ЛЕКЦИЯ 23
ИЗОМОРФИЗЪМ НА ГРУПИ. ХОМОМОРФИЗЪМ НА ГРУПИ.

Определение. *Казваме, че групите G и G' са изоморфни, ако съществува 1-1 изображение*

$$G \xrightarrow{\varphi} G',$$

такова че, ако

$$x \xrightarrow{\varphi} x' \text{ и } y \xrightarrow{\varphi} y',$$

тогава $xy \xrightarrow{\varphi} x'y'$, ако операцията е мултипликативна и $x + y \xrightarrow{\varphi} x' + y'$, ако операцията е адитивна. Изображението φ с тези свойства се нарича изоморфизъм между G и G'.

Примери.

1) Всеки изоморфизъм на линейни пространства е изоморфизъм на техните адитивни групи.

2) $\mathbb{Z}$ относно „+“

$$m \xrightarrow{\varphi} 2m.$$

Изображението φ е изоморфизъм между $\mathbb{Z}$ и нейната подгрупа $2\mathbb{Z}$.

3) Нека G е мултипликативна група на положителните реални числа, а G' е адитивна група на всичките реални числа. Изображението $x \mapsto \ln x$ е 1-1 изображение между G и G'. Равенството $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ означава, че изображението $\ln$ е изоморфизъм между групата G и групата G'.

Теорема 1. *Всеки две безкрайни циклични групи са изоморфни.*

Доказателство:

Нека $G = \langle a \rangle$ и $|a| = \infty$, $G' = \langle b \rangle$ и $|b| = \infty$. Тогава от Твърдение 6 на лекцията за подгрупи имаме, че

$$G = \langle a \rangle = \{a^0 = e, a^{\pm 1}, \dots, a^{\pm k}, \dots\}$$

$$G' = \langle b \rangle = \{b^0 = e, b^{\pm 1}, \dots, b^{\pm k}, \dots\}$$

Разглеждаме изображението

$$a^k \xrightarrow{\varphi} b^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Понеже различните степени на a са различни елементи на G и различните степени на b са различни елементи на G', изображението φ е 1-1 изображение.

Нека $a^k \xrightarrow{\varphi} b^k$ и $a^l \xrightarrow{\varphi} b^l$. Тогава

$$a^k a^l = a^{k+l} \xrightarrow{\varphi} b^{k+l} = b^k b^l.$$

Следователно φ е изоморфизъм.

Теорема 2. *Всеки две крайни циклични групи с равни редове са изоморфни.*

Доказателство:

Нека G и G' са групи, $G = \langle a \rangle$, $G' = \langle b \rangle$ и $|G| = |G'| = n$. От твърдение 5 на лекция 21 имаме

$$G = \langle a \rangle = \{a^0 = e, a^1, \dots, a^{n-1}\} \text{ и } |a| = n;$$

$$G' = \langle b \rangle = \{b^0 = e', b^1, \dots, b^{n-1}\} \text{ и } |b| = n.$$

Дефинираме изображението

$$a^k \xrightarrow{\varphi} b^k, \ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ясно е, че φ е 1-1 изображение между G и G'. Освен това при $k \geq n$ изображението φ не е дефинирано!

Нека $0 \leqq k < n$ и $0 \leq s < n$. Тогава

$$a^k \xrightarrow{\varphi} b^k \ \text{ и } \ a^s \xrightarrow{\varphi} b^s.$$

Нека $k + s = nq + r$, където $0 \leq r < n$. Тогава, понеже $a^n = e$ и $0 \leq r < n$, имаме

$$a^k a^s = a^{k+s} = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = a^r \xrightarrow{\varphi} b^r.$$

От $b^n = e'$ получаваме

$$b^r = (b^n)^q b^r = b^{nq+r} = b^{k+s} = b^k b^s.$$

Доказахме, че

$$a^k a^s \xrightarrow{\varphi} b^k b^s, \quad 0 \leq k < n, \quad 0 \leq s < n.$$

Следователно φ е изоморфизъм.

Хомоморфизъм на групи

Определение. *Нека G и G' са групи. Казваме, че изображението $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм на групата G в G', ако то изобразява произведението (сумата) в произведение(сума), т. е. ако $x \xrightarrow{\varphi} x'$ и $y \xrightarrow{\varphi} y'$, тогава*

$$xy \xrightarrow{\varphi} x'y' \qquad (x+y \xrightarrow{\varphi} x'+y').$$

Ако хомоморфизмът φ е изображение „върху“ G', тогава той се нарича епиморфизъм.

Ако хомоморфизмът φ изобразява различните елементи в различни, тогава той се нарича мономорфизъм.

Ясно е, че ако φ е мономорфизъм и епиморфизъм, тогава φ е изоморфизъм

Ако $G \equiv G'$, т. е. φ е хомоморфизъм на G в себе си, тогава φ се нарича ендоморфизъм, а всеки изоморфизъм на G със себе си, се нарича автоморфизъм на G.

Примери.

1) Всеки изоморфизъм на групи е специален вид хомоморфизъм.

2) G и G' са произволни групи и e' е неутралният елемент на G', тогава изображението

$$g \xrightarrow{\varphi} e' \text{ за всяко } g \in G$$

е хомоморфизъм на G в G'.

3) Разглеждаме пълната линейна група $\mathrm{GL}_n(F)$ над полето F. Нека $A \in \mathrm{GL}_n(F)$. Дефинираме:

$$A \mapsto \det(A).$$

Равенството $\det(AB) = \det A.\det B$ означава, че това изображение е хомоморфизъм на групата $\mathrm{GL}_n(F)$ в мултипликативната група на полето F. Докажете, че този хомоморфизъм и епиморфизъм.

4) Нека G е мултипликативната група на комплексните числа. Разглеждаме изображението

$$z \xrightarrow{\varphi} |z|.$$

Тъй като е вярно равенството $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$, изображението φ е хомоморфизъм на G в мултипликативната група на реалните положителни числа. Ясно е, че този хомоморфизъм е епиморфизъм.

5) Всеки линеен оператор на дадено линейно пространство е ендоморфизъм на адитивната група на това линейно пространство.

Основни свойства на хомоморфизмите

Свойство 1. *Хомоморфизмите изобразяват неутрален елемент в неутрален елемент.*

Доказателство:

Нека G и G' са групи и $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм. Нека e неутралният елемент на G, а e' е неутралният елемент на G'.

Ако $e \xrightarrow{\varphi} x' \in G'$, тогава $e = ee \xrightarrow{\varphi} x'x'$. Следователно $x'x' = x'$. Като умножим двете страни на това равенство с обратния елемент на x' получаваме $x' = e'$.

Свойство 2. *Нека G и G' са мултипликативни групи, $G \xrightarrow{\varphi} G'$ и $x \xrightarrow{\varphi} x'$ е хомоморфизъм. Тогава*

$$x^{-1} \xrightarrow{\varphi} (x')^{-1}.$$

Доказателство:

Нека $x \xrightarrow{\varphi} x'$ и $x^{-1} \xrightarrow{\varphi} y$. Тогава

$$e = xx^{-1} \xrightarrow{\varphi} x'y.$$

Съгласно Свойство 1, $x'y = e'$. Като умножим двете страни с $(x')^{-1}$, получаваме $y = (x')^{-1}$.

Определение. *Нека G и G' са групи и*

$$G \xrightarrow{\varphi} G'$$

е хомоморфизъм. Образ на този хомоморфизъм наричаме

$$\mathrm{Im}\,(\varphi) = \{x' \in G' \mid \text{ за който съществува } x \in G \text{ такъв, че } x \xrightarrow{\varphi} x'\}.$$

Ядро на този хомоморфизъм наричаме

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{x \in G \mid x \xrightarrow{\varphi} e' \text{ (неутрален елемент на } G')\}.$$

Ясно е че $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subseteq G'$ *и* $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \subseteq G$.

Свойство 3. *Нека $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм на групата G в групата G'. Тогава $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ е подгрупа на G'.*

Доказателство:

Нека x', $y' \in \operatorname{Im}(\varphi)$. Тогава съществуват x, $y \in G$, такива че $x \xrightarrow{\varphi} x'$ и $y \xrightarrow{\varphi} y'$. Понеже φ е хомоморфизъм имаме

$$xy \xrightarrow{\varphi} x'y'.$$

Следователно $x'y' \in \operatorname{Im}(\varphi)$. От Свойство 2 имаме $x^{-1} \xrightarrow{\varphi} (x')^{-1}$. Следователно, ако $x' \in \operatorname{Im}(\varphi)$, тогава $(x')^{-1} \in \operatorname{Im}(\varphi)$.

Свойство 4. *Нека $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм на групата G в групата G'. Тогава $\operatorname{Ker}(\varphi)$ е подгрупа на G.*

Доказателство:

Нека e е неутралният елемент на G, а e' е неутралният елемент на G'.

Съгласно Свойство 1 имаме $e \xrightarrow{\varphi} e'$. Следователно $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq \emptyset$.

Нека x, $y \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Тогава $x \xrightarrow{\varphi} e'$, $y \xrightarrow{\varphi} e'$ и

$$xy \xrightarrow{\varphi} e'e' = e'.$$

Следвателно $xy \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. От Свойство 2 имаме

$$x^{-1} \xrightarrow{\varphi} (e')^{-1} = e'.$$

Следователно, ако $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, тогава $x^{-1} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.