ЛЕКЦИЯ 10
ТЕОРЕМА НА ХАМИЛТОН-КЕЙЛИ

Нека K е комутативен пръстен с единица 1. С $M_n(K)$ означаваме множеството на квадратните матрици от n-ти ред елементите на които принадлежат на K. Както вече отбелязахме $M_n(K)$ е пръстен относно операциите събиране и умножаване на матрици. Този пръстен не е комутативен, но има единица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

За всяка матрица $A \in M_n(K)$ детерминантата $\det(A)$ на A се дефинира по същия начин, както това направихме миналия семестър за числови квадратни матрици. Ясно е, че $\det(A) \in K$.

Тъй като $K[\lambda]$ също е комутативен пръстен с единица, можем да разгледаме пръстена $M_n(K[\lambda])$. Ако $C \in M_n(K[\lambda])$, тогава елементите на C са полиноми на λ над пръстена K, т. е. $C = \big(c_{ij}(\lambda)\big)$, където $c_{ij}(\lambda)$ са полиноми на λ над K, т. е. $c_{ij}(\lambda) \in K[\lambda]$. Ясно е, че $\det(C)$ е полином над K, т. е. $\det(C) \in K[\lambda]$.

Пример. *Ако $A \in M_n(K)$, характеристичната матрица $A - \lambda E \in M_n(K[\lambda])$. Адюнгираната на $A - \lambda E$ матрица също принадлежи на $M_n(K[\lambda])$. Всеки ненулев елемент на тази адюнгирана матрица е полином със степен не по-голяма от $n - 1$ (защо?).*

Да припомним, че матриците $A = \big(a_{ij}(\lambda)\big)$, $B = \big(b_{ij}(\lambda)\big) \in M_n(K[\lambda])$ са равни в смисъла на пръстена $M_n(K[\lambda])$, ако полиномите $a_{ij}(\lambda) = b_{ij}(\lambda)$ са равни в алгебричен смисъл за всяко i и j.

В пръстена $M_n(K[\lambda])$ освен основните две операции имаме още една операция:

$$\text{ако } A \in M_n(K[\lambda]) \text{ и } f(\lambda) \in K[\lambda],$$

тогава с $f(\lambda)A = Af(\lambda)$ означаваме матрицата, която се получава като всеки елемент на A (който е полином на λ) умножим с полинома $f(\lambda)$.

Следващият пример показва, че всяка матрица от $M_n(K[\lambda])$ може да се получи от няколко матрици, които не зависят от λ, с помощта на тази операция и обичайното събиране на матрици.

Пример. *Нека K е комутативен пръстен и*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 & b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 \\ c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 & d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 \end{pmatrix} \in M_n(K[\lambda]).$$

Тогава

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \lambda^2.$$

От този пример виждаме, че е вярна следната

Лема 1. *Нека K е комутативен пръстен и $A \in M_n(K[\lambda])$. Нека степените на всички ненулеви елементи на A не са по-големи от s. Тогава*

(*) $$A = A_0 + A_1\lambda + \cdots A_s\lambda^s,$$

където A_0, A_1, $\ldots A_s$ не зависят от λ, т. е. $A_i \in M_n(K)$, $i = 0, \ldots, s$.

Ще докажем, че представянето (*) е единствено.

Лема 2. *Нека е комутативен пръстен, $A \in M_n(K[\lambda])$ и степента на всеки ненулев елемент на A не надминава s. Тогава представянето (*) е единствено в смисъл, че ако*

(**) $$A = B_0 + B_1\lambda + \cdots B_s\lambda^s,$$

където B_0, $\ldots$, B_s не зависят от λ, тогава

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1, \ldots,\ A_s = B_s.$$

Доказателство:

Нека $A = \big(a_{ij}(\lambda)\big)$, $A_0 = \big(a_{ij}^{(0)}(\lambda)\big)$, $\ldots$, $A_s = \big(a_{ij}^{(s)}(\lambda)\big)$, $B_0 = \big(b_{ij}^{(0)}(\lambda)\big)$, $\ldots$, $B_s = \big(b_{ij}^{(s)}(\lambda)\big)$.

От (*) имаме

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}\lambda + \cdots + a_{ij}^{(s)}\lambda^s,$$

а от (**) имаме
$$a_{ij}(\lambda) = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}\lambda + \cdots + b_{ij}^{(s)}\lambda^s.$$

Следователно полиномите $a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}\lambda + \cdots + a_{ij}^{(s)}\lambda^s$ и $b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}\lambda + \cdots + b_{ij}^{(s)}\lambda^s$ са равни в алгебричен смисъл. Поради това съответните им коефициенти са равни. От $a_{ij}^0 = b_{ij}^0$, $\forall i, j$ следва $A_0 = B_0$.

От $a_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(1)}$, $\forall i, j$ следва $A_1 = B_1$ и т.н.

Лема 2 е доказана.

Определение. *Нека K е комутативен пръстен с единица и*

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_s\lambda^s \in K[\lambda].$$

За всяка матрица $A \in M_n(K)$ дефинираме

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_0E + a_1A + \cdots + a_sA^s.$$

Ясно е, че $f(A) \in M_n(K)$. Матрицата $f(A)$ се нарича *стойност* на полинома $f(\lambda)$ при $\lambda = A$. Ако $f(A)$ е нулевата матрица, казваме че A е *корен* на полинома $f(\lambda)$.

Теорема на Хамилтон-Кейли. *Нека K е комутативен пръстен с единица. Всяка матрица $A \in M_n(K)$ е корен на своя характеристичен полином.*

Доказателство:

Разглеждаме адюнгираната матрица B на характеристичната матрица $A - \lambda E$. Както вече отбелязахме по-горе $B \in M_n\big(K[\lambda]\big)$. От миналия семестър знаем, че е вярно равенството

$$B(A-\lambda E) = \begin{pmatrix} \det(A-\lambda E) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A-\lambda E) & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & \det(A-\lambda E) \end{pmatrix}$$

Понеже $\det(A - \lambda E) = f(\lambda)$ е характеристичния полином на матрицата A, това равенство можем да напишем във вида:

$$B(A - \lambda E) = f(\lambda)\,.\,E \tag{1}$$

С това равенство е свързано и едно от грешните доказателства на тази теорема, при което в (1) „се замества“ λ с матрицата A и се получава $\mathrm{O} = f(A)$. Понеже елементите на матрицата B зависят от λ, такова заместване е невъзможно. Поради това с помощта на Лема 1 ще представим матрицата B с помощта на матрици, които не зависят от λ. Понеже ненулевите елементи на B имат степени не по-големи от $n-1$, съгласно Лема 1 имаме

$$B = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}, \tag{2}$$

където B_0, B_1, …, B_{n-1} не зависят от λ.

От (1) и (2) получаваме, че

$$f(\lambda)E = (B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1})(A - \lambda E). \tag{3}$$

Сега заместването на λ с матрица в (3) не е безсмислена операция, както това беше в равенството (1). Тук обаче възниква въпросът доколко това е позволено. Следващият пример показва, че това не бива да се прави.

Пример. *Очевидно е, че $(A\lambda)(A\lambda) = A^2\lambda^2$. Ако заместим в това равенство λ с матрицата B получаваме $ABAB = A^2B^2$. Когато матриците A и B не комутират, т. е. $AB \neq BA$, това равенство обаче не е вярно.*

И така този пример показва, че ако в (3) заместим λ с матрицата A ще получим грешно доказателство на разглежданата теорема.

Поради това се налага да преобразуваме дясната част на (3) по следния начин:

$$\begin{aligned} f(\lambda)E = B_0A + (B_1A - B_0)\lambda + (B_2A - B_1)\lambda^2 + \\ + \cdots + (B_{n-1}A - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Нека $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$. Тогава от (4) имаме

$$\begin{aligned} a_0E + a_1E\lambda + \cdots + a_nE\lambda^n = B_0A + (B_1A - B_0)\lambda + \\ + (B_2A - B_1)\lambda^2 + \cdots + (B_{n-1}A - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Съгласно Лема 2, коефициентите пред съответните степени на λ в двете страни на (5) са равни. Поради това ако в (5) заместим λ с произволни матрици ще получим вярно равенство. Да заместим в (5) λ с матрицата A. Тогава лявата част на (5) е равна на $f(A)$. Дясната страна на (5) е равна на

$$B_0A + (B_1A - B_0)A + (B_2A - B_1)A^2 + \cdots + (B_{n-1}A - B_{n-2})A^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n.$$

След като разкрием скобите получаваме нулевата матрица. Получихме, че $f(A) = 0$. Теоремата на Хамилтон-Кейли е доказана.