\xi) &= f'(\xi) - kg'(\xi) = 0 \end{aligned}$$

$$k = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$



Основна теорема на интегралното смятане (ОПИС)

Нека $f'(x) = 0$ в (a, b) . Тогава $f(x) = \text{const}$ в (a, b)

Доказателство: Нека $x_0 \in (a, b)$. Нека x е друга точка от (a, b) . За интервала с краища x и x_0 прилагаме теоремата на Лагранж

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$$

$$\forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = \text{const}$$

Примери: Нека разгледаме уравнението:
 $x^n + px + q = 0$

а) ако n е нечетно $n = 2k+1$ у-ието има най-много 2 реални корена

б) ако $n = 2k$, у-ието има най-много 2 р.к. (реални корена)

$$f(x) = x^n + px + q$$

$$f'(x) = nx^{n-1} + p$$

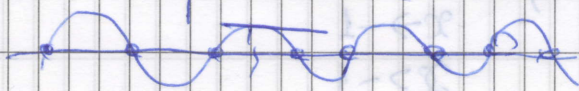
$$f'(x) = 0$$

$$nx^{n-1} = -\frac{p}{n}$$

а) $n-1$ е четно, тогава $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ има най-много 2 р.к.

Да разгледаме корените на у-ието $f(x) = 0$

$$f'(\xi) = 0$$



Между всяки два корена на y -члента
 $f(x) = 0$ има поне един корен на y -члента
 $f'(x) = 0$

$$x^{n-1} = -\frac{p}{a} \rightarrow 1 \text{ р.к}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1; 1])$$

$$1) \quad x \in (-1, 1) \quad f(x) = \arcsin x + \arccos x - \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{const} \quad f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos(0) - \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{За } x = \pm 1$$

Вариант — непосредствена проверка

$$x = 1 \quad f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = 0$$

Вариант: $f(x) \in \text{непрек. в } [-1; 1]$

0 е непрекъснатата в $[-1, 1]$

$$f(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 0 = 0$$

Теорема: Ако $f'(x) > 0$ в (a, b) , то $f(x)$ е строго растяща в (a, b) . ~~Ако $f'(x) < 0$~~

Ако $f'(x) < 0$ в (a, b) , то $f(x)$ е строго намаляваща.

$$\text{Нека } x_1 < x_2 \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

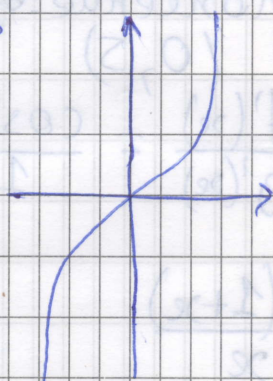
$f(x_2) > f(x_1)$ - строго растяща

Ако $f(x)$ е строго растяща $\Rightarrow f'(x) > 0$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$y = x^3$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Типично не Лопушан}$$

Т.1: Если $f(x)$ и $g(x)$ сг. в (a, b) , $f'(x)$ и $g'(x)$

$$\exists \text{ и } g'(x) \neq 0$$

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\text{Ако } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \text{ то } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и равно } e = l.$$

$$\text{Примеры: } f(x) = \sin x \quad g(x) = x \quad g'(x) = 1$$

$$(0, 5) \quad f'(x) = \cos x$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1, \text{ т.е. } \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\textcircled{2} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \frac{\frac{1}{1+x}}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\exists \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1+x^2)3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Контрпример: Може ли да $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, без да $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$? Да

$f(x) = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}$ (ограничена) $g(x) = \sin x$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 0$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cdot \cos \frac{1}{x} - x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} [2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}]$
 няма графика

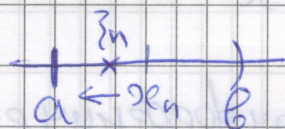
~~$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$~~

Доказателство: f и g са дефинирани в (a, b) .

Додефинираме $f(x)$ и $g(x)$ в т. a , като положим $f(a) = g(a) = 0$. Тогава $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати и в т. a (функционалната стойност ~~не~~ в т. a =

= графиката на функцията при $x \rightarrow a \Rightarrow$ в $[a, b)$

Нека $x_n \rightarrow a$
 $x_n > a$



В $[a, x_n]$ f и g са непрекъснати, а в отворения (a, x_n) са диференцируеми и $g'(x) \neq 0$. Прилагаме обобщената теорема за крайните нараствания (на Коши) за интервала $[a, x_n]$. Намираме т. $z_n \in (a, x_n)$, така че

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \quad (*)$$

Пускате ~~на~~ x_n да клони към a , тогава $\xi_n \rightarrow a$

при $x_n \rightarrow a$, $\xi_n \rightarrow a$ и дясната част на $(*)$ клони към l . $\Rightarrow$ и лявата част клони към l .

$$\lim_{x_n \rightarrow a} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{\xi_n \rightarrow a} \frac{f(\xi_n)}{g(\xi_n)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{\xi_n \rightarrow a} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \stackrel{\text{уч.}}{=} l$$

Задача: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 \cos \frac{1}{x}}{\sin x - x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{\sin x - x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0 \cdot 1 = 0$

ано $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{\cos x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \cdot 1}{\cos x} = 12$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^p \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-p}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\frac{f}{g} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

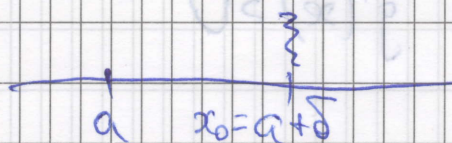
T2: $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в отворения интервал (a, b) , като $g'(x) \neq 0$. Нека $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$. Тогава

Нека $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$. Тогава

ано $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Доказателство:

1. (н.) f е число. Заг. $\varepsilon > 0$, намираме δ :
ако $a < x < a + \delta$, то $\left| \frac{f(x)}{g'(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3}$



За интервала $[a, x_0]$ прилагаме обобщената теорема за крайните нараствания (на Коши).

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(*) < \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{|f(x_0)|}{|g(x)|} + \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|g(x) - g(x_0)|} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|g(x) - g(x_0)|} \cdot \frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}$$

от (*) $\Rightarrow$ е близо до l
 $\Rightarrow$ ограничена

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ за
 x достатъчно
близко до a

2. $l = \infty$ $\frac{1}{l} = 0$, т.е. $\frac{g'(x)}{f'(x)} \rightarrow 0$ в част 1 има условие $f'(x) \neq 0$

$$\left| \frac{g'(x)}{f'(x)} \right| \leq 1 \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \geq 1 \quad \text{Ако } g'(x) > 0$$

$$|f'(x)| \geq g'(x) > 0 \quad f'(x) \text{ не се нулира}$$

$$\text{Ако } g'(x) < 0, \text{ то } |f'(x)| \geq |g'(x)|$$

$$\text{Ако } g' < 0, \text{ то } f' < 0, \text{ т.к. } \frac{f'}{g'} \rightarrow +\infty$$

$$-f'(x) \geq -g'(x) > 0$$

ТЗ: Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в

$$(c, +\infty). \text{ Нека } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

$$\text{Потрба ако } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \text{ то } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Т4: Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в $(c, +\infty)$, ако $g'(x) \neq 0$. Нека $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

$$\text{Потрба ако } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \text{ то } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$$c > 0$$

Доказателствата ТЗ и Т4,

Обратни функции $F(t) = f(\frac{1}{t})$, $G(t) = g(\frac{1}{t})$, $t \in (0, \frac{1}{c})$

$F(t)$ и $G(t)$ са диференцируеми в $(0, \frac{1}{c})$

Когато ~~$t \rightarrow 0$~~ $t \rightarrow 0$, $\frac{1}{t} \rightarrow \infty$

Можем ли да приложим към $F(t)$ и $G(t)$ Т1 и Т2?

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

$G'(t) \neq 0$, тъй като $g'(\frac{1}{t}) \neq 0$. Можем да приложим Т1 и Т2. В $T1$ имаме неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$, а в Т2 $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, това отговаря на неопределеността в ТЗ и съотв. Т4.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{F(t)}{G(t)} = l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0, \infty]$$

$$fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{0}{0}$$

$$[\infty - \infty] \quad f - g = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} = \left[\frac{0-0}{0-0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f^g = e^{g \ln f}$$

$$g \rightarrow 0 \quad \ln f \rightarrow \infty$$

$[0^0]$ — область с
Nonuman

$[0^\infty]$ область с
Nonuman

$$g \rightarrow \infty \quad \ln f \rightarrow 0$$

$$g \rightarrow \infty \quad f \rightarrow 1$$

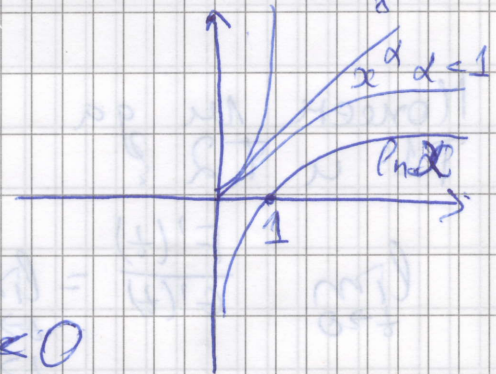
$[1^\infty]$ область с
Nonuman

Примеры: 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^d}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d x^{d-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d x^d}{1} = \infty$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^d}{x^d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln a}{d \cdot x^{d-1}} = \dots =$

$a > 1$
 $d > 0$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\ln a)^k}{d(d-1) \dots (d-k+1) x^{d-k}} = \infty \quad d-k < 0$



$a^x > x^d > \ln x$

3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$

$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(\cot x) =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot \frac{(-1)}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cot x \cdot \cos x} =$

$$\approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \approx 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cot g x^{\sin x} = e^0 = 1$$

Производни от по-високи
ред

t - време

$f(t_0)$ - ниво, изникват за време t_0
- температура на въздуха във време t_0
- сила на тока

$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ - средна скорост на интервал (t_0, t)

$$t \rightarrow t_0 \quad f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

моментна
скорост

$\frac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0}$ - средно
ускорение за $[t_0, t]$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0}$$

$(f'(t_0))' = f''(t_0)$ - ускорение в момент t_0

10.1.91

Втора производна $f''(x)$ наричаме производната на $f'(x)$

$f^{(n)}(x)$ - производна на $f^{(n-1)}(x)$

1. $f(x) = x^\alpha$ $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

~~$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$~~

Доказателство по индукция:

2. $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$

2'. $f(x) = a^x$ $f'(x) = a^x \ln a$, ~~$f^{(n)}(x) = a^x$~~

$f''(x) = a^x (\ln a)^2$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n$

3. $f(x) = \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = (-1)x^{-2}$ $f'''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$, $\dots$,

$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \dots (-n+1)x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

4. $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

$f'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$f''(x) = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$

$f'''(x) = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$

$f^{(4)}(x) = \sin(x + \frac{4\pi}{2})$

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \frac{\pi}{2})$

Индукция $n=1$ - верно

Нека за n могава: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' =$
 $= \left(\sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) \right)' = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) = 1 = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) =$
 $= x + (n+1) \frac{\pi}{2}$

формула на Лейбниц

$$(u \cdot v)^{(n)} = ?$$

$$(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \quad 2 \Rightarrow 3$$

$$\boxed{f'' = u''v + 2u'v' + uv''}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{2}{0} = 1$$

$$f''' = u'''v + u''v' + 2(u''v' + u'v'') + u'v''' + uv''' =$$

$$= u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$$

$$= \binom{3}{0} u^{(3)} v^{(0)} + \binom{3}{2} u^{(2)} v^{(1)} + \binom{3}{1} u^{(1)} v^{(2)} + \binom{3}{3} u^{(0)} v^{(3)}$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$$

$$\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n}$$

формула на Тейлър

формула на Тейлър за полином

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = p_n(x)$$

$$f(0) = a_0 \quad f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

$$+ a_1 + 0$$

$$f'(0) = a_1 \quad f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots + 2 a_2 + 0$$

$$f''(0) = 2 a_2$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} + \dots + k! a_k$$

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

$$f(x) = p_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + f(0)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (\text{формула на Тейлър за полиноми})$$

~~✗~~

31. f - АГ писмен
 02. Π АГ устен
 09. Π - QUC писмен
 10. Π - QUC устен
 15. Π - ПА писмен
 18. Π - УП писмен + устен
 21. Π - ПА устен
- } СЕСИЯ

Формула на Тейлър за
 $(n+1)$ пъти диференцируема
 функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Остатъкът глен във формулата на Пеано:
 $R_n(x) = o((x-a)^n)$

Остатъкът глен във формулата на Лагранж:

Остатъкът глен във формулата на Коши:

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\varphi(a) = R_n(x)$$

$$\varphi(x) = f(0) - f(0) - 0 - \dots - 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 p'(t) &= 0 - \cancel{f'(t)} - \cancel{f''(t)(x-t)} + \cancel{f'(t)} - \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 + \\
 &+ \frac{f''(t)}{2} \cdot 2(x-t) + \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)n(x-t)^{n-1}}{n!} \\
 &= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n
 \end{aligned}$$

$$\psi(x) = (x-a)^p \quad \psi(\xi) = -p(x-a)^{p-1}$$

$$\frac{\psi(a) - \psi(x)}{\psi(a) - \psi(x)} = \frac{\psi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad \text{Rolle}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a & \} & \xi \\
 & \vdots & \\
 x & \} & a
 \end{array}$$

$$\frac{R_n(x) - 0}{(x-a)^p - 0} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}}{-p(x-\xi)^{p-1}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{p \cdot n!}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x & \} & a
 \end{array}$$

$$\theta = \frac{x-\xi}{x-a}$$

$$0 < \theta < 1$$

$$x - \xi = \theta(x-a)$$

$$\xi = x + \theta(x-a)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{p \cdot n!}$$

$$\theta = \frac{\xi - a}{x - a}$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\xi - a = \theta(x-a)$$

$$\xi = a + \theta(x-a)$$

$$x - \xi = x - a + \theta(x-a) = (1-\theta)(x-a)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))(1-\theta)^{n-p+1}(x-a)^{n+1}}{p \cdot n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n+1}(x-a)^p}{n!p}$$

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ x \quad \xi \quad a \end{array} \quad \theta = \frac{\xi - a}{x - a}$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\xi - a = \theta(x - a)$$

$$\xi = a + \theta(x - a)$$

$$x - \xi = x - a - \theta(x - a) = (1 - \theta)(x - a)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))(1 - \theta)^{n+1}P(x - a)^{n+1}}{n!p}$$

$$p \geq n+1 \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{формула на Лагранж}$$

$$p \geq 1 \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))(1 - \theta)^n(x - a)^{n+1}}{n!} \quad \text{формула на Коши}$$

$$R_n(x) = o(x-a)^n \quad \text{формула на Пеано}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

$a=0$ развите по степен на x Маклорен

1. e^x $f'(x) = e^x$ $f^{(n)}(x) = e^x$
 $f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1$
 $e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + R_n(x)$

Ако означем, че $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{array}{c} 0 < \xi < x \\ x < \xi < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} e^{\xi} < e^x \\ e^{\xi} < e^0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{огранич.} \\ \text{относно} \\ n \end{array} \right.$$

Озн. $a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{|x|}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ за достатъчни големи $n: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, т.е. от някакво място нататък редицата $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща. Огр. отдолу $\Rightarrow$ сходяща.
 Нека $a_n \rightarrow e$. Тогава след граничен преход
 $\forall a_{n+1} = \frac{|x|}{n+2} \cdot a_n \quad e = 0 \cdot e \Rightarrow e \leq 0$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2. ~~sin x~~ $f(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$
 $f^{(n)}(0) = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n=2k \\ (-1)^k & n=2k+1 \end{cases}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

Also for $x=0$ $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \leftarrow f^{(n+1)}(x)$$

now know $|\sin(x)| < 1$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3. $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n=2k+1 \\ (-1)^k & n=2k \end{cases}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$4. f(x) = (1+x)^d$$

$$|x| < 1 \quad d = n \quad \text{Сумма по Ньютону}$$

$$f'(x) = d(1+x)^{d-1} \quad f'(0) = d$$

$$f''(x) = d(d-1)(1+x)^{d-2} \quad f''(0) = d(d-1)$$

$$f^{(k)}(x) = d(d-1)\dots(d-k+1)(1+x)^{d-k}$$

$$f^{(k)}(0) = d(d-1)\dots(d-k+1)$$

$$(1+x)^d = \sum_{k=0}^n \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} x^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}$$

$$a \geq 0 \quad \xi = \theta x \quad \xi = 0 + \theta x(x-0)$$

$$R_n(x) = \frac{d(d-1)\dots(d-n)(1+\theta x)^{d-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}$$

$$(1+\theta x) \text{ ограничено}$$

$$\text{за } x > 0 \quad 1 < 1+\theta x < 1+x$$

$$\text{за } x < 0 \quad 1+x < 1+\theta x < 1$$

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \quad -1 < x < \frac{1}{x+1} > 0$$

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} > 0 \Rightarrow \text{знаменатель } 1+\theta x > 0$$

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

$$1-\theta \leq 1+\theta x \\ -\theta < \theta x \quad | : \theta \\ -1 < x$$

$$R_n(x) = \underbrace{(1+O(x))}^{\text{ограничена}} \underbrace{\left(\frac{1-O(x)}{1+O(x)}\right)^{n+1}}^{\text{ограничено}} \underbrace{\frac{x(x-1)\dots(x-n)}{n!}}_{a_n} x^{n+1}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|x(x-1)\dots(x-n-1)|}{(n+1)!} |x|^{n+2}}{\frac{|x(x-1)\dots(x-n)|}{n!} |x|^{n+1}} = |x| \frac{|x-n-1|}{n+1} \stackrel{\text{за доп. големи } n}{\approx} |x| \frac{n+1-d}{n+1} \downarrow 1$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow |x| < 1 \quad |a_{n+1}| < |a_n| \text{ за доп. големи } n$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

$|a_n|$ е монотонно намаляваща ограничена последователност с $0 \Rightarrow |a_n| \rightarrow e$, но $|a_{n+1}| = |x| \frac{n+1-d}{n+1} |a_n|$

$$e = |x| \cdot e$$

$$e \cdot (1 - |x|) = 0$$

$$\neq 0 \Rightarrow e = 0$$

$$0 \leq \min(1, 1+x) \leq 1+O(x) < \max(1, 1+x)$$

$$1 - O(x) < 1 + O(x)$$

$$\frac{1}{2} (1+x) > 0$$

$$(1+x)^d = \sum_{k=0}^n \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} x^k + R_n(x)$$

$$d = -1 \quad \frac{(-1)(-2)\dots(-1-k+1)}{k!} x^k = \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = (-1)^k x^k$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + \dots$$

$$d = -\frac{1}{2} \quad \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-1)(-3)(-5)\dots(-2k+1)}{2^k \cdot k!}$$

$$= \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k \cdot k!} = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + R_n(x)$$

OS. XI. 20122 - 3a. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ разлагается на член

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1} x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^2 + \dots +$$

$$+ \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k + \dots + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n + R_n(x)$$

$$\frac{(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} = \frac{(-1)(-3) \cdot \dots \cdot (-(2k-3))}{2^k k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1} (2k-3)!!}{(2k)!!}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1} (2k-3)!!}{(2k)!!} x^k + R_n(x)$$

$$O_n(1+x) =$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)(-2) \cdot \dots \cdot (k-1) (1+x)^{-k} = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

$$O_n(1+x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k =$$

$$= 1+x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1-x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots \right)$$

$$x = \frac{1}{2n+1} \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{2n+2}{2n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^{2n}} + \dots \right)$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \geq 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots > 1$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4n(n+1)} = 1 + \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$(2n+1)^2 - 1 = (2n+1-1)(2n+1+1) = 2n(2n+2)$$

$$e < e^{\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \leq e^{1 + \frac{1}{4n(n+1)}}$$

$$e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n + \frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{4n(n+1)}} \quad (*)$$

Разглеждаме редицата $a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! e^n \cdot (n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot (n+1)! e^{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

От (*)

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \quad (**)$$

a_n е монотонно намаляваща $a_n \geq 0 \Rightarrow$ е сходяща
Означаваме границата и с $\underline{a} \Rightarrow \underline{a_n} \geq \underline{a}$

границата е от (**)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{e^{-\frac{1}{12n(n+1)}}}{e^{-\frac{1}{12n}}}$$

$$e^{-\frac{1}{12n}} a_n < e^{-\frac{1}{12(n+1)}} a_{n+1}$$

c_n

c_n е монотонно растяща $c_n \rightarrow 1 \cdot a$

c_n - монотонно растяща $c_n \rightarrow a$ $c_n \leq a$

$$e^{-\frac{1}{12n}} a_n \leq a \leq a_n \cdot e^{-\frac{0}{12n}}$$

~~$$\frac{a}{a_n} > e^{-\frac{1}{12n}} \cdot 1$$~~

$$e^{-\frac{1}{12n}} \cdot 1 \leq \frac{a}{a_n} \leq e^{-\frac{1}{12n}} \cdot 0$$

$$\frac{a}{a_n} = e^{-\frac{\theta}{12n}}$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\theta = \theta(n)$$

$$a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} = a$$

$$\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{\theta}{12n}} = a$$

$$n! = a n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot e^{+\frac{\theta}{12n}}$$

$$\theta_1 = \theta_2 \frac{n}{n-1}$$

Формула на

$$n! = a \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}$$

Стирлинга

θ е число м/у 0 и 1, зависящо от n

Лема:

$$\begin{aligned} \text{Нека } f(x) &= c_1 (x-a)^p + o((x-a)^p) \\ g(x) &= c_2 (x-a)^q + o((x-a)^q) \end{aligned}$$

Нека $c_2 \neq 0$

Тогава

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & p > q \\ \frac{c_1}{c_2} & p = q \\ \infty & p < q \end{cases}$$

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^3}{3} = \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Доказателство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{p-q} \frac{c_1 + \frac{o((x-a)^p)}{(x-a)^p}}{c_2 + \frac{o((x-a)^q)}{(x-a)^q}}$$

$$\lim \frac{(\ln(1+x) - x + \frac{x^3}{3})^2}{(1 - \cos x)^5} =$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \dots$$

Д-свойство: $f(x)$ изобразява в Δ за всяка двойка числа $p, q \geq 0$, $p+q=1$ и всяка двойка $x, y \in \Delta$ имаме $f(px+qy) \leq pf(x) + qf(y)$

$$f(\overbrace{p_1 x_1 + p_2 x_2}^x) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \in \Delta$$

$$x = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

~~$$x = p_1 x_1 + p_2 x_2$$~~

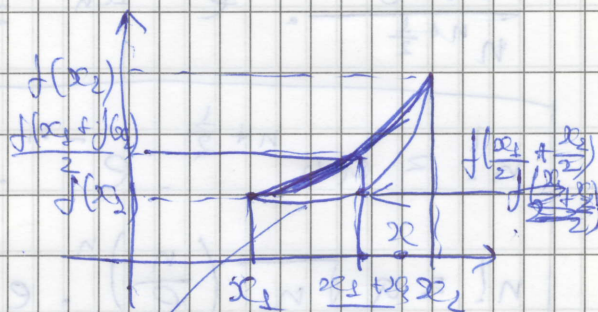
$$p_2 = 1 - p_1$$

$$x = p_1 x_1 + x_2 - p_1 x_2$$

$$x_2 - x = p_1 (x_2 - x_1)$$

$$p_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



хордата е над гъбата (изпъкнала)

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$l(x)$ - права

$$l(x_1) = f(x_1)$$

$$l(x_2) = f(x_2)$$

Търся y -ието на хордата през $(x_1, f(x_1))$
 $(x_2, f(x_2))$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$y - f(x_1) = (f(x_2) - f(x_1)) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = f(x_1) \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

~~$$y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$~~

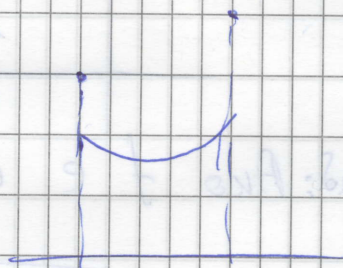
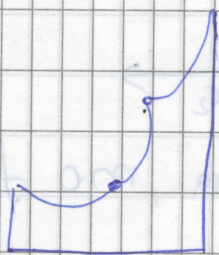
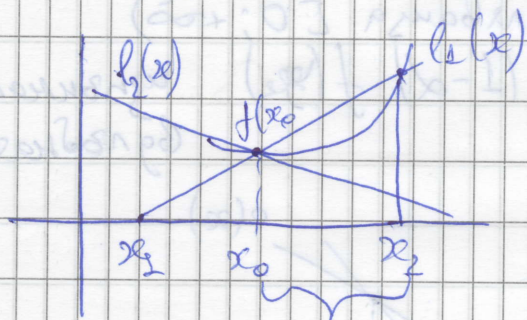
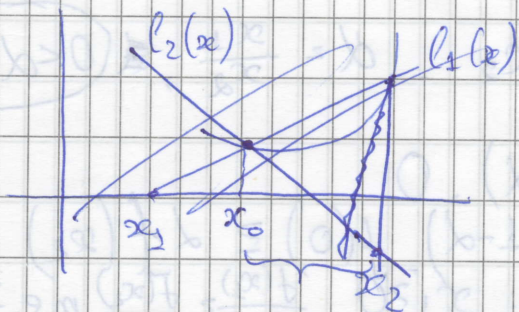
$$y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

~~$$y = l(x)$$~~

$$y = l(x) \text{ - хордата } \boxed{f(x) \leq l(x)}$$

Твърдение: Ако $f(x)$ е изпъкнала в $[a, b]$, то тя е непрекъснато във всяка т-ка (a, b)

Доказателство: Нека, е, че вземем и на интервала (x_1, x_2) изпъкнала функцията $f(x)$ е как хордата



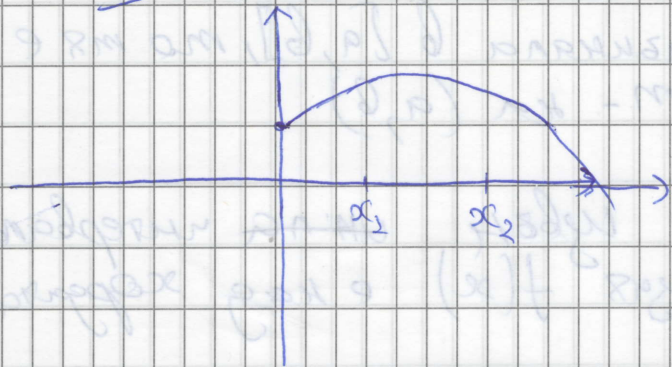
Смисла на доказателството

$$l_2(x) \leq f(x) \leq l_1(x)$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$$

10. XII. 2012г.



III Вергедение: Ако $f(x)$ е вогнута и $f(0) \geq 0$, то $\frac{f'(x)}{x}$ е намаляваща функция в $(0; +\infty)$

Доказателство: Нека $0 < x_1 < x_2$. $\alpha = \frac{x_1}{x_2}$, $0 < \alpha < 1$

$$x_1 = \alpha \cdot x_2$$

$$x_1 = \alpha \cdot x_2 + (1-\alpha) \cdot 0$$

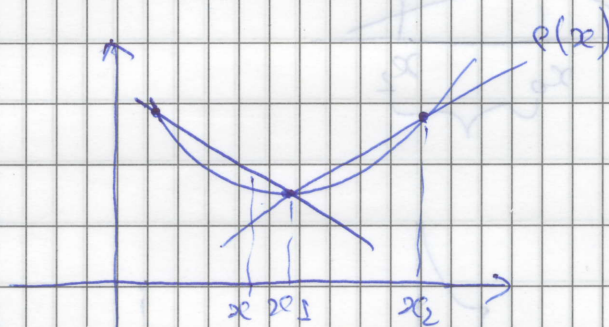
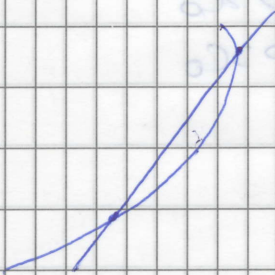
$$f(x_1) \geq \alpha f(x_2) + (1-\alpha) f(0) \geq \alpha f(x_2)$$

$$f(x_1) \geq \frac{x_1}{x_2} f(x_2) : x_1 > 0 \quad \frac{f(x_1)}{x_1} \geq \frac{f(x_2)}{x_2}, \text{ т.е. } \frac{f(x)}{x} \text{ е монотонно намаляваща в } (0; +\infty)$$

~~Вогнутостта~~
извивката
извивката
вогнутостта

$$f(x) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

извивката
вогнутостта



Заб: Ако f е извивката, то $f(x) \geq e(x)$

x_1 x_2

Да допуснем противното, т.е. $f(x) < e(x)$

т.е. $x_1 \in [x, x_2]$, то $f(x_1) < e(x_1)$

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$f(x_1) \leq q_1 f(x) + q_2 f(x_2)$$

$$f(x_1) < q_1 e(x) + q_2 e(x_2) \stackrel{\text{линейна функция}}{=} e(q_1 x + q_2 x_2) = e(x_1)$$

$$f(x_1) < e(x_1) !!$$

$$x = p_1 x_1 + p_2 x_2, \quad p_1 + p_2 = 1$$

$$x_1 \quad x \quad x_2$$

$$(p_1 + p_2) f(x) = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$$

$$p_1 (f(x_1) - f(x)) + p_2 (f(x_2) - f(x)) \geq 0$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot [f(x_1) - f(x)] + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot [f(x_2) - f(x)] \geq 0$$

$$-\frac{f(x_1) - f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x_2) - f(x)}{x - x_2} \leq 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (*) \text{ еубаванктност на изизикалост в } [x_1, x_2]$$

Теорема: Нека $f(x)$ е диференцируема в Δ .

Тогав $f(x)$ е изизикала в $\Delta \Leftrightarrow f'(x)$ расте.

$\Rightarrow$ Доказателство: $\Rightarrow$ При $x \rightarrow x_1$ в дясната част на

(*) получаване $f'(x_1)$. f е диференцируема $\Rightarrow$ непрекъсната

$\Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_1)$ и (*) премитнава в $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1)$.

Аналогично
При $x \rightarrow x_2$ $f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Като се обединят $\left[\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \geq f'(x) \geq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \right] \Rightarrow f'(x_1) \geq f'(x_2)$, т.е.

~~f~~ f' е монотонно растяща (т.е. $x_1 < x_2$)

≥ Искаме да докажем, че (*) е извиваща
Лявата част на (*) = $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} - f'(\xi_2)$

$$\xi_2 \in (x, x_2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & \bullet & | & & | & & | \\ x_1 & \xi_1 & x & & \xi_2 & & x_2 \end{array}$$

д.з. (дясна част) на (*) = $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq f'(\xi_1)$, $\xi_1 \in (x_1, x)$

т.е. $\xi_1 < x < \xi_2$, а f' е монотонно растяща $\Rightarrow f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, т.е. д.з. ≤ л.з.

Ако $f' \geq 0$, то тя е монотонно растяща.

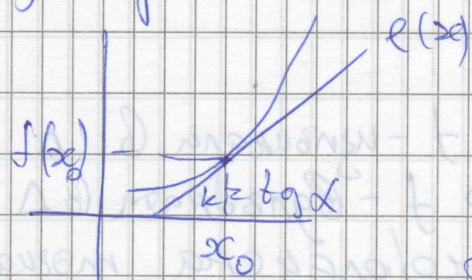
Правдение: $\frac{d}{dx} f' \geq 0 \Leftrightarrow f'$ е монотонно растяща
 f - диференцируема

$$g'(x) = x^3$$

$$g''(x) = 3x^2$$

Теорема: Ако f е 2 пъти диференцируема, то
 $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ е извиваща

Теорема: $f(x)$ е извивката $\Leftrightarrow$ ^{графикна} $f(x)$ е наг свехта
 генирателка.



$$e(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y \geq kx + b$$

$$f(x) \geq e(x)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

извивката

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq f'(x_0), \text{ при } x < x_0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq f'(x_0), \text{ при } x > x_0 \end{aligned} \right\} ? (**)$$

$\Rightarrow f$ е извивката $\Rightarrow f'(x)$ ~~е~~ монотонно растяща
 по Лагранже п.з. = $f'(\xi_1)$ } п.з. = $f'(\xi_2)$
 искаме $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$
 $\begin{array}{c} x \quad \xi_1 \quad x_0 \end{array}$ $\begin{array}{c} x_0 \quad \xi_2 \quad x \end{array}$
 извивката т.к. f' е монотонно расте

$\Leftarrow$ ~~искаме~~ ^{имаме} ~~(**) искаме~~ f' да расте (от това $\Rightarrow$
 извивкалост)
 искаме $\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \end{array}$ за $x_1 < x_2$ $f'(x_1) \leq f'(x_2)$

В първото неравенство на $(**)$
 $x \rightarrow x_1$ $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$
 $x_0 \rightarrow x_2$

Във второто неравенство на $(**)$ заместваме
 $x \rightarrow x_2$ $x_0 \rightarrow x_1$ $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1)$

$$f'(x_2) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_1) \quad \text{т.е. } f' - \text{монотонно расте.}$$

$\Rightarrow f$ е изпъкнала

12. XII - 2012г.

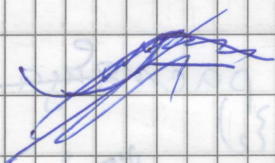
$$f''(x) > 0 \quad \text{в } \Delta \Leftrightarrow f - \text{изпъкнала в } \Delta$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{в } \Delta \Leftrightarrow f - \text{вдлъзната в } \Delta$$

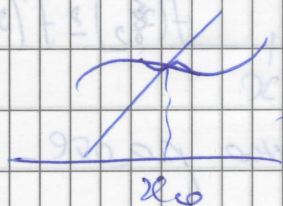
Деф. Казваме, че x_0 е инфлексна точка, ако f сменя изпъкналост, т.е.

f е ополност на x_0 ($x_0 - \delta, x_0 + \delta$) в $(x_0 - \delta, x_0)$ $f(x)$ е изпъкн. (вдлъзн.), а в $(x_0, x_0 + \delta)$ е вдлъзн. (изпъкн.)

$f''(x)$ сменя знака си минавайки през т. x_0



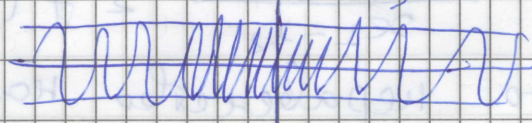
НУ за инфлексна точка, т.е. $f''(x_0) = 0$, но то не е ОУ

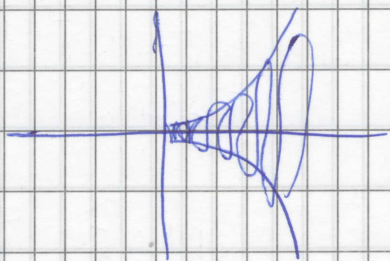


Контрпример: 1. $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$
 $f''(x) = 12x^2$ $f''(0) = 0$, но f'' не сменя знака т.е. > 0 .

$$2. f(x) = \begin{cases} x^5 \sin(2 + \frac{1}{x}) & \text{за } x \neq 0 \\ 0 & \text{за } x = 0 \end{cases}$$

$$\sin(2 + \frac{1}{x})$$





$$f(x) = \begin{cases} 5x^4 \sin(2 + \frac{1}{x}) - x^3 \cos(2 + \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin(2 + \frac{1}{x}) = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(5x^3 \sin(2 + \frac{1}{x}) - x^2 \cos(2 + \frac{1}{x}) \right)$$

↓
0

$$-x^2 \cos(2 + \frac{1}{x})$$

↓
0

$f''(0) = 0$, но $x \neq 0$ не е инфлексна точка

Неравенство на Юнга

Нека $a, b \geq 0$, $p, q > 0$, $p, q < 1$ и спредено с
условията $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (спреденати показатели
 $q = p'$, $p = q'$)

Твърдение $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Доказателство: $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$ - извивката

$$f(p_1 x + p_2 y) \leq p_1 f(x) + p_2 f(y) \quad p_1 + p_2 = 1$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad f\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{f(x)}{p} + \frac{f(y)}{q}$$

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

1.1.13

$$a^p = e^{p \ln a}$$

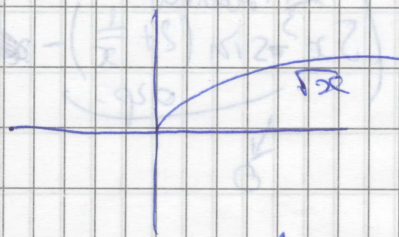
$$b^q = e^{q \ln b}$$

$$x = p \ln a$$

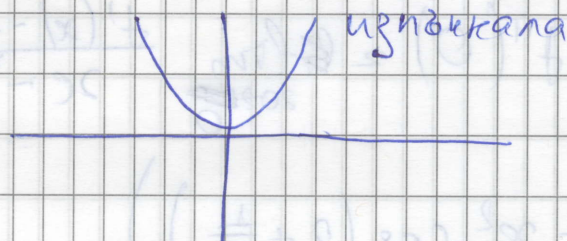
$$y = q \ln b$$

$$n.z. = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln ab} = ab$$

$$\sum a_i b_i = \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$



$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} < 0$$

$$\sqrt{px+qy} \geq \sqrt{p}x + \sqrt{q}y$$

$$p+q=1$$

$$\sqrt{px+qy} \quad f(px+qy) \leq pf(x) + qf(y) \quad p+q=1$$

$$f(px+qy) \leq p^s f(x) + q^s f(y) \quad 0 < s \leq 1$$

$$h(p)f(x) + h(q)f(y)$$

Неравенство на Йенсен

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) \quad p_1 + p_2 = 1, p_i \geq 0$$

Теорема: Нека $p_i, i=1, \dots, n, p_i \geq 0$

$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Нека f е изпъкнала в Δ и $x_1, \dots, x_n \in \Delta$

$$\text{Тогава } f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n)$$

Нека $q_i > 0$ и f е извѣстна

$$f\left(\frac{q_1 x_1 + \dots + q_n x_n}{q_1 + \dots + q_n}\right) \leq \frac{q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \dots + q_n f(x_n)}{q_1 + \dots + q_n}$$

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i x_i}{\sum_{i=1}^n q_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n q_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n q_i}$$

$$p_k = \frac{q_k}{\sum_{i=1}^n q_i} \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Локални екстремуми НДУ

Ако $f(x)$ има лок. екстр. в т. x_0 , то $f'(x_0) = 0$
(НУ) Ферма

Не е ДУ $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(0) = 0$, но
 $f(x) = x^3$ няма екстремум в т. 0

Правило 1: $f(x)$ диференцируема в $[a, b]$
 $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ се достигат или
в т. a , или в т. b , или в стационарна
точка $x_0 : f'(x_0) = 0$

Правило 2: $f(x)$ е диференцируема в $(-\infty, +\infty)$
и в ∞ има $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, които са
конечни или ∞ .

Позаба $\sup f(x)$ има 2 възможности:

1) $\sup f(x)$ е равен на $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

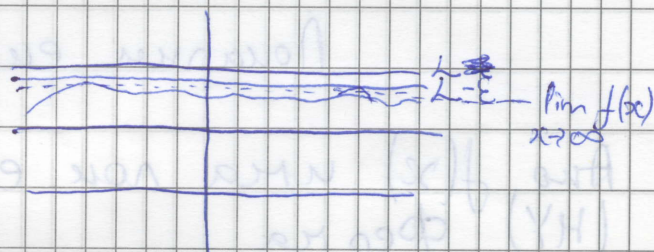
2) $\sup f(x)$ се достига в някоя от стационарните точки.

Доказателство: Нека $L := \sup f(x)$ и нека не е изпълнено 1). Ще док., че е изпълнено 2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < L, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < L$$

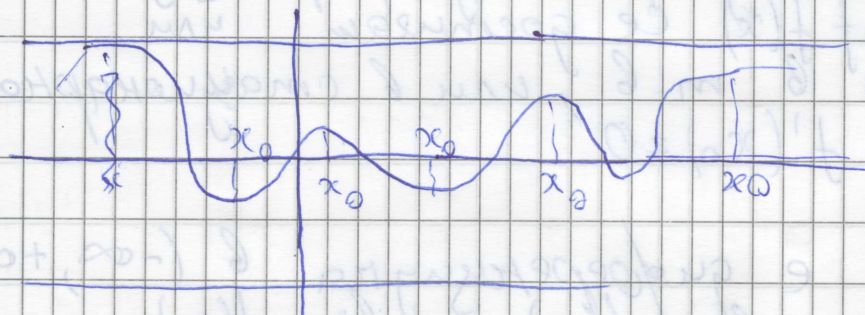
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < L - \varepsilon, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < L - \varepsilon$$

$$\exists N : \text{за } |x| \geq N$$



$f(x) < L - \varepsilon$ за $|x| \geq N$
 Показва $\sup f(x)$ не се достига извън $(-N, N)$

$\Rightarrow \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} f(x) = \sup_{x \in (-N, N)} f(x) \Rightarrow \sup f(x)$ се достига в стационарна точка

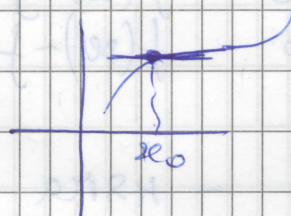
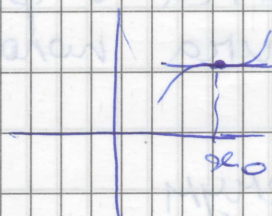


QY: Ако $f'(x)$ $\exists$ в околност на x_0 и
 а) $f'(x_0) \neq 0$, като $f'(x)$ сменя знака си от + към -
 пок. макс.

б) $f'(x_0) = 0$, като $f'(x)$ сменя знака си от - към +
 пок. мин.

1.1.16

в) Ако $f'(x_0) \neq 0$, то $f'(x)$ запазва знака си в ~~встремун~~ околност на x_0 и не се анулира твърдоствно полуоколност на x_0 , то тогава ~~нямат~~ екстремум



$$f(x) \leq f(x_0)$$

Т: Нека $f(x)$ има $n+1$ непрекъснати производни в околност на m - x_0 и нека $f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Тогав:

- а) ако n е нечетно, $f(x)$ няма екстр в m - x_0
- б) ако n е четно, $f(x)$ има локал. екстр. и тога е локал. макс. за $f^{(n)}(x_0) < 0$
локал. мин. за $f^{(n)}(x_0) > 0$

Доказателство:
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{(x-x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$= (x-x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right]$$

Нека $f^{(n)}(x_0) > 0$ например
а) n нечетно. За x близи до x_0 , знакът е обратен
 ~~$f(x) - f(x_0)$ съвпада със знака на~~

Нека $f^{(n)}(x_0) > 0$ (например)

а) n - четно: За x близи до x_0 знакът на $f(x) - f(x_0)$ съвпада със знака на $(x - x_0)^n \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ за $x < x_0$ $f(x) - f(x_0)$ има отрицателен знак
за $x > x_0$ $f(x) - f(x_0)$ има положителен знак

$f(x) \leq f(x_0)$
 $f(x) \geq f(x_0)$ - няма екстремум

б) n - нечетно: Знакът на $f(x) - f(x_0)$ е противоположен, тъй като $(x - x_0)^n \geq 0$, а знакът в скобите е +
(за x близи до x_0)
 $\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ за всички x близи до x_0
- локален минимум

Ако $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ знакът на $f(x) - f(x_0)$ е -
за x близи до x_0 , т.е. $f(x) \leq f(x_0)$ - локален максимум

~~$$f(x) = \int f(x) dx$$~~

~~$$dF(x) = f(x) dy, \text{ за което } dF(x) = F'(x) dy$$~~

~~$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$~~

~~$$\int d f(x) = \int f'(x) dx = f(x)$$~~

~~$$F(x) = \int f(x) dx$$~~

~~$$F'(x) = f(x)$$~~

~~Таблица на интегралите~~

14. XII 2012.

f търсим примитивната F

$$F'(x) = f(x)$$

Ако е, че само F е примитивна, то $F + c$ е примитивна за f .

Обратно, $\forall$ примитивна на f се отличава от F само с const.

Нека Φ е друга примитивна

$$\Phi'(x) = f(x)$$

$$\text{Тогава } (\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \text{ОТТНС дава, че } \Phi(x) - F(x) = c$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + c$$

$\int f(x) dx$ - примитивната на функцията $f(x)$
 $dF(x)$

$$dF(x) = f(x) dx, \text{ защото } dF(x) = F'(x) dx$$

по дефиниция

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

$$\int d f(x) = \int f'(x) dx = f(x) + \text{const}$$

примитивна - неопределен интеграл
 $C = \text{const.}$ неопределеност

Таблица на интегралите

$$(1) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(2) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(3) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(4) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left(\int \frac{dx}{\cos^2 x} \right) = \operatorname{tg} x + C$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$(6) \int \cancel{dx} x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$(7) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = (-\arccos x + C_1)$$

$$(9) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad a > 0$$

$$\left(\arcsin \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(11) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+x^2}$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$(13) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (\text{помощна формула})$$

(вспомогательная)

$$(1) \int a f(x) dx = a \int f(x) dx + C$$

$$(2) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx + C$$

③ Нeka $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогава

примитивна
функция

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

Доказателство: Диференциране $(F(\varphi(t)))' =$
 $= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Пример: $\int (2x+7)^8 dx = \frac{1}{2} \int (2x+7)^8 \cdot 2 dx =$

$$= \frac{1}{2} \int (2x+7)^8 \cdot d(2x+7) = \frac{1}{2} \frac{(2x+7)^9}{9} + C = \frac{(2x+7)^9}{18} + C$$

$$\varphi(t) = 2t + 7$$

$$f(x) = x^8$$

$$\varphi'(t) = (2t + 7)' = 2$$

$$\int x^8 dx = \frac{x^9}{9}$$

$\varphi'(t) dt = d\varphi$ — внасяне под знака на диференци-
рана

$$u = \varphi(t)$$

$$\boxed{\int f(u) du = F(u) + C}$$

$$\int u^8 du = \frac{u^9}{9} + C$$

$$\int \left(x\sqrt{x}\sqrt{x} + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} + 8x^5 \right) dx = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$$

$$\int x^{\frac{7}{2}} dx + 5 \int \frac{dx}{x} - 7 \int x^{-2} dx + 8 \int x^5 dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + 5 \cdot \ln x - 7 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 8 \frac{x^6}{6} =$$

$$= \frac{4x^{\frac{11}{2}}}{11} + 5 \ln x + 7x^{-1} + \frac{4x^6}{3} =$$

$$= \frac{4x^{\frac{11}{2}}}{11} + 5 \ln x + \frac{7}{x} + \frac{4x^6}{3} + C$$

непосредственно интегрируется

Интегрируем по частям

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx + C$$

$$u = f(x)$$

$$v = g(x)$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\text{Доказательство: } \int \underbrace{[f(x)g'(x) + f'(x)g(x)]}_{(f(x)g(x))'} dx =$$

$$= f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \int [f(x)g(x)]' = f(x)g(x)$$

$$\int x \sin x \, dx$$

Вниманието под знака на диференциала на част от подинтегралната функция означава намерено интегриране на тази част и записване на резултата зад знака d .

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \int x \, d(-\cos x) \quad \boxed{d(\varphi(x)) = \varphi'(x) \, dx} \\ &= - \int x \, d(\cos x) = - [x \cos x - \int \cos x \, dx] = \\ &= - [x \cos x - \sin x] = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Когато имаме $\int P(x) \sin ax \, dx$ по-лесно

$$\int P(x) \cos ax \, dx, \text{ тогава}$$

$$\int P(x) e^{ax} \, dx \quad \text{вносяме съответно}$$

$$\sin ax, \cos ax, e^{ax}$$

$$\int P(x) \ln x \, dx$$

$$\int P(x) a \cos^2 x \, dx$$

$$\int P(x) a \cos x \, dx$$

вносяме полинома под знака на диференциала

Bagaru: $\int (18x^2 - 6x + 5) \ln 2x dx = \int \ln 2x d\left(\frac{18x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right) =$

$= \int \overbrace{\ln 2x}^u d\overbrace{(6x^3 - 3x^2 + 5x)}^v = \ln 2x(6x^3 - 3x^2 + 5x) -$

$-\int (6x^3 - 3x^2 + 5x) d(\ln 2x) =$

$= \ln 2x(6x^3 - 3x^2 + 5x) - \int (6x^3 - 3x^2 + 5x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 dx =$

$= \ln 2x(6x^3 - 3x^2 + 5x) - \int (6x^3 - 3x^2 + 5x) dx =$

$= \ln 2x(6x^3 - 3x^2 + 5x) - 6 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{2} - 5x + C =$

$= \ln 2x(6x^3 - 3x^2 + 5x) - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 5x + C$

$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \int \overbrace{\sqrt{x^2 - a^2}}^u \overbrace{dx}^v = \sqrt{x^2 - a^2} x - \int x d(\sqrt{x^2 - a^2}) =$

$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx =$

$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx -$

$- a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

$\frac{2}{1} = \dots$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|] + C$

$$\begin{aligned}
 \int x \arctan x \, dx &= \int \arctan x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \arctan x \, d(x^2) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - \int x^2 d(\arctan x) \right] = \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - \right. \\
 &\quad \left. - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx \right] = \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - \int 1 dx + \int \frac{1 dx}{1 + x^2} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - x + \arctan x \right] + C
 \end{aligned}$$

17. XII. 2012г.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du + C$$

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{\sqrt{a^2 - x^2}}_u \underbrace{dx}_v &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x d(\sqrt{a^2 - x^2}) = \\
 &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x \cdot (-2x) \, dx}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
 &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
 &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int + a^2 \arcsin \frac{x}{a}
 \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$$

§ Измени $\int f(x) \, dx \quad x = \varphi(t)$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = F(t) \quad \text{— нещо се пресмята}$$

Нека $\Psi(x)$ е обратната на ф-ята $\varphi(t)$:

$$t = \Psi(x)$$

Тогава $\int f(x) \, dx = F(\Psi(x)) + C$

§ 1.126

Доказательство: Имее, что $F'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Имее, что $\varphi(\psi(x)) = x$, что мы дифференцируем

$$\varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = 1$$

$$\boxed{\varphi'(t) \psi'(x) = 1}$$

Итак $(F(\psi(x)))' \stackrel{?}{=} f(x)$

$$\begin{aligned} (F(\psi(x)))' &= F'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) \stackrel{?}{=} \underbrace{f(\varphi(\psi(x)))}_{\parallel x} \cdot \underbrace{\varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)}_{\parallel 1} = \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Примеры:

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 + x^2}$$

$$\begin{aligned} x &= a \sin t \\ dx &= a \cos t \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\begin{aligned} x &= a \sin t & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} & & -a \leq x \leq a \\ a^2 - x^2 &= a^2 (1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t \end{aligned}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a |\cos t| = a \cos t$$

$$\boxed{dx = a \cos t dt}$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$\int = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \left(\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right) = \frac{a^2}{2} \left(\int 1 dt + \int \cos 2t dt \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \int \cos 2t \cdot d(2t) \right) = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$J_n \rightarrow J_{n-1} \rightarrow \dots$$

$$\begin{aligned} x &= a \sin t \\ \frac{x}{a} &= \sin t \\ t &= \arcsin \frac{x}{a} \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$$

$$x = a \operatorname{tg} t$$

$$a^2 + x^2 = a^2 \left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \right) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{tg} t \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$$

$$J_2 = \int \frac{a \cdot \cos^4 t}{\cos^2 t \cdot a^4} dt = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt =$$

с помощью ка
crenera
м.р. эпс cos²t

$$= \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \right) = \frac{1}{2a^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\frac{x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}} \right) \quad \boxed{\sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}}$$

$$= \frac{1}{2a^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + a \frac{x}{a^2 + x^2} \right)$$

Субституция на Хорнер

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$z = t^2 + a^2$$

$$t = x + \frac{p}{2}$$

$$x = t - \frac{p}{2}$$

$$a^2 = q - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{4}(p^2 - 4q)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} &= \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \\ &+ \left(N - M \frac{p}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \\ &\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \dots = \frac{M}{2} \ln |t^2 + a^2| + \dots \end{aligned}$$

$$d(t^2 + a^2) = 2t dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{(x + \frac{p}{2}) \cdot 2}{\sqrt{4q - p^2}}$$

Интегриране на еле рационални функции. Елементарни гроби

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}$$

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\lambda}}$$

$$\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^{\lambda}} = \int (x-a)^{-\lambda} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} + c$$

$\lambda \neq 1$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln |x-a| \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ по правилу

правило степенуване на $P < \text{степен } Q$

$$Q(x) = ((x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_n)^{\alpha_n} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} (x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2} \dots)$$

$$\text{Тогава } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_1^2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_2^1}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n^1}{x-a_n} + \dots + \frac{A_n^{\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \dots$$

$$+ \frac{M_1^1 x + N_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{M_1^{\beta_1} x + N_1^{\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{M_2^1 x + N_2^1}{x^2+p_2x+q_2} + \dots + \frac{M_2^{\beta_2} x + N_2^{\beta_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}} + \dots$$

$$\frac{x^3+2}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}$$

$$x^3+2 = A(x-1)(x^2+4x+5) + B(x^2+4x+5) + (Cx+D)(x-1)^2$$

I Метод на полагането
 $x=1$
 $1+2=0+B(1+4+5)+0$
 $B=\frac{3}{10}$

II Сравняване на коефициенти
 $x^3: 1 = A + C$

III Диференциране:
 $3x^2 = A(x^2+4x+5) + A(x-1)(2x+4) + 2Bx+4B + C(x-1)^2 + (Cx+D)2(x-1)$

Плюс непараметр $x=1$ $3 = A(1+4+5) + 0 + 6B + 0$

$$3 = 10A + 6B = 10A + \frac{18}{5} \quad 10A = \frac{8}{5} \quad A = \frac{8}{25}$$

$$C = 1 - A = \frac{22}{25}$$

$$x^0 = 2 = -5A + 5B + 2$$

$$2 = 2 + 5A - 5B = 2 + \frac{8}{5} - \frac{3}{2} = \frac{20+8-15}{10} = \frac{13}{10}$$

09.1.2013

$$\frac{A}{(x-a)^\lambda} \quad \lambda = 1 = A \ln|x-a| + C$$

$$\lambda \neq 1 = A \frac{(x-a)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q)^k} \quad \text{Хоркер} \quad \int \frac{At+B}{(t^2+a^2)^k} dt$$

$$\frac{A}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{du}{u^k} = \frac{A}{2} \frac{u^{-k+1}}{-k+1} = \frac{A(t^2+a^2)^{1-k}}{2(1-k)} =$$

$$u = t^2 + a^2$$

(подставляем на Хоркер)

$$t = x + \frac{p}{2}$$

$$= \frac{A}{2(1-k)} (x^2+px+q)^{1-k}$$

$$\int_k \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} \quad k \neq 1 \quad I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

$$I_k = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+t^2-t^2}{(a^2+t^2)^k} dt = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{dt}{(a^2+t^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2}{(a^2+t^2)^k} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \int \frac{t \cdot 2t \cdot dt}{(a^2+t^2)^k} \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \int \frac{t d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} \right] = \frac{1}{a^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \int \frac{t d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \int t d \left(\frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k} \right) \right] =$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k} - \int \frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k} dt \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1} \cdot (1-k)} + \frac{1}{k-1} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} \right) \right] =$$

Интегрируем на тригонометрические функции

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad \text{Универсальная подстановка}$$

$$\left[t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right]$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t$$

$$-\pi < x < \pi$$

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Да се намери примитивната на
 $\frac{1}{2+\sin x}$ в интервала $(0, 2\pi)$

$$F(x) = F'(x) = \frac{1}{2+\sin x} \quad (0, 2\pi)$$

Използваме субституцията на 2 изти
 $(0, \pi), (\pi, 2\pi) \sim (-\pi, 0)$

$$F(x) \int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt \cdot (2+2t^2+2t)}{(1+t^2)(1+t^2)(2+2t^2+2t)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$u = t + \frac{1}{2} \quad t = u - \frac{1}{2}$$

$$t^2 + t + 1 = u^2 - 2 \cdot u \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + u - \frac{1}{2} + 1 = u^2 + \frac{3}{4}$$

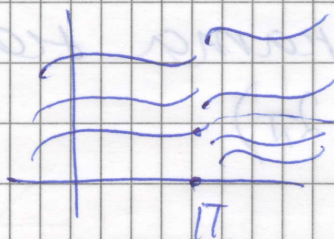
$$F(x) = \int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{du}{u^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctg \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} \times$$

$$\times (t + \frac{1}{2}) + C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C_1 \quad \text{за } x \in (0, \pi)$$

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C_2 \quad \text{за } x \in (\pi, 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{1}{2+\sin x} \quad F'(x) = f(x) \quad \text{в } (0, 2\pi)$$

Пряко ^{така} можем да свърсим C_1 и C_2 , че $F(x)$ е непрекъсната в т. π .

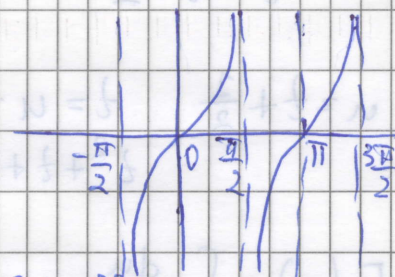


$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} F(x) \neq \lim_{x \rightarrow \pi+0} F(x)$$

$$\begin{aligned} \text{п.з.} &= \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(+\infty) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г.з.} &= \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x > \pi}} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(-\infty) + C_2 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\pi}{2}\right) + C_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_2$$



$$C_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + C_1$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + C \end{cases}$$

$$\int R(u, v) dx$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ v &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(-u, v) &= -R(u, v) & t &= \cos x & \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} \\ R(u, -v) &= -R(v, u) & t &= \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$= - \int \frac{\sin^4 x \, d\cos x}{\cos^2 x} = - \int \frac{(t^4 - 2t^2 + 1) dt}{t^2} = \int t^2 dt + 2 \int \frac{1}{t} dt$$

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = (1 - t^2)^2 = 1 - 2t^2 + t^4 \end{aligned}$$

$$= - \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{t^3}{3} + 2t - \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{t^3 - 6t^2 + 3}{3t}$$

$$= -\frac{\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3}{3\cos x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^4}$$

$$R(-u, -v) = R(u, v)$$

$$t = \tan x \quad x = \arctan t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

$$\frac{1}{4} \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} (\sin 2x)^2$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}) dx$$

$$x = t^k \quad k = \text{HOK}(q_1, \dots, q_n)$$

$$\int \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt[3]{x+2}} dx \quad x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}} \quad x = t^6$$

$$dx = 6t^5$$

$$J = 6 \int \frac{(t^3+1)t^5 dt}{t^2+2}$$

$$\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}) dx$$

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^k$$

Однородны сдвигнутым

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

$$1) a > 0 \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm x\sqrt{a}$$

$$2) x_1, x_2 - \text{реальные корни на } ax^2+bx+c=0$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1) \quad \left| \begin{array}{l} a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1) \\ a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_2) \end{array} \right.$$

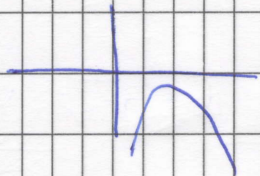
$$\text{или } \pm t(x-x_2)$$

$$3) c > 0: \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x t \pm \sqrt{c}$$

$$ax^2 + bx = x^2 t^2 \pm 2\sqrt{c}xt$$

x лесно се изразява чрез t

$$a < 0 \quad c < 0$$



$$\int \frac{dx}{x \pm \sqrt{ax^2 - 5x + 4}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 - 5x + 4} &= t - x \\ x^2 - 5x + 4 &= t^2 - 2xt + x^2 \\ (2t - 5)x &= t^2 - 4 \\ x &= \frac{t^2 - 4}{2t - 5} \end{aligned}$$

$$dx = \frac{2t(2t-5) - 2(t^2-4)}{(2t-5)^2} \cdot dt = \frac{4t^2 - 10t - 2t^2 + 8}{(2t-5)^2} dt =$$

$$= \frac{2t^2 - 10t + 8}{(2t-5)^2} dt$$

$$\int \frac{\frac{2t^2 - 10t + 8}{(2t-5)^2}}{t} dt = \int \frac{2t - 10 + \frac{8}{t}}{(2t-5)^2} dt =$$

$$= \int \frac{2t - 5 + \frac{8}{t} - 5}{(2t-5)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t-5)}{(2t-5)^2} - \frac{5}{2} \int \frac{d(2t-5) + 8}{(2t-5)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |2t-5| + \frac{5}{2} (2t-5)^{-1} + I_1$$

$$I_1 = -\frac{2}{25} \int \frac{dt}{(2t-5)} + \frac{2}{5} \int \frac{dt}{(2t-5)^2} + \frac{1}{25} \int \frac{dt}{t}$$

$$\frac{1}{(2t-5)^2 t} = \frac{A}{(2t-5)} + \frac{B}{(2t-5)^2} + \frac{C}{t}$$

$$1 = (2t-5)A + tB + C(2t-5)^2$$

$$1) t=0 \quad 1=25C \Rightarrow C=\frac{1}{25}$$

$$2) t=\frac{5}{2} \quad \frac{5}{2}B=1 \Rightarrow B=\frac{2}{5}$$

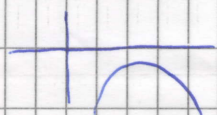
$$0=2A+4C$$

$$2A=-4C$$

$$A=-2C=-\frac{2}{25}$$

14.1.2013.

$$\textcircled{1} \int \sqrt{6x-x^2-5} dx$$



$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$$

$$\sqrt{6x-x^2-5}=t(x-1)$$

$$6x-x^2-5=t^2(x^2-2x+1)$$

$$6x-x^2-5=t^2x^2-2xt^2+t^2$$

$$-(x^2-5)(x-1)=t^2(x-1)$$

$$x=\frac{t^2-1}{t^2-5}$$

$$dx=\frac{8t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$x-1=\frac{-4}{t^2-1}$$

$$\int = \int \frac{-4t \cdot 8t}{(t^2-1)^3} = -32 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^3} = -32 \int \frac{t^2-1+1}{(t^2-1)^3} dt =$$

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^3} + \frac{C}{(t+1)^3} + D + E + F$$

$$= -32 \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} + \int \frac{1}{(t^2-1)^3}$$

1.1.138

$$\frac{u}{(u-1)^3} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{(u-1)^3}$$

$$\int \sqrt{6x-x^2-5} dx = \int \sqrt{9-5-(x^2-6x+9)} dx =$$

$$\int \sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx = \int \sqrt{4 - (x-3)^2} dx = 2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2} dx =$$

$$= 2 \int 2 \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt =$$

$$\frac{x-3}{2} = \sin t$$

$$x = 2 \sin t + 3$$

$$dx = 2 \cos t dt$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$$

$$t = \arcsin \frac{x-3}{2}$$

$$= 2 \left[\int 1 dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) \right] =$$

$$= 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] = 2 \left[\arcsin \frac{x-3}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \arcsin \frac{x-3}{2} \right] =$$

$$+ \frac{1}{2} \sin 2 \arcsin \frac{x-3}{2} + C] =$$

$$= 2 \sin \arcsin \frac{x-3}{2} \cdot \cos \left(\arcsin \frac{x-3}{2} \right) =$$

$$= 2 \left[\arcsin \frac{x-3}{2} + \frac{x-3}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{x-3}{2} \right)} \right] =$$

$$= 2 \left[\arcsin \frac{x-3}{2} + \frac{x-3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{2} \right)^2} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{6x-x^2-5}$$

Дифференциален бинком

$$\int x^m (a + b x^n)^p dx$$

1. p - цяло число $x = t^k$ $k = \text{НОК}$ (знаменателите на m и n)

2. p - дробно число, но $\frac{m+1}{n}$ - цяло число

$$t = a + b x^n \quad x^n = \frac{t-a}{b} \quad x = \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{n} \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt$$

$$\int (\text{интеграл}) = \frac{1}{n} \int \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot t^p \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{n} \int \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot t^p \cdot dt$$

това е цяло число и отиваме в случай 1.

3. $\frac{m+1}{n} + p$ - цяло число

$$\int x^{m+np} (a x^{-n} + b)^p dx$$

$$\int x^{m_1} (c + x^{n_1} d)^{p_1} dx$$

$$t = a x^{-n} + b$$

$$m_1 = m + np$$

$$n_1 = -n$$

$$p_1 = p$$

$$\frac{m_1+1}{n_1} = \frac{m+np+1}{-n} + 1 =$$

$$= -\frac{m+1}{n} - p + 1$$

цяло число

Теорема на Чебишев: Това са единствените 3 спузани, които може да се пресметне чрез рата с елементарни функции.

Еллиптични интегралы

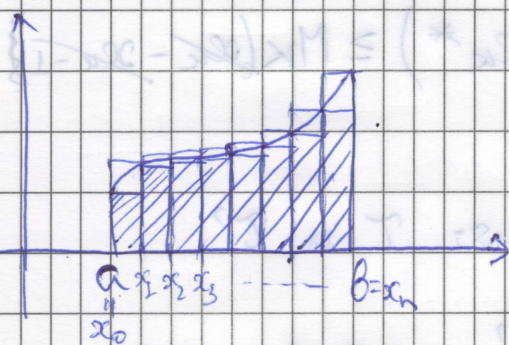
$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}) dx$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}) dx$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi)$$

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(k, \varphi) \quad \text{функция на Лександер}$$

Определени интегралы



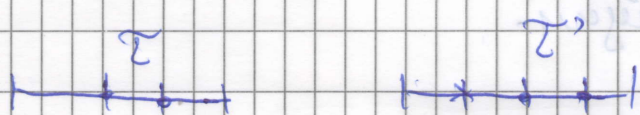
$$\begin{aligned} \tau &= (x_0, x_1, \dots, x_n) \\ S_\tau &= m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \dots + \\ m_k &= \inf_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x) \quad + m_n(x_n-x_{n-1}) \\ M_k &= \sup_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$S_\tau = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$S_\tau \leq S_\tau$$

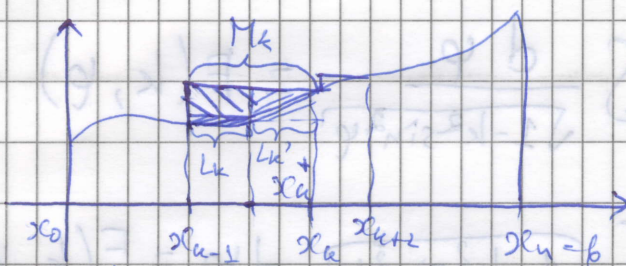
$\tau' \geq \tau$ τ' е по-ситно от τ
 ако има повече точки от τ



III въведение: С издредяване на деленията малките суми на Дарбу растат, а големите — намаляват.

Големите суми намаляват

$$\tau = (x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n)$$



$$\tau' = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k^*, x_k, \dots, x_n)$$

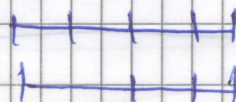
$$S_{\tau} - S_{\tau'} = M_k(x_k - x_{k-1}) -$$

$$L_k(x_k^* - x_{k-1}) - L_k'(x_k - x_k^*) \geq M_k(x_k - x_{k-1}) - (x_k^* + x_{k-1} - x_k + x_k^*) = 0$$

Следствие за произволни деления: τ и τ'

$$S_{\tau} \geq S_{\tau'}, \quad \tau'' = \tau \cup \tau' \text{ — по ситно}$$

$$S_{\tau} \geq S_{\tau''} \geq S_{\tau'} \geq S_{\tau'}$$



Следствие: множеството числове стойности на S_{τ} е ограничено отдолу (сколто и да е малка сума на Дарбу).

① (неохотливо)
от числ. стойности $\sum S_T$ - макс. сума на Δx е ограничен отгоре, следователно и да е голяма сума на Δx

с $\bar{I}$ (горен интеграл), означаваме $\bar{I} = \inf S_T$, където T пробява всички всевъзможни деления на $[a, b]$

$\underline{I}$ (долен интеграл) - $\sup S_T$, където T пробява всички всевъзможни деления на $[a, b]$

$$\bar{I} \geq S_T \text{ за } \forall T \quad \bar{I} \geq \underline{I} \quad S_{T'} \geq S_T$$

Дефиниция: Казваме, че ограничената ф-я f е интегрируема в $[a, b]$, ако $\bar{I} = \underline{I}$.

Общата стойност се нарича риманов (определен) интеграл и се бележи:

$$\int_a^b f(x) dx$$

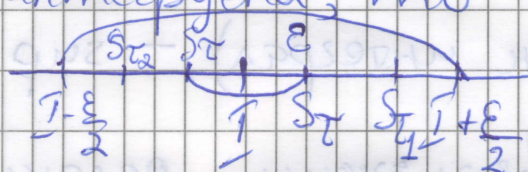
$$\int_a^b f(x) dx = \bar{I} = \underline{I} \quad \int_a^b f(x) dx = \bar{I}$$

НЗУ за интегрируемост ^{на} функцията:

$f(x)$ е интегрируема $\Leftrightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ може да се намери деление $\tau: S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

Доказателство: $\Rightarrow$ Нека f е интегрируема, задаваме $\varepsilon > 0$, тогавиш $\tau: S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

тъй като f е интегрируема, то $\bar{I} = \underline{I} = I$



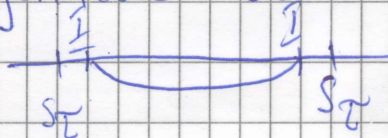
$\bar{I} = \inf S_\tau \Rightarrow \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$ не е ~~горна~~ ~~горна граница~~ за S_τ

$\underline{I} = \sup s_\tau \Rightarrow \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница за s_τ

$\Rightarrow$ образуваме $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Допускаме обратното, т.е. f не е интегрируема, т.е. $\bar{I} > \underline{I}$. $\varepsilon := \frac{\bar{I} - \underline{I}}{2}$. По това ε намираме деление $\tau: S_\tau - s_\tau < \varepsilon$



$$\bar{I} - \underline{I} \leq S_\tau - s_\tau < \varepsilon = \frac{\bar{I} - \underline{I}}{2}$$

Примери на интегрируеми функции

1. $f(x) = \text{const}$ $f(x) = C$ тогава $\int_a^b f(x) dx = C(b-a)$

$$S_\tau = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) \geq C \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = C(b-a)$$

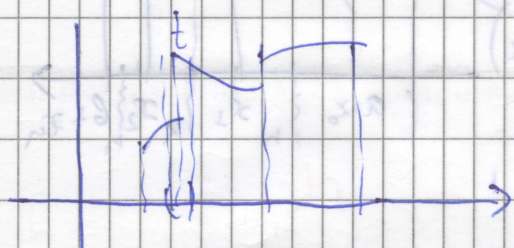
$$s_\tau = C(b-a)$$

$$\int_a^b C dx = C(b-a)$$

2. непрекъснатата в $[a, b]$

$f(x)$ е равномерно непрекъснатата в $[a, b]$ и е
важната теорема за осцилациите
Зададен ε , то $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$S_T - s_T = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

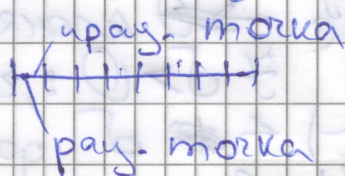


Пример за неинтегруема ф-я ($\overline{I} > \underline{I}$)

ф-я на Дирихле
 $[0, 1]$

$\begin{cases} 1 & \text{за } x\text{-рационал} \\ 0 & \text{за } x\text{-ирационал} \end{cases}$

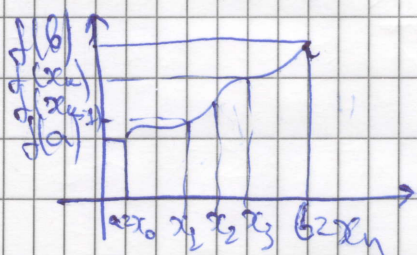
S_T



$M_k = 1 \quad m_k = 0$

$$S_T = \sum M_k (x_k - x_{k-1}) = 1 \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1$$

$$s_T = 0 \quad \overline{I} = 1 \quad \underline{I} = 0 \quad 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$



По ε термин $T : S_T - s_T < \varepsilon$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0$$

T -деление с
дължина на
интервала $< \delta$

2.1.15

$$S_T - s_T = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \times (x_k - x_{k-1}) < \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

~~Definiция:~~

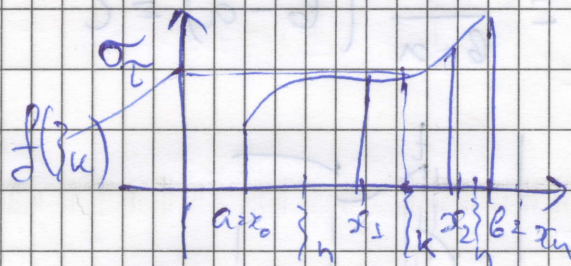
Суми на Риман (σ_T)

$$S_T \leq \sigma_T \leq S_T$$

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

$$d \geq \max (x_k - x_{k-1})$$

$$d(\tau)$$



Дефиниция: Казваме, че числото I е граница на Римановите суми σ_T при $d(\tau) \rightarrow 0$

диаметър на деление $\rightarrow$ означава изм. 0.

Ако за $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, че каквото и деление с диаметър $d(\tau) < \delta$ да е извършено ~~σ_T~~ $|\sigma_T - I| < \varepsilon$ при произволен избор на точките ξ_k

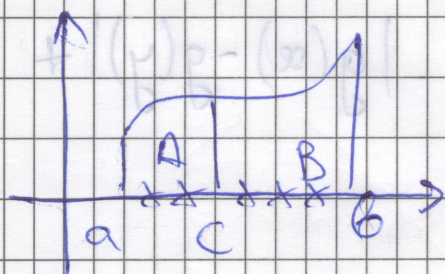
$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Свойства на Римановия интеграл

1) Аддитивност

Ако $\emptyset$ $a < c < b$ и $\int_a^b f(x) dx$ същ. (т.е. f е интегрируем в $[a, b]$), то тя е интегрируема и във всеки един подинтервал, ~~във~~ $[a, c]$ и $[c, b]$ и обратно, ако f е интегрируема в $[a, c]$ и $[c, b] \Rightarrow$ интегрируема в $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



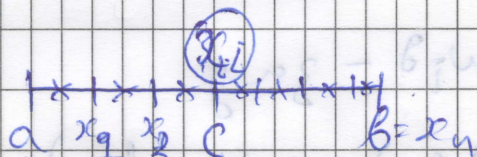
$$S_T - s_T < \varepsilon$$

$c \in [a, b]$ на ген.

$$S_T - s_T = (A_T - a_T) + (B_T - b_T)$$

$$\varepsilon \Rightarrow A_T - a_T < \varepsilon$$

$$\left. \begin{array}{l} A_T - a_T < \frac{\varepsilon}{2} \\ B_T - b_T < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow S_T - s_T < \varepsilon$$



$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

2) Линейност: Нека f и g са интегрируеми, тогава

$$\alpha f + \beta g \text{ е интегрируема и } \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

C -граничен преход в Риманови суми.

3) Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегрируеми в $[a, b]$, то f, g е интегрируеми

Доказателство: $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq L$

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)|$$

$$\underbrace{\quad}_{w_i^f} \quad w_i = M_i - m_i - \text{осцилация}$$

$$w_i^f - \text{за } f$$

$$w_i^g$$

$$w_i^g - \text{за } g$$

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M w_i^g + L w_i^f$$

за $\forall x$ и $\forall y \in i$ -томо интервал

$$\boxed{w_i^f \leq M w_i^g + L w_i^g} \quad (x_i - x_{i-1})$$

$$S_n^f g - s_n^f g \leq \underbrace{M(s_n^g - s_n^f)}_{\text{произволно малко}} + \underbrace{L(s_n^f - \bar{s}_n^f)}_{\text{произволно малко}}$$

$< \frac{\varepsilon}{2M}$ $< \frac{\varepsilon}{2L}$

Интегриране на неравенства

Теорема: Ако $f(x)$ е интегрируема и $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Доказателство: $S_n \geq 0$, и $n, m \geq 0$

~~Тук~~ $\int_a^b f(x) dx = \sup S_n \geq 0$

Следствие: Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегрируеми и $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

$$h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$$

и прилагаме теоремата

$$\int h \geq 0$$

$$\int h = \int f - \int g$$

Следствие: Ако $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Следствие: Ако f е интегрируема, то известно е,

че $|f|$ е интегрируема

$$f \leq |f|$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$-|f| \leq f$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

Т. 2: f - постоянна на мон. g -интегр.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) g'(x) dx = f(a) \int_a^b g'(x) dx +$$

$$+ f(b) \int_a^b g'(x) dx$$

$$-A \leq B \leq A$$

$$|B| \leq A$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Теорема за средните стойности

T1: Нека f и g са интегрируеми и g не сменя знака си

$$\text{Нека } m = \inf_{[a,b]} f(x) \quad M = \sup_{[a,b]} f(x)$$

$$\text{Тогава } \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x) \cdot dx$$

Теорема 1': Нека f е непрекъснатата, g е интегрируема и не сменя знака си. Тогава $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

Теорема 1' $\rightarrow$ следва веднага от теорема 1, ~~така~~ тъй като при f непрек. $\exists \xi : f(\xi) = M$

Доказателство: Нека $g(x) \geq 0$ в $[a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \wedge \quad g(x) \geq 0$$

$$m g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M g(x)$$

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b g(x) dx \geq 0$$

$$\text{Следователно } \int_a^b g(x) dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

2-та. $\int_a^b g(x) dx \geq 0$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

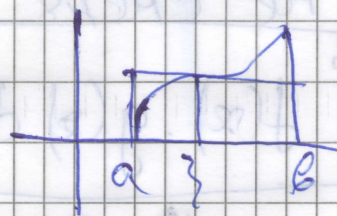
→ означаване средна с μ

Следствие:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

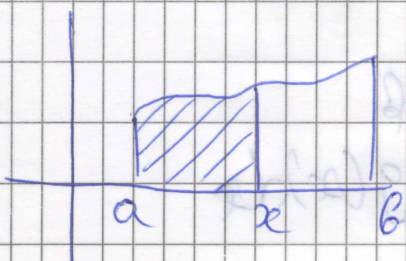
f - непрекъснат

Т. 1' с $g(x) \equiv 1$



21.1.2013г. Теорема на Лайбниц - Нютон
формула за пресмятане на определен интеграл

Нека $F(x) = \int_a^x f(t) dt \rightarrow$ { функция на горна
граница на интегриране



Поборение: $F(x)$ е непрекъснатата функция на $[a, b]$

Доказателство: $F(x)$ е интегрируема $\Rightarrow$ ограничена

$$\text{т.е. } \exists M : |f(x)| \leq M$$

$$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right|$$

$$\int_a^x f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

$$x_i - x_{i-1}$$

$$x_{i-1} - x_i$$

$$a \quad x_{i-1} \quad x_i \quad b = x_n$$

от сумите на Лаплас

$$\Rightarrow \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq M |x - x_0|$$

$$\Rightarrow M |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

$\Rightarrow F(x)$ е непрекъснатата в $[a, b]$

За изпита Теорема на Лайбниц - Нютон

Нека $f(x)$ е непрекъснатата в $[a, b]$. Тогава

$$\left[F(x) = \int_a^x f(t) dt \right] \text{ е диференцируема и } \boxed{F'(x) = f(x)}$$

Доказателство: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int$ (диференциално частно)

f е непрекъсн. $\{ \xi(x_0, x) \}$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\xi)(x - x_0)}{x - x_0} = \boxed{f(x_0)}$$

Следствие от теоремата за крайните нараствания / за средните стойности.

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \xi \rightarrow x_0 \Rightarrow f(\xi) \rightarrow f(x_0) \text{ - непрекъснатост}$$

Следствие: Нека f е непрекъснатата в $[a, b]$ и

$\Phi(x)$ е една нейна примитивна
(голямо Φ)

$$(\Phi'(x) = f(x)) \text{ . Тогава } \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$= \Phi(x) \Big|_a^b$ (Φ от x с граници от a до b)

Доказателство: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F \text{ е също примитивна } \Rightarrow \boxed{F(x) = \Phi(x) + c}$$

Показаме $x = a$
 $\Rightarrow c = -\Phi(a)$

$$F(a) = \Phi(a) + c \Rightarrow 0 = \Phi(a) + c$$

$\left. \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} = 0$

Показаме $x = b$

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Смяна на променливата при определен интеграл. Интегриране по частич при неопределен интеграл

Смяна на променливата при определен интеграл

Теорема: Нека $f(x)$ е непрекъснатата в Δ (интервал). Нека $\varphi(t)$ има непрекъснатата производна в интервала $[a, b]$.

Стойностите на φ да не напусна Δ .

Показаме $a \leq \varphi(a)$
 $b \leq \varphi(b)$.

Показаме $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \frac{\varphi'(t) dt}{d(\varphi(t))}$

Доказателство: Нека $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в Δ образуваме $\Phi(t) = F(\varphi(t))$

$$\phi'(t) = F(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \xrightarrow{F=f} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

$\Rightarrow \phi$ е примитивна на $f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \cdot dt = \phi(t) \Big|_a^b =$$

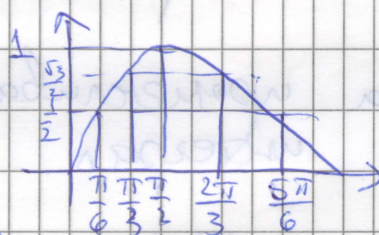
α граница α β

$$= \phi(b) - \phi(a) = F(\psi(b)) - F(\psi(a)) = F(b) - F(a) =$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

Примери:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$$



$$\Delta = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$x = \sin t \rightarrow$ монотонно
в гадане интервал
 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin t \cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \cos t$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}; \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6}; \beta = \frac{2\pi}{3}$$

или

$$\alpha = \frac{\pi}{6}; \beta = \frac{2\pi}{3}$$

не става, защото трябва
съответствие на ψ да не
кажеш Δ .

Повръщане: Нека $f(x)$ е зетка

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Нека $f(x)$ е незетка $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \stackrel{x=-t}{=} - \int_a^0 f(-t) dt + \\
 &+ \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \\
 &= \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx = \begin{cases} \int_0^a 2f(x) dx & f - \text{четна} \\ \int_0^a 0 dx = 0 & f - \text{нечетна} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Получение: Если $f(x)$ - непрерывна с периодом w (омега) $\Rightarrow \int_a^{a+w} f(x) dx = \int_0^w f(x) dx$

Доказательство: $\int_a^{a+w} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^w f(x) dx +$

$$+ \int_w^{a+w} f(x) dx \Rightarrow t = x + w$$

$$x = t - w$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{a+w}^w f(t-w) dt + \int_0^w f(x) dx + \int_w^{a+w} f(x) dx = \int_0^w f(x) dx \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad f(t)
 \end{aligned}$$

и обратного.

Интегриране по части
при определени интеграл

$$\left[\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \right]$$

Граници
от a до b

$u(x) \cdot v(x)$ е примяна за $u'(x) v(x) +$
 $+ u(x) \cdot v'(x) \Rightarrow \int_a^b [u'(x) v(x) + u(x) v'(x)] dx =$

$$= u(x) v(x) \Big|_a^b = \int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Остава следен знак на формулата на
Тейлър в интегрална форма

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt = - \int_a^x f'(t) d(x-t) =$$

$$= - \left[f'(t) d(x-t) \Big|_a^x - \int_a^x (x-t) d f'(t) \right] =$$

$$= f(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t) dt = f(x-a) - \int_a^x f''(t) (x-t) d(x-t)$$

$$= f(a)(x-a) - \int_a^x f''(t) d\left(\frac{(x-t)^2}{2}\right) =$$

$$= f'(a)(x-a) - \int_a^x f''(t) d\left(\frac{(x-t)^2}{2}\right) =$$

$$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} \left[f''(t)(x-t) \right]_a^x - \int_a^x (x-t)^2 dt (f'(t)) =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t) d\left(\frac{(x-t)^3}{3}\right) =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a)(x-a)^3 +$$

$$+ \dots + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{остатъкът член}}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x)}$$

остатъкът член в интегрална форма (ка формулата на Тейлор)

Като следствие от теоремата за средните стойности с $\boxed{g(x) = (x-t)^{n+1}}$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n dt =$$

$$= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ξ е точка м/у а и х

Формула на ЛAGRANGE за остатъчен член

За изпита: ① Множества, операции с множества - Дефиниции.

Доказателства:

① $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

② $\sup = ?$ $\inf = ?$ дефиниции

③ $\arcsin x$, $\arccos x$ - подробности дефиниции
Обратно изображение - биективно, сюрективно

④ С доказателство: Тракийски преход в неравенствата
✓ Сходяща редица е ограничена.
Нема за полигони

⑤ С доказателство: ✓ ограничена монотонна редица е сходяща

$(1 + \frac{1}{n})^n$ има граници (дефинираме e)
Теорема на Уолу без доказателство

Теорема на Коши за средните аритметични
и $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ (без доказателство)

6) 1) Ако $a_n \rightarrow a$, то $\forall$ подредица (сходяща) a_{n_k} също
клопи към a

2) a е точка на събиране $\Leftrightarrow \exists$ подредица $a_{n_k} \rightarrow a$

3) Теорема на Болиано-Вайерштрас

7) Редица е сходяща $\Rightarrow$ е ограничена и има
само една точка на събиране

НДЧ за сходимост на редица (Коши)
без доказателство

8 и 9) Лева и дясна граница (въпроси)

10) Формулировка за асимптоти (+ доказателство)

11) Дефиниция - непрекъснатост ~~на~~ функции
има пренасяване на ϵ - δ род)
Когато е непрекъсната, когато скакът е 0 (+ доказателство)

12) Теорема на Ферма
Ако $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$

13) Равномерна непрекъснатост (дефиниция)
 $\forall$ непрекъснатата, в $[a, b]$, функцията е
равномерно непрекъсната.
Теорема на Вайерштрас - непрекъснати в
краен затворен интервал е ограничена и достига

max и min стойности

③ формулировка на теоремата за осцилация
Доказателство: функциите на Лайбниц са
равномерно непрекъснати

~~13~~ диференциал

14) Диференциране на съставка от-8
(+ доказателство)

15) —

16) Правило на Лопитал
(формулировка на V)

Доказателство на 1, 3, 4 - та част (къси доказ.)

17) формулировка - теорема на Лайбниц (и.в)

18) Доказателство: формула на Шейлър

19) Резове на Шейлър за някои елементарни

Доказателство: само 1 за другите само формулировка

20) Локални екстремуми → теорема за знака

на знака на $f'(x)$
1-та $\neq 0$ е горна, негорна $\neq$ доказателство
или екстремум

! (21) Доказателство $f(x)$ е по всяка своя горна

формулировка $f(x)$ е като доминателната

Доказателство: $f(x)$ е извикана $\Rightarrow f(x)$ е монотонно
растягаща

(22) Критерий на Дарбу за интегрируемост
$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k - \sum_{k=1}^n \eta_k \right| < \varepsilon$$

(23) субституция на Ойлер
дифференциален бинам
универсална субституция } формулиров-
ки

(24) Доказателство

(25) Интегриране на неравенства (доказателство)
(вотсвата: адитивност, линейност (формули-
ране))

(26) Доказателство: Теорема за средните
стойности (с паренция $f(a)$)

$f(x)$ е интегрируема
 $f(x)$ е непрекъснатата

Теорема на Лайбниц - Нютон $\rightarrow$ доказателство

(27) Правило за пресмятане + доказателство

(28) Остатъчен член на формулата на
Рунге-Кутса (форма) Пейлер.

(29) Неравенство на Холдер + доказателство.
Неравенство на Микловски (без доказателство)

23.1.2013г. Неравенство Хьолдер

Нека $p, q \geq 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Неравенство на

$$m, n \leq \frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q}$$

$m, n \geq 0$

p'

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Нека например $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$

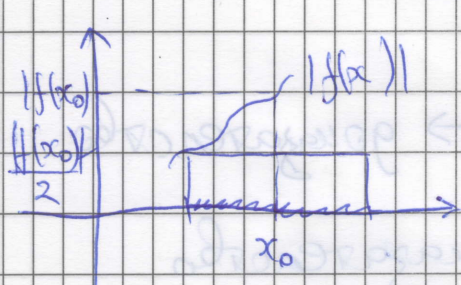
$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|^p (x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$\sum f(\xi_i)$$

$f(x)$ и $g(x)$ - частично непрекъснати

$f(x) = 0$ с изключение може да на точките на непрекъсване

Да допуснем, че $|f(x_0)| > 0$ в т. на непрекъснатост



но $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$ намираме $\delta: |x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< \frac{|f(x_0)|}{2} \\ |f(x)| - |f(x_0)| &< \frac{|f(x_0)|}{2} \end{aligned}$$

$$|f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0$$

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{|f(x_0)|}{2} dx > 0$$



4cn.) Нека разгледаме $f_1(x) = \frac{f(x)}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$, $\int_a^b |f_1(x)|^p dx = 1$,

$$\int_a^b |g_1(x)|^q dx = 1$$

$$|f_1(x)|^p + |g_1(x)|^q \leq \frac{|f(x)|^p}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{|g(x)|^q}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{q}{q-1}}}$$

$$\int_a^b |f_1(x)g_1(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f_1(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_a^b |g_1(x)|^q dx =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Неравенството е доказано за този конкретен случай

2) Обобщим случая $f(x)$ и $g(x)$

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f_1(x)|^p dx = \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{p}{p-1}}} = 1$$

$$\int |f_1(x)g_1(x)|dx \leq 1$$

по част 1 заместваме и се освобождаваме от знаменател

Неравенство на ~~М~~инковски
(неравенство на триъгълника)

R_1

x

R_2

(x_1, x_2)

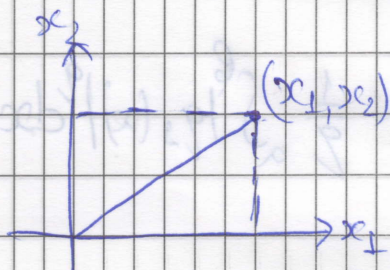
R_n

$(x_1, \dots, x_n)$

$\|(x_1, \dots, x_n)\| =$

Норма

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$



f
 g

$[a, b]$
 $[a, b]$

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\parallel$

$\parallel f \parallel_{L_p}$

$L_p -$

Нека $p \geq 1$ $\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство: Означим $c = A = \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx =$

$$= \int_a^b |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq$$

$$\leq \underbrace{\int_a^b |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} dx}_{I_2}$$

$$\int |FG| \cdot dx \leq \left(\int |F|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |G|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$F = f \quad G = |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

$$\left(\int_a^b |G(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{q}} \quad \begin{cases} (p-1)q = p \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \\ q(p-1) = p \end{cases}$$

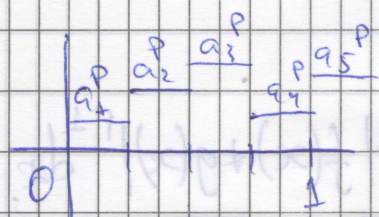
$$I_1 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot A^{\frac{1}{q}}$$

аналогично $I_2 \leq \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot A^{\frac{1}{q}}$

$$A \leq A^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$A^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{p}} \leq \text{гласната заедн. на Минковски}$$

п.з. на Минковски $\leq$ г.з. на Минковски



$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = a_1^p \frac{1}{n} + a_2^p \frac{1}{n} + \dots + a_n^p \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p$$

$g \rightarrow b_i$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

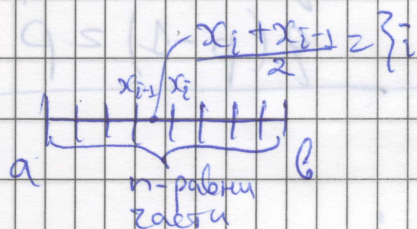
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p \geq 2$ (ℓ_p) - пространство от редници

Квадратурна формула на правоъгълниците

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) (x_i - x_{i-1})$$



$$|\sigma_n - \int_a^b f(x) dx| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f'''(x)|}{24n^2} (b-a)^3$$