ЛЕКЦИЯ 15
ПРЪСТЕН НА ПОЛИНОМИТЕ ОТ НЯКОЛКО ПРОМЕНЛИВИ

Определение. *Нека K е комутативен пръстен. Едночлен на променливите x_1, ..., x_n над пръстена K наричаме израз от вида*

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}, \quad A \in K,$$

където α_i са цели неотрицателни числа и A се нарича коефициент на този едночлен.

Тези от променливите във даден едночлен, чиито степени са равни на нула няма да ги пишем, но ще ги подразбираме. Така например вместо $Ax_1^3x_2^0x_3^7$ ще пишем $Ax_1^3x_3^7$, а едночлена $Ax_1^0\dots x_n^0$ ще отъждествяваме с коефициента A и ще го наричаме константа. Ако в K има единица 1, тогава вместо $1.x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ ще пишем $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$.

Определение. *Казваме,че едночлените $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ и $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$ са подобни, ако $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$.*

Определение. *Нека K е комутативен пръстен. Полином на променливите x_1, ..., x_n над пръстена K наричаме израз от вида:*

$$f(x_1,\dots,x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} + Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n} + \dots + Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n},$$

където $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$, $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$,... $Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}$ са краен брой едночлени над K, всеки два от които не са подобни. Елементите A, B, ..., $C \in K$ се наричат коефициенти на $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Полиномът $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ се нарича нулев полином, ако всичките му коефициенти са равни на нула.

Множеството на всички полиноми на променливите $x_1, \ldots, x_n$ над пръстена K ще бележим с $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Тъй като едночлените от вида $Ax_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$ отъждествяваме с коефициента A, имаме че $K \subset K[x_1, \ldots, x_n]$.

Определение. *Нека K е пръстен. Казваме че два полинома от $K[x_1, \ldots, x_n]$ са равни, ако те съвпадат буквално или се различават само с едночлени с нулеви коефициенти.*

Ще дефинираме операции в $K[x_1, \ldots, x_n]$, както следва.

Определение. *Нека $Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ и $Bx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ са два подобните едночлена. Сума на тези едночлени наричаме едночлена*

$$(A + B)x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Когато събираме подобни едночлени, казваме че сме извършили привеждение на тези едночлени.

Определение. *Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ са два полинома на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над пръстена K. Сума на тези полиноми наричаме полинома, който се получава по следния начин: към едночлените на f дописваме едночлените на g и извършваме приведение на подобните едночлени.*

Определение. *Нека $Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ и $Bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ са два едночлена. Произведение на тези едночлени наричаме едночлена*

$$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1} x_1^{\alpha_2+\beta_2} \ldots x_1^{\alpha_n+\beta_n}.$$

Определение. *Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ са два полинома на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над пръстена K. Произведение на тези полиноми наричаме полинома, който се получава по следния начин: всеки едночлен на f се умножава с всеки едночлен на g и извършваме приведение на подобните едночлени.*

Забележка. *Ако прибавим или премахнем от полиномите $f(x_1 \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ едночлени с нулеви коефициенти, тяхната сума и тяхното произведение не се променят. Поради това сумата и произведението на два полинома са дефинирани коректно.*

Твърдение. *Нека K е комутативен пръстен. Относно въведените операции $K[x_1, \ldots, x_n]$ също е комутативен пръстен. Константите образуват подпръстен на $K[x_1, \ldots, x_n]$, който съвпада с първоначалния пръстен K. Ако K има единица, тогава $K[x_1, \ldots, x_n]$ също има единица (това е единицата на пръстена K разглеждана като едночлен с нулеви степени на променливите).*

Доказателството на твърдението да се направи самостоятелно.

Определение. *Нека $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ е ненулев едночлен, т. е. $A \neq 0$. Степен на този едночлен наричаме числото $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n$. Ако $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е ненулев полином, тогава степен на f наричаме максималната от степените на ненулевите едночлени на f.*

Примери.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2x_2^3x_3^4 + 7x_1x_2^7x_3^8 - 21x_2^{14}x_3^2$. Тогава ст. $(f) = 16$.

Ако степените на всичките едночлени на f са равни на k, казваме че f е еднороден полином от степен k, или че f е k-*форма.*

2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ — 1-*форма* (линейна)
2-*формите* са всъщност квадратичните форми.

Лексикографска наредба на ненулеви едночлени

Определение. *Нека $\varphi_1 = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ и $\varphi_2 = Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$ са ненулеви едночлени, които не са подобни. Казваме, че φ_1 е по-голям в лексикографски смисъл от φ_2 и пишем $\varphi_1 > \varphi_2$, ако първата ненулева разлика $\alpha_1-\beta_1$, $\alpha_2-\beta_2$, ..., $\alpha_n-\beta_n$ е положителна, т.е. ако съществува цяло $i \geq 0$, такова че*

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_i = \beta_i,\ \text{но}\ \alpha_{i+1} > \beta_{i+1}.$$

Със следващите твърдения ще изясним че лексикографската наредба има обичайните свойства на неравенствата.

Твърдение 1. *Нека φ_1, φ_2, φ_3 са ненулеви едночлени, такива че $\varphi_1 > \varphi_2$ и $\varphi_2 > \varphi_3$. Тогава $\varphi_1 > \varphi_3$.*

Доказателство:

Нека $\varphi_1 = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$, $\varphi_2 = Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$ и $\varphi_3 = Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}$. От $\varphi_1 > \varphi_2$ имаме, че съществува i, такова че

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_i = \beta_i \text{ и } \alpha_{i+1} > \beta_{i+1}. \tag{*}$$

От $\varphi_2 > \varphi_3$ имаме, че съществува j, такова че

$$\beta_1 = \gamma_1,\ \beta_2 = \gamma_2, \dots, \beta_j = \gamma_j \text{ и } \beta_{j+1} > \gamma_{j+1}. \tag{**}$$

Случай 1: $i > j$. От (*) и (**) имаме

$$\alpha_1 = \gamma_1,\ \alpha_2 = \gamma_2, \dots, \alpha_j = \gamma_j \text{ и } \alpha_{j+1} = \beta_{j+1} > \gamma_{j+1}.$$

Следователно $\varphi_1 > \varphi_3$.

Случай 2: $i = j$. От (*) и (**) имаме

$$\alpha_1 = \gamma_1,\ \alpha_2 = \gamma_2, \dots, \alpha_i = \gamma_i \text{ и } \alpha_{i+1} > \beta_{i+1} = \beta_{j+1} > \gamma_{j+1}.$$

Следователно $\varphi_1 > \varphi_3$.

Случай 3: $i < j$. От (*) и (**) имаме

$$\alpha_1 = \gamma_1,\ \alpha_2 = \gamma_2, \dots, \alpha_i = \gamma_i \text{ и } \alpha_{i+1} > \beta_{i+1} = \gamma_{i+1}, \text{ защото } i+1 \le j.$$

Следователно $\varphi_1 > \varphi_3$.

Твърдение 2. *Нека φ_1, φ_2, φ_3 са ненулеви едночлени и $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогава $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_3$.*

Доказателство:

Нека

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}, \\ \varphi_2 &= Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}, \\ \varphi_3 &= Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}. \end{aligned}$$

От $\varphi_1 > \varphi_2$ следва, че съществува такова i, че

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_i = \beta_i \text{ и } \alpha_{i+1} > \beta_{i+1} \tag{\#}$$

Имаме

$$\begin{aligned} \varphi_1\varphi_3 &= ACx_1^{\alpha_1+\gamma_1}\dots x_n^{\alpha_n+\gamma_n} \\ \varphi_2\varphi_3 &= BCx_1^{\beta_1+\gamma_1}\dots x_n^{\beta_n+\gamma_n} \end{aligned}$$

От (#) получаваме $\alpha_1 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_1$, …, $\alpha_i + \gamma_i = \beta_i + \gamma_i$ и $\alpha_{i+1} + \gamma_{i+1} > \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}$. Следователно $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_3$.

Твърдение 3. *Нека φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 са едночлени. Ако $\varphi_1 > \varphi_2$ и $\varphi_3 > \varphi_4$, тогава $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_4$.*

Доказателство:

Съгласно Твърдение 2

$$\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_3 \text{ и } \varphi_2\varphi_3 > \varphi_2\varphi_4.$$

От тези неравенства и Твърдение 1 следва $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_4$.

Определение. *Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е ненулев полином. Най-големият в лексикографски смисъл едночлен на f се нарича главен едночлен на f.*

Тъй като f се състои от неподобни едночлените, главния едночлен се определя еднозначно.

Пример.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{2x_1^2x_2x_3}_{\text{главен едночлен}} + x_1x_2^7x_3^{57} + x_1x_2^{77}x_3^{44} - 7x_2^{1054}x_3^{2004}.$$

Теорема. *Нека K е комутативен пръстен, без делители на нулата. Тогава главният едночлен на произведението на краен брой полиноми е равен на произведението на главните едночлени на тези полиноми.*

Доказателство:

Достатъчно е да докажем теоремата за произведение два полинома.

Нека

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} + \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

където $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ е главният едночлен на f, т. е. всеки едночлен на φ е по-малък от $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ и

$$g(x_1, \ldots, x_n) = Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} + \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

където $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$ е главният едночлен на g, т. е. всеки едночлен на ψ е по-малък от $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$. Тогава

$$f.g = ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\ldots x_n^{\alpha_n+\beta_n} + Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\psi + Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}\varphi + \psi\varphi$$

Трябва да докажем, че главният едночлен на $f.g$ е

$$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\ldots x_n^{\alpha_n+\beta_n}.$$

Този едночлен е ненулев, защото в K няма делители на нулата и $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Тъй като всеки едночлен на ψ е по-малък от $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$, от Твърдение 2 следва, че $ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е по-голям от всеки едночлен на $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}\psi$.

Тъй като всеки едночлен на φ е по-малък от $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$, от Твърдение 2 следва, че $ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е по-голям от всеки едночлен на $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}\varphi$.

Едночленът $ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е по-голям от всеки едночлен на $\varphi\psi$ съгласно Твърдение 3. Следователно $ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е главен едночлен на fg.

С това теоремата е доказана.

Следствие. *Ако в пръстена K няма делители на нулата, тогава в $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ също няма делители на нулата.*

Задача. *Нека φ_1, φ_2, ..., φ_k, ... е редица от ненулеви едночлени, такива че всеки от тях е по-малък в лексикографски смисъл от предишния. Тогава тази редица е крайна.*