ЛЕКЦИЯ 7

ПРЪСТЕНИ. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

Определение. *Нека K е непразно множество, в което са дефинирани следните две операции:*

- *На всеки два елемента $a, b \in K$ се съпоставя елемент $a + b \in K$, който се нарича сума на a и b.*
- *На всеки два елемента $a, b \in K$ се съпоставя елемент $a.b \in K$, който се нарича произведение на a и b.*

Казваме, че относно тези операции K е пръстен, ако са изпълнени следните условия:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *— асоциативност на събирането;*
2. $a + b = b + a$ *— комутативност на събирането;*
3. *съществува нулев елемент $0 \in K$ такъв, че $a + 0 = a$, за всяко $a \in K$;*
4. *За всяко $a \in K$ съществува противоположен елемент $-a \in K$ такъв, че $a + (-a) = 0$;*
5. $(a.b).c = a.(b.c)$ *— асоциативност на умножението;*
6. $(a + b).c = a.c + b.c$ *— дясна дистрибутивност на умножението;*
7. $a.(b + c) = a.b + a.c$ *— лява дистрибутивност на умножението.*

Пример 1. *Нулев пръстен. Това е пръстен, който се състои от един единствен нулев елемент.*

Пример 2. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$. *Всички пръстени, които се съдържат в комплексните числа се наричат числови пръстени.*

Пример 3. *Множеството на четните числа* $2\mathbb{Z}$ *е пръстен.*

Пример 4. *Квадратните матрици от* n*-ти ред.*

Пример 5. *Множеството на всички функции с обща дефиниционна област относно обичайните операции от анализа.*

Ако в един пръстен $a.b = b.a$, този пръстен се нарича комутативен. От разгледаните примери единствено пример 4 не е комутативен пръстен.

Твърдение. *Нека* K *е пръстен, тогава* $a.0 = 0.a = 0$*, за всяко* $a \in K$.

Доказателство:
От $0+0 = 0$ имаме $a.(0+0) = a.0$ и следователно $a.0+a.0 = a.0$. Като прибавим към двете страни противоположния елемент на $a.0$ получаваме $a.0 = 0$. Равенството $0.a = 0$ се доказва по същия начин.

Определение. *Нека* K *е пръстен и* $a \in K$*. Казваме, че* a *е делител на нулата, ако* $a \neq 0$ *и съществува елемент* $b \in K$*,* $b \neq 0$*, такъв че или* $a.b = 0$*, или* $b.a = 0$.

Пример 1. *В* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *няма делители на нулата, тъй като произведението на две ненулеви числа е различно от нула.*

Пример 2. *В пръстена на квадратните матрици от* n*-ти ред, матрицата* A *е делител на нулата, тогава и само тогава когато* A *е ненулева и* $\det A = 0$*. Да се докаже.*

Пример 3. *Разглеждаме функциите* $f_1(x) \neq 0$ *и* $f_2(x) \neq 0$*, които са дадени на чертежите. Ясно е, че* $f_1(x).f_2(x) = 0$ *за всяко* x*, т. е.* $f_1(x).f_2(x)$ *е нулевата функция, което означава, че* f_1*,* f_2 *са делители на нулата.*

Определение. *Казваме,че* K *е пръстен с единица, ако съществува* $e \in K$*,* $e \neq 0$*, такъв че* $a.e = e.a = a$ *за всяко* $a \in K$.

Примери. *От разгледаните по-горе примери на пръстени нулевият пръстен няма единица, тъй като пръстените с единица имат поне два елемента. Съществува пръстен с единица, който има точно два елемента 0 и e. Таблиците за събиране и умножение са следните:*

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & e \\ \hline 0 & 0 & e \\ e & e & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & e \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & e \end{array}$$

Тъй като тези таблици се попълват еднозначно (да се докаже), този пръстен е единствен пръстен с единица, който има само два елемента. Пръстенът на четните числа $2\mathbb{Z}$ няма единица.

Определение. *Нека K е пръстен с единица $e \in K$. Казваме, че елементът $a \in K$ е обратим, ако съществува $a^{-1} \in K$, такъв че $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$.*

Пример 1. *В $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ всеки ненулев елемент е обратим.*

Пример 2. *В $\mathbb{Z}$ обратими са само 1 и -1.*

Пример 3. *В пръстена на квадратните матрици от n-ти ред единичната матрица е единица на този пръстен и матрицата A е обратима тогава и само тогава, когато $\det A \neq 0$.*

Твърдение. *Обратимите елементи в пръстен с единица не са делители на нулата.*

Доказателство:

Нека a е обратим и $a.b = 0$. Като умножим отляво двете страни на това равенство с a^{-1} получаваме $b = 0$. По същия начин от $b.a = 0$ получаваме $b = 0$. Следователно a не е делител на нулата.

Определение. *Поле наричаме комутативен пръстен с единица, в който всеки ненулев елемент е обратим.*

Задача. *Да се докаже, че тази дефиниция на поле и дефиницията на поле от миналия семестър са еквивалентни*

Примери. *$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ са полета, но $\mathbb{Z}$ не е поле. Пръстенът от два елемента, разгледан по-горе е поле.*

Следствие. *В полето няма делители на нулата.*

Определение. *Нека K е пръстен и K' е подмножество на K, $K' \neq \emptyset$. Казваме, че K' е подпръстен на K, ако са изпълнени следните условия:*

(1) Ако $a,\ b \in K'$, то $a + b \in K'$;

(2) Ако $a \in K'$, то $-a \in K'$.

(3) Ако $a,\ b \in K'$, то $a.b \in K'$.

Пример 1. *0 и K са подпръстени, които се наричат несобствени подпръстени.*

Пример 2. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z}$. *В тази верига всеки пръстен е подпръстен на предходните*

Пример 3. *В пръстена на квадратните матрици от n-ти ред, диагоналните и скаларните матрици образуват подпръстени.*

Пример 4. *В пръстена на функциите с обща дефиниционна област, непрекъснатите функции образуват подпръстен. Функциите, които имат първа производна също образуват подпръстен.*

Условието *(1)* в определението на подпръстен всъщност означава, че подпръстенът наследява операциите на пръстена.

Твърдение. *Относно наследените операции, подпръстена също е пръстен.*

Доказателство:

Трябва да се проверят седемте аксиоми за пръстен. Верността на всички аксиоми е очевидна с изключение на третата и четвъртата аксиома. Поради това ще проверим верността на тези две аксиоми. От $K' \neq \emptyset$ следва, че съществува $a \in K'$. Съгласно *(2)* имаме $-a \in K'$. От *(1)* получаваме $a + (-a) \in K'$ и $0 \in K'$. Следователно K' има нулев елемент, т. е. третата аксиома е изпълнена. Четвъртата е изпълнена съгласно условието *(2)* за подпръстен.