ЛЕКЦИЯ 25
ТЕОРЕМА ЗА ЕПИМОРФИЗМИТЕ НА ГРУПИ

Теорема за епиморфизмите на групи. *Нека G и G' са групи и $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е епиморфизъм. Означаваме $\operatorname{Ker}(\varphi) = N$. Тогава изображението $G/N \xrightarrow{\psi} G'$, което се дефинира по следния начин:*

$$\text{ако } a \xrightarrow{\varphi} a', \text{ тогава } aN \xrightarrow{\psi} a'$$

е изоморфизъм м/у факторгрупата G/N и групата G'.

Доказателство:

Защо ψ е изображение (защо всеки съседен клас при ψ има единствен образ)?

Нека $aN = bN$ и нека $a \xrightarrow{\varphi} a'$ и $b \xrightarrow{\varphi} b'$. Тогава $aN \xrightarrow{\psi} a'$ и $bN \xrightarrow{\psi} b'$. Трябва да докажем, че $a' = b'$. От $aN = bN$ съгласно Твърдение 6 от Лекция 22 имаме, че $a^{-1}b \in N = \operatorname{Ker}(\varphi)$, т. е.

$$a^{-1}b \xrightarrow{\varphi} e',$$

където e' е единичният елемент на G'. Понеже φ е епиморфизъм имаме

$$a^{-1}b \xrightarrow{\varphi} (a')^{-1}b',$$

откъдето получаваме

$$(a')^{-1}b' = e' \Rightarrow a' = b'.$$

Защо ψ е „върху“ G/N?

Нека $a' \in G'$ е произволен елемент. Понеже φ е „върху“ имаме, че съществува елемент $a \in G$, такъв че $a \xrightarrow{\varphi} a'$. От дефиницията на ψ имаме $aN \xrightarrow{\psi} a'$. Следователно за произволен елемент $a' \in G'$ съществува елемент $a \in G$, такъв че $aN \xrightarrow{\psi} a'$. Доказахме, че ψ е „върху“.

Защо ψ изобразява различните елементи в различни?

Нека $aN \neq bN$. От Твърдение 6 на Лекция 22 имаме, че $a^{-1}b \notin N = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Ако $a \xrightarrow{\varphi} a'$ и $b \xrightarrow{\varphi} b'$, тогава $aN \xrightarrow{\psi} a'$ и $bN \xrightarrow{\psi} b'$. Трябва да докажем, че $a' \neq b'$. Понеже φ е епиморфизъм $a^{-1}b \xrightarrow{\varphi} (a')^{-1}b'$. Понеже $a^{-1}b \notin N = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ имаме $(a')^{-1}b' \neq e'$, т.е. $b' \neq a'$.

До тук доказахме, че ψ е 1-1 изображение.

Остава да докажем, че ψ изобразява произведение в произведение.

Нека aN и bN са произволни съседни класове. Нека $a \xrightarrow{\varphi} a'$ и $b \xrightarrow{\varphi} b'$. Тогава $aN \xrightarrow{\psi} a'$ и $bN \xrightarrow{\psi} b'$. Трябва да докажем, че $(aN)(bN) \xrightarrow{\psi} a'b'$. Понеже φ е епиморфизъм, имаме $ab \xrightarrow{\varphi} a'b'$. Това означава, че $abN \xrightarrow{\psi} a'b'$ и като използваме, че $abN = (aN)(bN)$ получаваме

$$(aN)(bN) \xrightarrow{\psi} a'b'.$$

Забележка. *Теорема 2 от предишната лекция твърди, че всяка факторгрупа е епиморфен образ на групата. От Теоремата за епиморфизмите на групи следва, че с точност до изоморфизъм други епиморфни образи на групата няма.*

Задача. *Нека G и G' са крайни групи, които имат взаимно прости редове и $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм. Тогава $g \xrightarrow{\varphi} e'$ $\forall g \in G$, където e' е единичния елемент на G'.*