ЛЕКЦИЯ 8
ПРЪСТЕНИ НА ПОЛИНОМИТЕ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Определение. *Нека K е пръстен. Полином на променлива x над пръстена K, наричаме израз от вида:*

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ и се наричат коефициенти на $f(x)$.

Полагаме $a_0x^0 = a_0$ и $a_1x^1 = a_1x$. Така, че всеки полином ще има вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Ако всички коефициенти на $f(x)$ са равни нула, $f(x)$ се нарича нулев полином. Ако $f(x)$ е ненулев, тогава най-голямото естествено число n, за което коефициентът пред x^n във $f(x)$ е различен от нула се нарича степен на $f(x)$ и се бележи ст.$(f(x))$ или $\deg(f(x))$. Единствено нулевият полином няма определена степен.

Пример 1. ст.$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$.
Полиномите от нулева степен и нулевия полином се наричат константи.

Пример 2. ст.$f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$

Множеството на всички полиноми над пръстена K се бележи с $K[x]$. Константите образуват подмножество, което съвпада с пръстена K, поради това $K \subseteq K[x]$. Изразът a_nx^n, където n е цяло неотрицателно число се нарича едночлен. По-нататък за удобство едночлените с нулеви коефициенти в ненулевите полиноми няма да ги пишем. От тази гледна точка a_nx^n е полином, в който коефициентите пред по-ниските степени на x са равни на нула. По принцип x^n не е полином, защото няма коефициент. Ако в основния пръстен K има единица, тогава ще считаме, че x^n е полином с коефициент e, т. е. $x^n = e.x^n$

Определение. *Казваме, че два полинома са равни в алгебричен смисъл, ако те съвпадата буквално, или се различават само с едночлени с нулеви коефициенти.*

Пример. $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3$

$g(x) = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3$

$h(x) = a_0 + 0.x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0.x^4$

$f(x)$ и $g(x)$ са равни, защото съвпадат буквално.

$f(x)$ и $h(x)$ са равни, защото се различават само с едночлени с нулеви коефициенти.

Определение. *Нека K е пръстен и $f(x) \in K[x]$. Нека $\alpha \in K$ и $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in K[x]$. Тогава $f(\alpha) = a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n \in K$ се нарича стойност на $f(x)$ при $x = \alpha$. Ако $f(\alpha) = 0$ казваме, че α е корен на $f(x)$.*

Определение. *Нека K е пръстен и $f(x)$, $g(x) \in K[x]$. Казваме, че $f(x)$ и $g(x)$ са равни във функционален смисъл, ако $f(\alpha) = g(\alpha)$, за всяко $\alpha \in K$.*

Ако два полинома са равни в алгебричен смисъл, то очевидно те са равни и във функционален смисъл. Обратното не е вярно.

Пример. *Ако $K = \{0, e\}$ е пръстенът състоящ се само от два елемента нула и единица разгледан по-горе, тогава полиномите $x^2 + 1$ и $x^4 + 1$ над пръстена K са равни във функционален смисъл. Ясно е, че в алгебричен смисъл те не са равни.*

По-нататък равенството $f(x) = g(x)$ ще означава, че полиномите $f(x)$ и $g(x)$ са равни в алгебричен смисъл.

Операции

Операции

Нека K е пръстен и

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in K[x] \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m \in K[x] \end{aligned}$$

Предполагаме, че $m \leqq n$.

Определение. *Сума на $f(x)$ и $g(x)$ наричаме полинома*

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots+a_nx^n.$$

Нека $f_0(x) = a_0$, $f_1(x) = a_1x$, $\ldots$, $f_n(x) = a_nx^n$. Ако пресметнем сумата $f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ с помощта на дефиницията за сума на полиноми ще получим $f(x)$, което означава, че всеки полином е сума на своите едночлени.

За едночлените ax^n и bx^n казваме, че са подобни. Съгласно дефиницията за сума на полиноми имаме $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$. Когато събираме подобни едночлени, казваме още, че сме извършили приведение на тези подобни едночлени.

Забележка. *Ако в $f(x)$ и $g(x)$ добавим (премахнем) едночлени с нулеви коефициенти, тогава очевидно сумата им не се променя. Следователно сумата $f(x) + g(x)$ е дефинирана коректно.*

Определение. *произведение на едночлените ax^n и bx^m наричаме едночлена abx^{m+n}.*

Определение. *Нека K е пръстен. Произведение на полиномите*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in K[x] \text{ и } g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in K[x]$$

наричаме полинома $f(x)g(x)$, който се получава като умножим всеки едночлен на $f(x)$ с всеки едночлен на $g(x)$ и извършим приведение на подобните едночлени, т. е.

$$f(x).g(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m},$$

където

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i+j=k} a_ib_j \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{n+m} &= a_nb_m
\end{aligned}$$

Забележка. *Ако в $f(x)$ и $g(x)$ добавим (премахнем) едночлени с нулеви коефициенти, тогава очевидно произведението им не се променя. Следователно произведението $f(x)g(x)$ е дефинирано коректно.*

Твърдение. *Нека K е пръстен. Относно въведените операции $K[x]$ също е пръстен. Константите образуват подпръстен на $K[x]$, който съвпада с основния пръстен K така, че можем да считаме, че пръстенът на полиномите $K[x]$ е разширение на основния пръстен K.*

Ако K има единица, тогава тази единица, разглеждана като полином от нулева степен, ще бъде единица и в пръстена на полиномите. Ако K е комутативен, то $K[x]$ също е комутативен.

Проверката да се извърши самостоятелно.

Твърдение. *Нека K е пръстен, в който няма делители на нулата и $f(x), g(x) \in K[x]$ са ненулеви полиноми. Тогава $f(x).g(x)$ е ненулев полином и е вярно равенството*

$$\text{ст.}\,(f(x).g(x)) = \text{ст.}\,f(x) + \text{ст.}\,g(x)$$

Доказателство:

Нека

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ a_n \neq 0,\ \text{ст.}\,f(x) = n;$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m,\ b_m \neq 0,\ \text{ст.}\,g(x) = m.$$

Тогава

$$f(x).g(x) = a_0b_0 + \cdots + a_nb_mx^{n+m}$$

Понеже в пръстена K няма делители на нулата, имаме $a_nb_m \neq 0$. Следователно $\text{ст.}\,(f(x).g(x)) = n + m = \text{ст.}\,f(x) + \text{ст.}\,g(x)$.