ЛЕКЦИЯ 1
ЕВКЛИДОВИ ПРОСТРАНСТВА

Лема. *Нека $A = (a_{ij})$ е квадратна матрица от n-ти ред. Тогава е вярно равенството:*

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n}} a_{ij} x_i y_j, \ \ n^2\text{-}\textit{събираеми.}$$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
\sum a_{ij} x_i y_j &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + \\
&+ a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&+ a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n \\
&= x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) + \\
&+ x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n) + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&+ x_n(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n) = \\
&= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{pmatrix} = \\
&= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Определение. *Нека L е линейно пространство над полето на реалните числа $\mathbb{R}$ и за всеки два елемента x и $y \in L$ е дефинирано реално число $(x, y) \in \mathbb{R}$. Казваме, че L е Евклидово пространство, ако са изпълнени следните условия:*

(1) $(x, y) = (y, x)$

(2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$

(3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

(4) $(x, x) \geqq 0$ *и* $(x, x) = 0$ *само, когато* $x = 0$

Числото (x, y) се нарича скаларно произведение на x и y. Равенствата (1)–(4) се наричат аксиоми на скаларното произведение.

Пример 1. *Линейното пространство на геометричните вектори.*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$$

Ако единият от векторите е нулев, $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Пример 2. *В $V_n = \{(\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$*
$a = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$
$b = (\beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_n)$
$(a, b) \stackrel{def}{=} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$ — *стандартно скаларно произведение.*
Това евклидово пространство ще означаваме с E_n.

Пример 3. *$C[a, b]$ — линейно пространство на непрекъснатите функции в $[a, b]$ и $f(x), g(x) \in C[a, b]$. Тогава*

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x).g(x)\,dx$$

Непосредствени следствия от аксиомите:

Следствие 1. $(0, x) = 0$, *за всяко $x \in L$.*

Доказателство:
В *(3)* полагаме $\lambda = 0$

Следствие 2. *Ако $(x, y) = 0$, за всяко $y \in L$, тогава $x = 0$.*

Доказателство:

Полагаме $y = x \Rightarrow (x, x) = 0$. Съгласно *(4)* $\Rightarrow x = 0$.

Следствие 3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Доказателство:

$(x + y, z) = (z, x + y) = (z, x) + (z, y) = (x, z) + (y, z)$

Следствие 4. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

Доказателство:

$(x, \lambda y) = (\lambda y, x) = \lambda(y, x) = \lambda(x, y)$

Следствие 5. *Нека са дадени векторите $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m$ и $y = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_n b_n$. Тогава*

$$(x, y) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq m}} \alpha_i \mu_j (a_i, b_j) \tag{\#}$$

Доказателство:

Последователно прилагаме на аксиомите *(2)* и *(3)* и Следствия 3 и 4.

Пресмятане на скаларното произведение чрез координатите в произволен базис

L — евклидово пространство; $e_1, \ldots, e_n$ е базис на L и

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$
$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$$

От (#) имаме

$$(x, y) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq m}} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j)$$

Полагаме $(e_i, e_j) = \tau_{ij}$. Дефинираме матрицата $A = (\tau_{ij})$. Матрицата A се нарича матрица на скаларното произведение в базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Съгласно лемата:

$$(\#\#)\qquad (x,y) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)\, A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Задача. *Как се променя матрицата на скаларното произведение при смяна на базиса?*

Понеже $(e_i, e_j) = (e_j, e_i) \Rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$, за всеки i, j, т. е. A е симетрична матрица (при транспониране не се променя).

Забележка. Ако A е произволна матрица и дефинираме (x,y) чрез равенството $(\#\ \#)$, тогава (x,y) удовлетворява аксиомите *(2)* и *(3)* на скаларното произведение. Ако искаме A да бъде симетрична ще бъде изпълнена *(1)* аксиома. Не всяка симетрична матрица, обаче задава чрез това равенство скаларното произведение. Тази симетрична матрица трябва да бъде такава, че да е изпълнена и четвъртата аксиома.

В следващите лекции ще обсъдим по-подробно условията, при които $(\#\#)$ задава скаларно произведение.

Определение. *Нека L е Евклидово пространство и $x \in L$. Числото $\sqrt{(x,x)}$ се нарича дължина на x и се бележи с $|x|$, т. е. $\sqrt{(x,x)} = |x|$*

Тъй като $(x,x) \geqq 0$ дължината е дефинирана коректно.

Пример 1. *В V_n със стандартно скаларно произведение (E_n)*

$$\text{за } a = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n) \text{ имаме } (a,a) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \text{ и}$$

$$|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}.$$

Пример 2. *Нека $f(x) \in C[a,b]$. Тогава $|f(x)| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$.*

Основни свойства на дължината

Свойство 1. *$x \geqq 0$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

Доказателство:

Неравенството $x \geqq 0$ е изпълнено съгласно аксиома *(4)* и

$$|x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Свойство 2. $|\lambda x| = |\lambda||x|$ *за всяко* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказателство:

$$|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda||x|.$$

Ако x е ненулев вектор, тогава вектора $\dfrac{1}{|x|} \cdot x$ ще бележим с $\dfrac{x}{|x|}$.

Свойство 3. $\left| \dfrac{x}{|x|} \right| = 1,\ x \neq 0$

Доказателство:

В равенството $|\lambda x| = |\lambda||x|$ полагаме $\lambda = \dfrac{1}{|x|}$.

Ако $|x| = 1$, казваме че векторът x е нормиран.

Неравенство на Коши-Буняковски и неравенство на триъгълника

Неравенство на Коши-Буняковски. *Нека* L *е евклидово пространство и* x, $y \in L$. *Тогава*

$$(*) \qquad |(x, y)| \leqq |x||y|$$

Равенството се достига тогава и само тогава, когато x *и* y *са линейно зависими.*

Доказателство:

1) *Доказателство на неравенството* (*) Ако $x = 0$ или $y = 0$ неравенството (*) е очевидно (двете страни са равни на нула).

Нека $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Съгласно аксиома *(4)* имаме $(x + ty, x + ty) \geqq 0$ за всяко $t \in \mathbb{R}$. Развиваме лявата част и получаваме

$$(x, x) + 2(x, y)t + t^2 (y, y) \geqq 0$$

за всяко $t \in \mathbb{R}$.

Понеже $y \neq 0$, то $(y, y) \neq 0$. Следователно лявата част на неравенството е квадратен тричлен на t.

Понеже този квадратен тричлен не приема отрицателни стойности, за неговата дискриминанта D имаме:

$$D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqq 0$$

откъдето
$$(x,y)^2 \leqq (x,x)(y,y) \Rightarrow |(x,y)| \leqq |x||y|.$$

2) *Случай на равенство:*

а)Нека x и y са линейно зависими. Тогава единият от тези вектори се получава от другия с умножаване с подходяща константа. Нека например $y = \lambda x$. Тогава

$$|(x,y)| = |(x,\lambda x)| = |\lambda(x,x)| = |\lambda|(x,x) = |\lambda||x|^2$$
$$|x||y| = |x||\lambda x| = |x||\lambda||x| = |\lambda||x|^2.$$

Следователно
$$|(x,y)| = |x||y|.$$

б) Нека $|(x,y)| = |x||y|$. Ако $x = 0$ или $y = 0$, тогава очевидно векторите са линейно зависими. Нека $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тогава $(x,x) + 2(x,y)t + (y,y)t^2 = (x+ty, x+ty)$ е квадратен тричлен и неговата дискриминанта $D = 0$. Следователно този квадратен тричлен има реален корен $t_0 \in \mathbb{R}$. За този корен t_0 имаме $(x+t_0y, x+t_0y) = 0$. От аксиома *(4)* $\Rightarrow x+t_0y = 0 \Rightarrow x$ и y са линейно зависими.

Пример 1. *Нека* $a = (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$, $b = (\beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_n)$. *Тогава неравенството на Коши-Буняковски ни дава, че*

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leqq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2}.$$

Пример 2. *Нека* $f(x), g(x) \in C[a,b]$. *Тогава*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Неравенство на триъгълника.

$$|x+y| \leqq |x| + |y|$$

Доказателство:

$$|x+y|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \leqq$$
$$\leqq |x|^2 + 2|(x,y)| + |y|^2 \leqq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$$
$$\Rightarrow |(x+y)|^2 \leqq (|x|+|y|)^2 \Rightarrow |x+y| \leqq |x| + |y|$$

Задача. *Да се докаже, че равенството в неравенството на триъгълника имаме тогава и само тогава, когато единият от векторите може да се получи от другия с умножаване на неотрицателна константа.*

Тъй като неравенството на триъгълника е вярно за всяко x и y като заместим y с $y - x$ ще получим вярно неравенство

$$|y| \leqq |x| + |y - x| \Rightarrow |y - x| \geqq |y| - |x| \text{ за всяко } x,\ y.$$

От последното неравенство също следва неравенството на триъгълника (как?). Поради това тези две неравенства са еквивалентни.