ЛЕКЦИЯ 20
ГРУПИ. ОСНОВНИ СЛЕДСТВИЯ ОТ АКСИОМИТЕ. СИМЕТРИЧНА ГРУПА НА ДАДЕНО МНОЖЕСТВО.

Определение. *Нека $G \neq \emptyset$ е множество, в което е дефинирана бинарна операция. Казваме, че относно тази операция G е група ако са изпълнени следните условия:*

(1) операцията е асоциативна, т. е. G е полугрупа;

(2) съществува неутрален елемент:

При мултипликативна операция това означава, че съществува $e \in G$, който се нарича единичен елемент на G, такъв че $eg = ge = g$.

При адитивна операция това означава, че съществува $o \in G$, който се нарича нулев елемент на G, такъв че $o + g = g + o = g$.

(3) всеки елемент на G е обратим:

При мултипликативна операция това означава, че за всеки елемент $g \in G$ съществува $g^{-1} \in G$, който се нарича обратен елемент на g, такъв че $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

При адитивна операция това означава, че за всеки елемент $g \in G$ съществува $-g \in G$, който се нарича противоположен елемент на g, такъв че $g + (-g) = (-g) + g = o$.

Ако операцията е комутативна тогава групата се нарича *комутативна* или *абелева*. Броят на елементите на дадена група (или нейната мощност) се нарича *ред* на групата G и се бележи с $|G|$.

Примери.

1) Относно събирането линейните пространства и пръстените са абелеви групи.

2) Ненулевите елементи на всяко поле относно умножението образуват абелева група. Тази група се нарича *мултипликативна* група на полето.

3) Обратимите квадратни матрици от n-ти ред над полето F относно умножението образуват група, която се нарича *пълна линейна група* и се бележи с $\mathrm{GL}_n(F)$. Тази група не е абелева.

4) В $\mathbb{Z}$ числата 1 и -1 относно умножението образуват група от два елемента.

Задача. *Да се докаже, че във всеки пръстен с единица множеството на обратимите елементи наследява операцията умножение и относно тази наследена операция е група.*

Ще отбележим, че примерите 2), 3) и 4) са специални случаи на тази задача.

Непосредствени следствия от аксиомите на група

Следствие 1. *Единственост на неутралния елемент.*

Следствие 2. *Единственост на обратния елемент.*

Следствие 3. *Произведението (сумата) на краен брой елементи не зависи от начина, по който са поставени скобите.*

Следствие 4. *Вярно е равенството*

$$(a_1a_2\dots a_k)^{-1} = a_k^{-1}\dots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

Следствие 5. *От $ax = ay$ или $xa = ya$ следва $x = y$.*

Следствие 6.

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

Симетрична група на дадено множество

Нека $\Omega \neq \emptyset$ е дадено множество. Разглеждаме полугрупата $M(\Omega)$ на всичките изображения на Ω в Ω. Множеството на всичките 1-1 изображения на Ω върху Ω, означаваме със $S(\Omega)$. Ясно е, че $S(\Omega) \subset M(\Omega)$.

Твърдение. *$S(\Omega)$ наследява операцията на полугрупата $M(\Omega)$ и относно наследената операция е група.*

Доказателство:

Нека φ, $\psi \in S(\Omega)$. Понеже тези изображения са „върху“ Ω имаме

$$\varphi(\Omega) = \Omega \text{ и } \psi(\Omega) = \Omega.$$

Следователно $\varphi\psi(\Omega) = \varphi(\Omega) = \Omega$, т. е. $\varphi\psi$ също е изображение „върху“ Ω.

Нека u, $v \in \Omega$ и $u \neq v$. Тогава $\psi(u) \neq \psi(v)$. Следователно $\varphi(\psi(u)) \neq \varphi(\psi(v))$, т. е. $\varphi\psi$ изобразява различните елементи в различни. Доказахме, че $\varphi\psi \in S(\Omega)$, което означава че $S(\Omega)$ наследява операцията на $M(\Omega)$. Лесно се вижда, че тъждественото изображение $\varepsilon(x) = x$, за всяко $x \in \Omega$ е неутрален елемент на тази операция в $S(\Omega)$. Ако $\varphi \in S(\Omega)$ и $\varphi(x) = x'$, тогава дефинираме

$$\varphi^{-1}(x') = x.$$

Понеже всеки елемент $x \in \Omega$ има единствен праобраз, изображението φ^{-1} е дефинирано коректно. От $\varphi \in S(\Omega)$ лесно се вижда, че $\varphi^{-1} \in S(\Omega)$. Ясно е, че

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon.$$

С това проверката, че $S(\Omega)$ е група е завършена.

Определение. *Групата $S(\Omega)$ се нарича симетрична група на множеството Ω.*

Нека да разгледаме специалната ситуация, когато $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. В тази ситуация групата $S(\Omega)$ се нарича симетрична група от n-та степен и се бележи с S_n. Полугрупата $M(\Omega)$ се нарича симетрична полугрупа от n-та степен и се бележи с M_n.

Нека $\varphi \in M_n$ и $\varphi(1) = i_1$, $\varphi(2) = i_2$, ..., $\varphi(n) = i_n$. Тогава изображението φ ще записваме по следния начин

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

При това представяне на φ очевидно е вярно, че

$$\varphi \in S(\Omega) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ е пермутация на числата от 1 до } n.$$

Следователно броят на елементите на групата S_n е равен на $n!$.