ЛЕКЦИЯ 16
СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Определение. *Казваме,че полиномът $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е симетричен, ако при всяко разместване на променливите той не се променя, т. е.*

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

за всяка пермутация $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ на числата от 1 до n.

Тъй като всяко разместване на променливите може да се реализира на няколко етапа, като на всеки етап се разменят само две променливи, за да проверим че един полином е симетричен, достатъчно е да проверим, че той не се променя когато разменим местата на кои да е две променливи.

Нека K е комутативен пръстен и $f, g \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ са симетрични полиноми. Тогава очевидно $f + g$, fg и $-f$ също са симетрични полиноми. Следователно симетричните полиноми в $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ образуват подпръстен.

Пример.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_{n-1} &= x_1x_2 \ldots x_{n-1} + \cdots + x_2x_3 \ldots x_n \\
\sigma_n &= x_1x_2 \ldots x_n
\end{aligned}$$

Полиномите $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ са симетрични, защото когато разместваме променливите редът на техните събираемите се променя, но сумата им остава същата. Полиномите $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ се наричат елементарни симетрични полиноми на променливите x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Ако $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ е едночлен, тогава $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \ldots \sigma_n^{\alpha_n}$ е симетричен полином на x_1, x_2, $\ldots$, x_n, защото при произволно разместване на променливите x_1, x_2, $\ldots$, x_n полиномите σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n не се променят. Следователно не се променя и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По-общо, ако $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е произволен полином, тогава $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ е симетричен полином на x_1, x_2, $\ldots$, x_n, защото от всеки едночлен на g се получава симетричен полином на x_1, x_2, $\ldots$, x_n, а сумата на симетрични полиноми е също симетричен полином. Основната ни цел в тази лекция е да докажем, че с тази процедура може да бъде получен всеки симетричен полином.

Ще са ни необходими следните две леми.

Лема 1. *Нека* $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *е едночлен,* $A \neq 0$. *Тогава*

$$\text{гл.едночлен } \left(A\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\ldots\sigma_n^{\alpha_n}\right) = Ax_1^{\alpha_1+\cdots\alpha_n}x_2^{\alpha_2+\cdots\alpha_n}\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}x_n^{\alpha_n}.$$

Доказателство:

Понеже гл. едночлен $(fg) = \big($гл. едночлен $(f)\big).\big($гл. едночлен $(g)\big)$, имаме

$$\begin{array}{l}
\text{гл.едночлен}\big(\sigma_1\big) = x_1 \Rightarrow \text{гл. едночлен}\big(\sigma_1^{\alpha_1}\big) = x_1^{\alpha_1}\\
\text{гл.едночлен}\big(\sigma_2\big) = x_1x_2 \Rightarrow \text{гл. едночлен}\big(\sigma_2^{\alpha_2}\big) = \big(x_1x_2\big)^{\alpha_2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{гл.едночлен}\big(\sigma_n\big) = x_1x_2\ldots x_n \Rightarrow \text{гл. едночлен}\big(\sigma_n^{\alpha_n}\big) = \big(x_1x_2\ldots x_n\big)^{\alpha_n}
\end{array}.$$

Понеже

$$\text{гл.едночлен } \left(A\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\ldots\sigma_n^{\alpha_n}\right) = A.\text{гл.едночлен } \left(\sigma_1^{\alpha_1}\right)\ldots\text{гл.едночлен } \left(\sigma_n^{\alpha_n}\right),$$

от тези равенства получаваме

$$\text{гл.едночлен } \left(A\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\ldots\sigma_n^{\alpha_n}\right) = A.x_1^{\alpha_1}\big(x_1x_2\big)^{\alpha_2}\ldots\big(x_1x_2\ldots x_n\big)^{\alpha_n} =$$
$$Ax_1^{\alpha_1+\cdots\alpha_n}x_2^{\alpha_2+\cdots\alpha_n}\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}x_n^{\alpha_n}.$$

Лема 2. *Нека* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *е симетричен полином, който е ненулев и* гл. едночлен$(f) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$. *Тогава* $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$.

Доказателство:

Нека
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} + \cdots.$$

В $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ разместваме x_1 и x_2 и получаваме

$$f(x_2, x_1, \ldots, x_n) = Ax_2^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} + \cdots = Ax_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} + \cdots.$$

Следователно $Ax_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ е едночлен на $f(x_2, x_1, \dots, x_n)$. Понеже f е симетричен

$$f(x_2, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Следователно $Ax_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ е едночлен на $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Този едночлен не може да е по-голям от главния едночлен $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$. Поради това $\alpha_2 \leq \alpha_1$.

Разместваме променливите x_2 и x_3 и получаваме

$$f(x_1, x_3, x_2, \dots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}x_2^{\alpha_3}\dots x_n^{\alpha_n} + \cdots = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_3}x_3^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} + \cdots .$$

Следователно $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_3}x_3^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ е едночлен на $f(x_1, x_3, x_2, \dots, x_n)$. Понеже f е симетричен, то

$$f(x_1, x_3, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Следователно $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_3}x_3^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ е едночлен на $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Този едночлен не може да е по-голям от главния едночлен $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\dots x_n^{\alpha_n}$. Следователно $\alpha_3 \leq \alpha_2$ и т. н.

Основният резултат за симетричните полиноми ни дава следната:

Теорема. *Нека F е поле. Тогава за всеки симетричен полином $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ съществува полином $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ такъв, че $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.*

Доказателство:

Ако $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е нулевият полином, тогава твърдението е очевидно ($g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ също е нулевият полином). Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е ненулев и

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\dots x_n^{\alpha_n} + \cdots ,\ A \neq 0,$$

където $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\dots x_n^{\alpha_n}$ е главният едночлен на f. Разглеждаме

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\dots\sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\sigma_n^{\alpha_n}.$$

От Лема 2 следва, че φ_1 е едночлен на σ_1, σ_2, $\dots$, σ_n. Поради това φ_1 е симетричен полином на x_1, x_2, $\dots$, x_n.

Съгласно Лема 1

$$\text{гл. едночлен}(\varphi_1) = \text{гл. едночлен}(f). \qquad (*)$$

Разглеждаме полинома $f_1 = f - \varphi_1$. Ако f_1 е нулев полином, тогава $f = \varphi_1$ и теоремата е доказана. Ако f_1 е ненулев полином от (*) следва, че

$$\text{гл. едночлен}(f_1) < \text{гл. едночлен}(f).$$

Полиномът f_1 като разлика на два симетрични полинома също е симетричен полином. Нека

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n} + \cdots,$$

където $Bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ е главният едночлен на f_1. Разглеждаме

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = B\sigma_1^{\beta_1-\beta_2} \sigma_2^{\beta_2-\beta_3} \ldots \sigma_{n-1}^{\beta_{n-1}-\beta_n} \sigma_n^{\beta_n}.$$

Съгласно Лема 2, φ_2 е едночлен на σ_1, σ_2, …, σ_n. Следователно φ_2 е симетричен полином на x_1, x_2, …, x_n.

От Лема 1 следва, че

$$\text{гл. едночлен}(\varphi_2) = \text{гл. едночлен}(f_1). \tag{**}$$

Разглеждаме $f_2 = f_1 - \varphi_2$. Ясно е, че f_2 е симетричен. Ако f_2 е ненулев полином от (**) става ясно, че главния едночлен на f_2 е по-малък от главния едночлен f_1. За f_2 правим същите разсъждения както за f_1 и т. н. По този начин получаваме редицата от полиноми:

$$f_0 = f,\ f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots,\ f_k, \ldots \tag{\#}$$

със следните свойства:

(1) Ако $f_k \neq 0$, тогава съществува и f_{k+1};

(2) всеки от тези полиноми е симетричен;

(3) гл. едночлен$(f_i) <$ гл. едночлен (f_{i-1});

(4) $f_i = f_{i-1} - \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, където $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е едночлен на σ_1, σ_2, …, σ_n, който се определя от главния едночлен на f_{i-1}. По-точно, ако $Cx_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n}$ е главният едночлен на f_{i-1} тогава

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C\sigma_1^{\gamma_1-\gamma_2} \sigma_2^{\gamma_2-\gamma_3} \ldots \sigma_{n-1}^{\gamma_{n-1}-\gamma_n} \sigma_n^{\gamma_n}.$$

От (4) за тези полиноми имаме:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = f - \varphi_1 \\ f_2 = f_1 - \varphi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k = f_{k-1} - \varphi_k \end{array}\right\} \Rightarrow f = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k + f_k$$

От последното равенство става ясно,че ако някой полином f_k от (#) е нулев,тогава $f = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k$. Понеже φ_i са едночлени на σ_1, σ_2, …, σ_n с коефициенти от полето F следва, че f е полином на σ_1, σ_2, …, σ_n с коефициенти от полето F и теоремата ще бъде доказана. Остава да докажем, че в (#) има нулев полином.

Да допуснем противното, т. е. че в (#) няма нулев полином.

Съгласно (1) редицата (#) е безкрайна. Нека $Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}$ е главен едночлен на някой полином от (#). Тогава съгласно (3), $Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}$ е по-малък от $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$. Поради това $\gamma_1 \le \alpha_1$. Понеже $Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}$ е главен едночлен на симетричен полином, съгласно Лема 2, $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \dots \ge \gamma_n$ и следователно

$$\alpha_1 \ge \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \dots \ge \gamma_n.$$

И така, степените на променливите x_i в главните едночлени на полиномите от (#) образуват наредени n-орки цели числа, всяко от които принадлежи на интервала $[0, \alpha_1]$. Но от целите числа в този интервал можем да образуваме само краен брой различни наредени n-орки. Понеже (#) е безкрайна, правим извода, че съществуват два полинома в (#), главните едночлени на които са подобни. Това противоречи на (3). Теоремата е доказана.

Следствие. *Нека F е поле, $f(x) \in F[x]$,* ст. $f(x) \ge 1$. *Нека полето E е разширение на F, над което $f(x)$ се разлага на линейни множители, т. е.*

$$f(x) = A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n), \text{ където } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E.$$

Тогава, ако $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е симетричен полином от $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$, е вярно, че $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in F$.

Доказателство:

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx_n$, $a_n \ne 0$.

Съгласно Теоремата съществува $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$, такъв че $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Тогава

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \psi(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \dots, \alpha_1 \dots \alpha_n).$$

От това равенство и формулите на Виет става ясно, че $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ се получава като в $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ заместим

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_2 &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Понеже $-\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots, (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \in F$ и коефициентите на $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са от полето F следва, че $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in F$.

Пример. *Нека* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, ст. $f(x) \geq 1$ *и полето* E *е разширение на* $\mathbb{R}$, *над което*
$$f(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$
където $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in E$.

За всяко естествено число k *полиномът* $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, *е симетричен. Поради това* $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k \in \mathbb{R}$.

Ако $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, *тогава* $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k \in \mathbb{Q}$.

Дискриминанта на полином

Нека F е поле и $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in F[x]$, $a_n \neq 0$, $n \geq 2$. Нека полето E е разширение на полето F и $f(x)$ се разлага над E на линейни множители
$$f(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$
Дискриминанта на $f(x)$ наричаме $D\big(f(x)\big) = a_n^{2n-2} \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Ако $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, да се провери, че $D\big(f(x)\big) = b^2 - 4ac$.

Да разгледаме полинома $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_n^{2n-2} \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$.

Тъй като $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е симетричен полином, съгласно основното следствие имаме
$$D\big(f(x)\big) = h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F.$$
Поради това дискриминантата не зависи от разширението E и е дефинирана коректно.

Очевидно са верни следните:

Твърдение 1. *Нека* $f(x)$ *е полином и* ст. $f(x) \geq 2$. *Тогава* $f(x)$ *има корен с кратност* $\geq 2 \Leftrightarrow D\big(f(x)\big) = 0$.

Твърдение 2. *Нека* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *и* ст. $f(x) \geq 2$. *Ако* $D\big(f(x)\big) < 0$, *тогава* $f(x)$ *има нереален корен.*

От училище знаем, че ако $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и ст. $f(x) = 2$, корените на $f(x)$ са реални само когато $D\big(f(x)\big) \geq 0$.

Задача 1. *Нека* $f(x)$ *е полином с реални коефициенти и* ст. $f(x) = 3$. *Корените на* $f(x)$ *са реални* $\Leftrightarrow D\big(f(x)\big) \geq 0$.

Задача 2. *В* $\mathbb{R}[x]$ *да се намери полином от четвърта степен, дискриминантата на който да е положителна и всичките му корени да не са реални.*