ЛЕКЦИЯ 3
ОРТОГОНАЛНИ ОПЕРАТОРИ

Определение. *Нека A е квадратна матрица елементите, на която са реални числа. Казваме, че тази матрица е ортогонална, ако тя е обратима и обратната ѝ съвпада с нейната транспонирана, т. е. $A^{-1} = A'$.*

Пример. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

За да докажем, че една матрица е ортогонална трябва да проверим, че са изпълнени равенствата $AA' = E$ и $A'A = E$. Достатъчно е да проверим само едното от тези равенства. Наистина нека $AA' = E$. Тогава

$$\det(A).\det(A') = 1 \Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \Rightarrow \text{ съществува } A^{-1}.$$

Като умножим отляво двете страни на равенството $AA' = E$ с A^{-1} получаваме $A^{-1} = A'$. Аналогично се доказва, че от $AA' = E$ следва $A^{-1} = A'$.

В произведението AA' всъщност се умножава ред на матрицата A с ред на матрицата A в смисъл на стандартното скаларно произведение. Поради това $AA' = E$ всъщност означава, че когато умножаваме един ред на матрицата A със себе си получаваме 1, а ако умножим два различни реда получаваме 0. Това означава, че редовете на матрицата A образуват ортонормиран базис относно стандартното скаларно произведение. Следователно матрицата A е ортогонална тогава и само тогава, когато редовете ѝ образуват ортонормиран базис относно стандартното скаларно произведение. По същият начин се убеждаваме (от $A'A = E$), че една матрица е ортогонална тогава и само тогава, когато стълбовете ѝ образуват ортонормиран базис относно стандартнато скаларно произведение. Поради това е вярно:

Следствие. *Ако редовете на една квадратна матрица от n-ти ред образуват ортонормиран базис на E_n, тогава стълбовете ѝ също образуват ортонормиран базис на E_n и обратно.*

По-горе доказахме всъщност, че детерминантата на ортогонална матрица е 1 или -1. Има обаче такива матрици, на които детерминантите са ± 1, но те не са ортогонални.

Задача. *Да се измисли пример за такава матрица която има детерминанта 1, но не е ортогонална.*

Твърдение 1. *Матрицата на прехода от ортонормиран базис към ортонормиран базис е ортогонална.*

Доказателство:

Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ са ортонормирани базиси, като

$$
\begin{array}{l}
e_1^* = \tau_{11}e_1 + \tau_{12}e_2 + \dots + \tau_{1n}e_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e_n^* = \tau_{n1}e_1 + \tau_{n2}e_2 + \dots + \tau_{nn}e_n
\end{array}
$$

Имаме $(e_i^*, e_j^*) = \tau_{i1}\tau_{j1} + \tau_{i2}\tau_{j2} + \dots + \tau_{in}\tau_{jn}$, защото $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис.

Понеже $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ е ортонормиран, $(e_i^*, e_j^*) = \delta_{ij}$ (символ на Кронекер). Следователно

$$\tau_{i1}\tau_{j1} + \tau_{i2}\tau_{j2} + \dots + \tau_{in}\tau_{jn} = \delta_{ij},$$

което означава, че стълбовете на матрицата на прехода образуват ортонормиран базис. Поради това матрицата на прехода е ортогонална.

Определение. *Нека L е евклидово пространство и $\mathcal{A}$ е линеен оператор в L. Казваме, че този линеен оператор е ортогонален, ако*

$$(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) = (x, y)$$

за всички x, y от L.

Свойства на ортогоналните оператори

Свойство 1. *Ортогоналните оператори запазват дължините на векторите, т. е. $|\mathcal{A}(x)| = |x|$.*

Доказателство:

$$|\mathcal{A}(x)| = \sqrt{(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x))} = \sqrt{(x, x)} = |x|$$

Свойство 2. *Ортогоналните оператори запазват ортогоналността, т. е. ако два вектора са ортогонални, то и техните образи също са ортогонални.*

Доказателство:

Нека $(x, y) = 0$. Понеже $(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) = (x, y)$ имаме $(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) = 0$, т. е. $\mathcal{A}(x)$ и $\mathcal{A}(y)$ също са ортогонални.

Свойство 3. *Ортогоналните оператори изобразяват ортонормиран базис в ортонормиран базис.*

Доказателство:

Нека e_1, e_2, $\dots$, e_n е ортонормиран базис.

Тъй като оператора запазва дължините имаме $|e_i| = |\mathcal{A}(e_i)|$. Тъй като операторът запазва ортогоналността всеки два от векторите $\mathcal{A}(e_1)$, $\dots$, $\mathcal{A}(e_n)$ са ортогонални. Следователно $\mathcal{A}(e_1)$, $\dots$, $\mathcal{A}(e_n)$ е ортонормиран базис.

Твърдение 2. *Ако един линеен оператор изобразява ортонормиран базис в ортонормиран базис, тогава той е ортогонален.*

Доказателство:

Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис и $e_1^* = \mathcal{A}(e_1), \dots, e_n^* = \mathcal{A}(e_n)$ също е ортонормиран базис.

Да разгледаме

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \quad \text{и} \quad y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n.$$

Тогава имаме

$$\mathcal{A}(x) = \xi_1 e_1^* + \xi_2 e_2^* + \dots + \xi_n e_n^* \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(y) = \mu_1 e_1^* + \mu_2 e_2^* + \dots + \mu_n e_n^*.$$

Тъй като e_1, e_2, $\dots$, e_n е ортонормиран базис имаме

$$(x, y) = \xi_1\mu_1 + \xi_2\mu_2 + \dots + \xi_n\mu_n.$$

От това, че e_1^*, e_2^*, $\dots$, e_n^* е ортонормиран базис следва

$$(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) = \xi_1\mu_1 + \xi_2\mu_2 + \dots + \xi_n\mu_n.$$

И така $(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) = (x, y) \Rightarrow \mathcal{A}$ е ортогонален оператор.

Твърдение 3. *Матрицата на ортогонален оператор в ортонормиран базис е ортогонална.*

Доказателство:

Нека $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ е ортонормиран базис и

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}(e_n) = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \cdots + \alpha_{nn}e_n \end{array}$$

Тъй като $\mathcal{A}(e_1), \ldots, \mathcal{A}(e_n)$ е ортонормиран базис, матрицата на линейния оператор $\mathcal{A}$ може да се разглежда като матрица на прехода от ортонормирания базис $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n$ към ортонормирания базис $\mathcal{A}(e_1), \ldots, \mathcal{A}(e_n)$. Съгласно **Тв.1** тази матрица е ортогонална.

Твърдение 4. *Ако един линеен оператор в ортонормиран базис има ортогонална матрица, тогава този линеен оператор е ортогонален.*

Доказателство:

Нека $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ е ортонормиран базис и

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}(e_n) = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \cdots + \alpha_{nn}e_n \end{array}$$

Понеже базисът е ортонормиран имаме

$$(\mathcal{A}(e_i), \mathcal{A}(e_j)) = \alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn}$$

От това, че матрицата A на $\mathcal{A}$ е ортогонална следва

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \delta_{ij}.$$

От тези разсъждения получаваме, че

$$(\mathcal{A}(e_i), \mathcal{A}(e_j)) = \delta_{ij},$$

т. е. $\mathcal{A}(e_1),\ \ldots,\ \mathcal{A}(e_n)$ е ортонормиран базис. Разглежданият линеен оператор изобразява ортонормиран базис в ортонормиран базис. Съгласно **Тв.2** той е ортогонален.

Твърдение 5. *Ако един ортогонален оператор има собствен вектор, то неговата собствена стойност е 1 или* -1.

Доказателство:

Нека $\mathcal{A}$ е ортогонален оператор и $\mathcal{A}(u) = \lambda u,\ u \neq 0$. Тогава

$$(\mathcal{A}(u), \mathcal{A}(u)) = (\lambda u, \lambda u) = \lambda^2 (u, u).$$

Но $(\mathcal{A}(u), \mathcal{A}(u)) = (u, u)$. Следователно $(u, u) = \lambda^2(u, u)$. Понеже $(u, u) \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.