26.02.2013 Антон Зиновиев

Език на предикатната логика (от първи ред)

логически операции: $\vee$ - и; $\&(\wedge)$ - или; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$; $\neg$ - отр.

квантори: $\forall x$; $\exists x$

Пр: $\forall x \exists y\, f(x,y)$ - за всяко x се избира различно y

$\exists y \forall x\, f(x,y)$ - едно y се избира за всяко x

език	метаезик
формален език; формули - твърдения, изказани на формален език	Български език
$\vee$; $\&$; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$; $\neg$ $\forall x$; $\exists x$	или; и; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$; не $\forall x$; $\exists$

пролог	логика
,	$\&$
;	$\vee$
$\psi :- \varphi$	$\varphi \Rightarrow \psi$

В пролог кванторите не се пишат, те се подразбират.

$x_1, \dots, x_n$ - всички останали пром.

$y_1, \dots, y_k$ - пром, които се срещат само в

Пример:

Пролог: $p :- q_1, q_2, q_3.$ ← край на реда (командата)

лог. ез: $\forall x_1 \dots x_n (\exists y_1, \dots, \exists y_k (q_1 \& q_2 \& q_3) \Rightarrow p)$

Пр: родител (петка, драган).

родител (петкан, драган).

родител (драган, пенда)

мъж (петкан).

жена (пена).

?- Вярно ли е че

?- мъж (петкан) - да

?- жена (петкана) - не

! В пролог променливите се пишат само с главни букви.

?- родител (X, драган)

отговор: X = пена
(Ако се натисне след дадения отг. $\boxed{\text{enter}}$ търсенето на отговор приключва, ако се натисне $\boxed{;}$ компютърът дава следващия подходящ отговор, ако не е намерил такъв съобщава: не)

баба (X, Y) :- родител (X, Z), родител (Z, Y), жена (X).

?- баба (X, пенда) отг: Да X = пенка

$\forall x \forall y$ ($\exists Z$ (родител (x, z) & родител (z, y) & жена (x)) => баба (x, y)

потомък(X,Y):-родител(Y,X)
потомък(X,Y):-родител(Z,X), потомък(Z,y)

има два вида изрази в пролог:

<u>факти:</u> p(...).

<u>правила:</u> p(...):- ...

компилатори за пролог:

swi prolog - най-популярен

strawberry prolog - user-friendly

GNU prolog - най-бърз

$\boxed{\text{зад}}$ Да се напише програма, която да диференцира израз

%... - коментар в пролог.

Пр. за предикати: родител, баба, мъж

Добра практика е с коментар да се опише кога предиката е истина.

<u>Реш:</u> % d(F,G) - G е производната на F по X
(т.е G = dFdX)

За целта ще напишем табличните диференциали

```
d(0,0).
d(x,1).
d(y,0)
d(z,0).
...
d(F1+F2,G2+G2):-d(F1,G1),d(F2,G2).

d(F1-F2,G1-G2):-d(F1,G1),d(F2,G2).

d(F1*F2,G1F2+G2F1):-d(F1,G1),d(F2,G2).

d(F1/F2,(G1*F2-G2*F1)/(F1*F2)):-d(F1,G1),d(F2,G2).

d(exp(F),G*exp(F)):-d(F,G).

d(sin(F),G*cos(F)):-d(F,G).

d(cos(F),-G*sin(F)):-d(F,G).
```

$$d(ln(F), G\,\frac{1}{F}):-d(F,G).$$

Пр. за математични изрази:

```
?- 2+2=4       отг: Не
?- 2+2=X+2     отг: да X=2
?-d(cos(x*y),G) - да G=-(1*y+0*x)*sin(x*y).

?d(F,cos(x)) - Не
```

Списъци.

[1,3,5] - списък от три елемента.

[] - празен списък.

[A|X] - списък от първи ел. A и списък от всички останали елементи X

?-[A|X] = [1,2,2]   отг: Да A = 1 X = [2,2]

?-[A|X] = [1]   отг: Да A=1 X = []

Конкатенация на два списъка:

% свед(X,Y,Z) - списъкът е конкатенация на X и Y

```
свед([],X,X).
свед([A|X],Y,[A|Z]):- свед(X,Y,Z).
```

?- свед(X,[3,4],[1,2,3,4])   отг: Да X = [1,2]

% сортиран(X): списъкът X е сортиран възходящо

```
сортиран([]).
сортиран([A]).
сортиран([A,B|X]):- A=<B, сортиран(X).
```

05.03.2013 Безсмислено е да се правят предикати за намиране на първия елемент на списък, както и за проверка на равенство.

[A|_] = X % означава A е първия елемент на X

[_,B|_] = X % Намира вторият ел. на X

[_,1|_] = X, X = [0|_], X = [_,_,_] отг: Да X=[0,1,_]

% последен(X,A) – A е последен ел. на X
последен([A],A)
последен([_|X],A):- последен(X,A)

% предпоследен(X,A) – A е предпоследен ел. на X
предпоследен([A,_],A)
предпоследен([_|X],A):- предпоследен(X,A)

II начин за намиране на предпоследен ел. на спис.
предпос(X,A):- слеп(_,[A],X)
предпос(X,A):- слеп(_,[A,_],X)

?- слеп(X,Y,[1,2])
отг: Да X=[], Y=[1,2]; Да X=[1], Y=[2]; Да X=[1,2] Y=[
Не

% елем(A,X): A е елемент на списъка X
елем(A,[A]).
елем(A,[A|_]).
елем(A,[_|X]):- елем(A,X).

12.03.2013

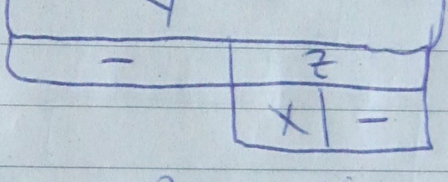
II начин на разпознаване дали А е елемент на спис. Х
елем1(A,X):-съед(_,[A|_],X).

%четен(A,X): А е ел. на спис. Х на четна позиция.
четен(A,[_,A|_]).
четен(A,[_,_|X]):-четен(A,X).

II начин:
четен1(A,[_|X]):-нечетен(A,X)

%нечетен(A,X): А е ел на спис.Х на нечетна поз.
нечетен(A,[A|_])
нечетен(A,[_,_|X]):-нечетен(A,X).

%подсписък(X,Y): Х е подсписък на Y
подсписък(X,Y):-съед(_,Z,Y), съед(X,_,Z)



%подмнож(X,Y): X е подмножество на Y (т.е. a∈X => a∈Y)
подмнож([],_).
подмнож([A],X):-елем(A,X).
подмнож([A|X],Y):-елем(A,Y), подмнож(X,Y)

II начин: подмнож1(X,Y):-не(елем(A,X), не(елем(A,Y)))

not(...) - отрицание на пролог.

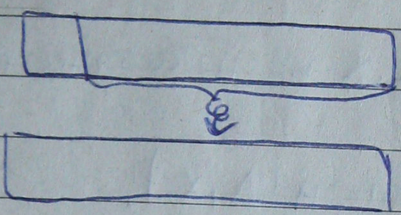
% вмък(X,A,Y): спис. Y се получава, като на произв. място
се вмъкне ел. А в спис Х
вмък(X,A,[A|X]).
вмък([B|X],A,[B|Y]):-вмък(X,A,Y).

% пермут(X,Y): X е пермутация на Y
пермут([],[]).
пермут(X,[A|Y]):-пермут(Z,Y),вмък(Z,A,X).

?- пермут([1,2,3],X)
отг: да X=[1,2,3]; да X=[2,1,3]; да X=[1,3,2]; да X=[3,1,2]; да [2,3,1]; да X=[3,2,1]; Не

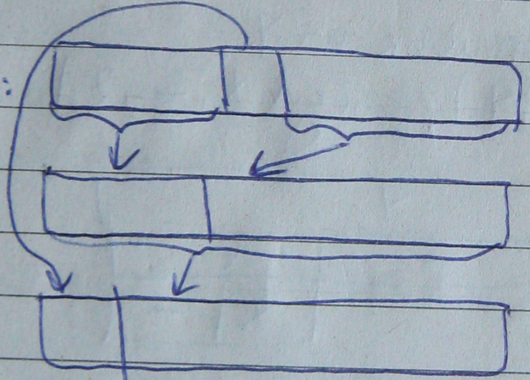
Сортировка

I начин:



Взимаме първия ел. от списъка и го вмъкваме на произволно място, а останалите елементи пермутираме

II начин:



Взимаме произволен елемент и го слагаме на първа позиция. Останалите елементи пермутираме.

I начин

% сорт(X,Y): Y е сортирана пермут. на X
сорт(X,Y):-пермут(X,Y), сортиран(Y).

II начин

1) Извличаме най-малкия елемент (той ще стои в началото.
2) Сортираме остатъка

% минизвък(X,A,Y): изваждаме най-малкия ел.
% A от спис. X и получаваме спис. Y.

```
минизвък([A|X],B,[A|Y]):-минизвък(X,B,Y),B<A,
                         ,елем(B,X).
минизвък([A|X],A,X):-минизвък(X,B,_),B>=A.
```

% минмакс(A,B,C,D): C:min(A,B), D:max(A,B)

```
минмакс(A,B,A,B):-A=<B
минмакс(A,B,B,A):-B<A
```

II вариант на минизвък:

```
минизвък1([A|X],C,[D|Y]):-минизвък(X,B,Y),
                          ,минмакс(A,B,C,D).
```

% сорт(X,Y) – Y е резултат от сортирането на X

```
сорт([],[]).
сорт(X,Y):-минизвък(X,B,Z),сорт(Z,W),Y=[B|W]
```

III начин   [A|Y1]

1) Сортиране Y1
2) Вмъкване A в Y1, така, че списъкът да остане сортиран.

% сортвмък(X,A,Y): Вмъкване ел. A на точното място в сортирания X и се получава Y-сортиран.

```
сортвмък([],A,[A])
сортвмък([A|X],B,[B,A|Y]):-B=<A.
сортвмък([A|X],B,[A|Y]):-B>A,сортвмък(X,B,Y)
```

II вариант на сортвмък

```
сортвмък1([ ], A,[A] )
сортвмък1([A|X], B, [C,Y] ):- минмакс(A,B,C,D),
                               ,сортвмък(X, D, Y).
```

```
% сорт3(X,Y): Y е сортираният списък на спис X.
сорт3([ ],[ ]).
сорт3([A|X],Z):- сорт(X,Y), сортвмък(Y,A,Z)
```

19.03.2013

% $P_1(X) \iff \exists A \in X (A > 0)$

$P_1(X)$:- елем.(A,X), A>0.

% $P_2(X) \iff \forall A \in X (A > 0) \iff \neg \exists A \in X (A \leq 0)$

$P_2([\,])$.

$P_2([A|X])$:- A>0, $P_2(X)$.

II начин на P_2: $P_2(X)$:- not(member(A,X), a=<0)

% $P_3(X) \iff \exists A \in X, \forall B \in X (A + B > 0)$

% $P_3'(A,X) \iff \forall B \in X (A + B > 0)$

$P_3'(A,[\,])$.

$P_3'(A,[B|X])$:- A+B>0, $P_3'(A,X)$

$P_3(X)$:- $P_3'(A,X)$, member(A,X).

II начин на $P_3(X)$:

% $\iff \exists A \in X, \exists B \in X (A + B \leq 0)$

$P_3(X)$:- member(A,X), not(member(B,X), A+B=<0)

% $P_4(X) \iff \forall A \in X\ \exists B \in X\ (A+B>0)$

```
P4([])
P4([C|X]) :- елем(B,X), C+B>0, P4(X)
```

$\left.\right\}$ НЕ

% $P_4'(X,Y) \iff \forall A \in X\ \exists B \in Y\ (A+B>0)$

```
P4'([],Y)
P4'([C|X],Y) :- елемент(B,Y), C+B>0, P4'(X,Y).
P4(X) :- P4'(X,X)
```

II начин на P_4

% $\iff \neg \exists A \in X, \exists B \in X\ (A+B \not> 0)$

```
P4(X) :- not елем(A,X), not(елем(B,X), A+B>0))
```

% $P_5(X) \iff \forall A \in X\ \exists B \in X\ \forall C \in X\ \exists D \in X\ (A*D > C+B)$

% $\iff \neg \exists A \in X\ \neg \exists B \in X\ \neg C \in X\ \neg \exists D \in X\ (A*D > C+B)$

```
P5(X) :- not(елем(A,X), not(елем(B,X), not(елем(C,X),
    not(елем(D,X), A*D > C+B))))
```

Графи

(V, E)

% граф - $[\underbrace{[a_1, a_2, \dots]}_{\text{върхове}}, \underbrace{[[V_i, V_j], \dots]}_{\text{ребра}}]$

% изолирани(U,G) : U е изолиран връх в G

```
изолиран(U,[V,E]) :- елемент(U,V), not(елем([_,U],E)),
    , not(елем([U,_],E)).
```

% път(X, G) <=> X е път в G
път(X, [V, E]) :- not(съед(X, _, [U1, U2|_]),
                  not(елем([U1, U2], E))).
(тази реализация става за разпознавател, но не става за генератор)
X = [U1, U2, ..., Un]

% ацикличен път(X, G) <=> X е път в G, който не минава два или повече пъти през един връх.

ац. път(X[V, E]) :- пермутация(W, V),
        съед(W, X, _), път(X, [V, E]).

% Свързани(U1, U2, G) - в G има път от U1 до U2
Свързани(U, U, [V, E]) :- елем(U, V).
Свързани(U1, U2, [V, E]) :- ац. път([U1|X], [V, E]),
    последен(U2, X)

%

последен(A, [A]).
последен(A, [_|X]) :- последен(A, X).

26.03.2013

Аритметика

1. ?- 2+1=3 отг: не

2. ?- X is 2+1 отг: X = 3

3. ?- 3 is 2+X отг: пролог се гърми

$>$
$<$
$=<$
$>=$ } пресмятат изразите от ляво надясно

зад % дълж(N,X): N - дължина на списъка X
∃a1,... ∃an (X=[a1, ... , an]
дълж(0,[])
дълж(N,[A|Y]) :- N is 1+M, дълж(M,Y)

зад % сума(S,X): S е сума на X
% ∃a1, ..., ∃an (X = [a1, ..., an] & $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$)
сума(0,[]).
сума(S,[A|X]) :- сума(S1, X), S is A+S1.

зад % фибо(N) - N е число на Фибоначи (генератор)

%фибон(N,M) - N и M са съседни числа на Фибоначи
фибон(0,1).
фибон(N,M) :- фибон(K,N), M is K+N

фибо(K):- фибоначи(K,L)

somефибон(0,1)
somефибон(N,M) :- K is M-N, K1 = 0, somефибо(K,N)

somефибо(0)
somефибо(N) :- между(M,0,N), somефибо(M,N)
%между(K,M,N) - K е м/у M и N
между(M,M,N) :- M ≤ N
между(K,M,N) :- M1 is M+1, между(K,M1,N)

M < N

~~% между(A,K,B): K е между A и B като A < B~~
~~между(A,A,B) :- A =< B~~
~~между(A,K,B) :- A < B, A1 is A+1, между(A1,K,B)~~

% ест(N): генератор на естествени числа
ест(N) :- ест(M), N is M+1

estR(0).
estR(N) :- S is N-1, S ≥ 0, estR(S)

% P(N) - генератор на числата от вида $2n^2 + 3m^3$, където $n, m \in N$
(p(K) :- ест(N), ест(M), K is 2 * N^2 + 3M^2
това реш не е вярно

Вярното реш е:
p(K) :- ест(L), между(N, 0, L), между(M, 0, L), K is 2 * N^2 +

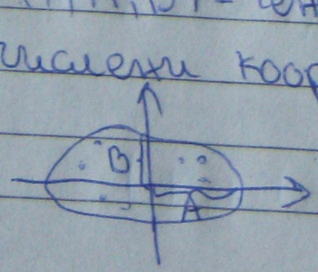
$\boxed{\text{Зад}}$ от поправка

% r(N) - проверява дали N е число от вида $2km + m^2 + 3m^3k$ за някои $k, m \in N$

Реш P(N) :- между(K, 0, N), между(M, 0, N),
N is 2 * K * M + M^2 + 3 * M^3 * K

$\boxed{\text{Зад}}$ от поправка .

% P(X, Y, A, B) - генератор на координатите на точки с целочислени координати от вътрешната елипса



P(X, Y, A, B) :- S is A, Q is B, между(X, S, A)
между(Y, Q, B), $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2}$

% ест2(M, N): генератор на всички двойки ест. числа
ест2(M, N) :- ~~ест~~ ест(S), между(M, 0, S), между(N, 0, S).

% дължинален(X, N) - генератор на всички списъци с
дължина N
дължинален([], 0).
дължинален([A|X], N) :- N > 0, N1 is N-1, дължинален(X, N1)

02.04.2013

% простделител(K, N): K е прост делител на N - ген. на K
простделител(K, N) :- просто(K), дели(K, N) - Не! Грешно

простделител(K, N) :- между(K, 2, N), просто_е(K), дели(K, N)

просто_е(N) :- N ≠ 1, not(N1 is N-1), между(K, 2, N1),
дели(K, N)) (това разпознавател.

% просто(N): генератор на простите числа
% N ∈ ℕ & ∀K ∈ ℕ (K дели N => K ∈ {1, N}) & N ≠ 1
¬∃K ∈ ℕ (K дели N & K ∉ {1, N})

просто(N) :- ест(N), not(N1 is N-1, между(K, 2, N1),
дели(K, N)), N ≠ 1

% разлагане(X,N): по N генерира X, където X е списък
% от вида [[p_1,k_1],[p_2,k_2],...,[p_s,k_s]], където p_i са
% различни прости числа и $N = p_1^k p_2^k \cdots p_s^k$

% кратност(P,K,N): p^k дели N и p^{k+1} не дели N и M=N/p^k
подадени p и N генерира K

кратност(P,0,N):- not(дели(P,N)).
кратност(P,K,N):- дели(P,N), N1 is N/P, кратност(P,K1,N1),
K is K1+1

% $(N/P)/p^{K1} = M$

% $\frac{N}{p^k} = \frac{N}{p^{k1+1}} = \frac{N/P}{p^{k1}} = M$

% разлагане_над(I,X,N): X е списък от [p_i,k_i], където
p_i е прост делител на N, $p_i \geq I$, k_i е кратността на

разлагане_над(I,[],N):- I>N.
разлагане_над(I,X,N):- not(простделител(I,N)), I1 is I+1,
разлагане_над(I1,X,N).
разлагане_над(I,[[I,K]|X1],N):- простделител(I,N),
I1 is I+1, разлагане_над(I1,X1,N), кратност(I,K

$\boxed{\text{зад}}$ давана на изпит

% p(X,Y): по дадени списък X и списък от списъци Y.
% проверява дали:
% 1) ~~дали~~ X е конкатенация на елементи от Y (конк. на 2 спис)
% 2) X и четен брой елементи.
% 3) сумата от елементите на X е последен еле-
% мент на някой елемент на Y.

~~% q(X,Y): X е конкатенация~~

%1
p(X,Y):- съединение(X,X1,X2), елемент(X1,Y), елемент(X2,Y)
дължина(N,X), 0 is N/2, %2
сума(S,X) елемент(X3,Y), съед(X3,_,[S]). %3

%q(X,Y): X е конкатенация от елементи на Y.
%забележка: Приемаме, че конкатенация на 0 списъци
% е [], на един списък Z е Z.

q([],Y).
q(X,Y):- елемент(X,Y).
q(X,Y):- съединение(X,X1,X2), X1 ≠ [], X2 ≠ [], елемент(X1,Y),
q(X2,Y).

09.04.2013 Задачи от контролно №1

зад 1

% $p(L) \Leftrightarrow \forall X \in L \, \forall Y \in L \, (X \neq Y \Rightarrow \exists Z \in X \cap Y \, \exists U \in L \, (Z \notin U))$

На Пролог няма ∀, затова на мястата на ∀ слагаме ¬¬ после вкарваме в скобите едното ¬ и пред скобите остава ¬∃

$p(L) \Leftrightarrow \neg \exists X \in L \, \exists Y \in L \, \neg (X \neq Y \Rightarrow \exists Z \in X \cap Y \, \exists U \in L \, (Z \notin U))$

$p(L) \Leftrightarrow \neg \exists X \in L \, \exists Y \in L \, (X \neq Y \, \& \, \neg \exists Z \in X \cap Y \, \exists U \in L \, (Z \notin U))$

p(L) :- not(елем(X,L), елем(Y,L), X ≠ Y, not(елем(Z,X), елем(Z,
    , елем(U,L), not(елем(Z,U))))).

зад 2

мажорира(X,Y)

① $\forall A \, (A \in X \Rightarrow A \in Y)$

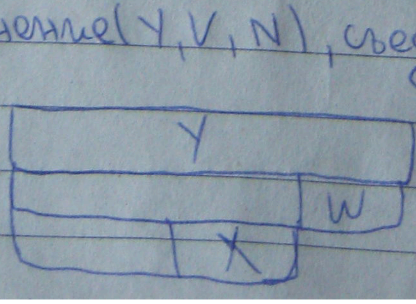
② $\underbrace{[\, . \, . \overbrace{. \; . \; .}^{X} \,]}_{Y}$

① На пролог:

$\neg \exists A (A \in X \, \& \, A \in Y)$

<u>I вариант</u>

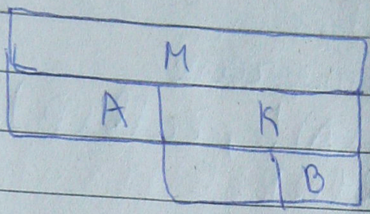
мажор(X,Y) :- not(елем(A,X), not елем(A,Y)))
мажор(X,Y) :- съединение(Y,V,N), съед(V,_,X).



II вариант (2 група)

% p(L,M):: по L намира M L⊆M, в M няма елемент,
% който се мажорира от ел след него.

p(L,M):- пермутация(M,L), not(след(M,_,[A|K]),
след(K,_,[B|_]), мажор(B,A).



$\boxed{\text{I зад}}$ (2 група)

% $p(L) \Leftrightarrow \exists X \in L\ \exists Y \in L\ (X \neq Y \ \&\ \exists Z \in X \cap Y \{ \forall W \in L\ (Z \in W \Rightarrow W = X \vee W = Y))$

$p(L) \Leftrightarrow \exists X \in L\ \exists Y \in L\ (X \neq Y \ \&\ \exists Z \in X \cap Y\ \neg \exists W \in L\ (Z \in W \ \&\ W \neq X \ \&\ W \neq Y))$

p(L):- елем(X,L) елем(Y,L), X≠Y, елем(Z,X), елем(Z,~~X~~Y),
not(елем(W,L), елем(Z,W), W≠X, W≠Y).

Предикат за отсичане (не се използва на изпитите)

% max(A,B,C): по дадени B и C намира A=max(B,C)

max(B,B,C):- B≥C
max(C,B,C):- B<C

% max(A,B,C) написана с предикат за отсичане
макс(B,B,C):- B≥C!.
макс(C,B,C):- B<C.

Ако първия ред е истина, то като се сложи ! накрая на реда, редовете след него не се пазят.

% if(A,P,Q) : ако A, то P, иначе Q

```
if(A,P,Q):- A,P.
if(A,P,Q):- not(A), Q
```

% if(A,P,Q) написано с отсичане

```
if(A,P,Q):- A,!,P      ( call(A)!, call(P)
if(A,P,Q):- Q            call(Q)               )
```

Два и половина вида отсичане:

→ зелено отсичане - и без него програмата работи вярно, но е по-неефективно.

Пример за зелено отсичане:

```
макс(B,B,C):- B ≥ C,!.
макс.(C,B,C):- B < C.
```

→ червено отсичане - без него програмата не работи.

→ трети вид: когато искаме един отговор (когато без !, програмата работи различно, но правилно)

```
макс(A,X):- елем(A,X), not(елем(B,X),B > A)!
```

% ако в списъка X има 5 еднакви числа, които са най-големия елемент. Ако няма !, 5 пъти ще изведе един и същ елемент.

Край на Пролог

Изпълнимост на множество от формули

$\varphi_1 = \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \& P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$

A е универсум на t

$|A_1| = \mathbb{N}$ // кой е универсума на структурата - ест. числа

$\langle a,b \rangle P^{A_1} \Leftrightarrow a > b$ // каква е интерпретацията

Тези две неща определят структурата

$\varphi_2 = \exists x \forall y (x,y)$ - не върви за $|A_1| = \mathbb{N}$

→ затова ограничаваме универсума.

Например $\{1, \dots, 56\}$

$\langle a,b \rangle \in P^{A_2} \Leftrightarrow a \geq b$

(Добавяме =, за да е изпълнено)

$\varphi_3 = \neg \exists x \underbrace{\forall y P(y,x)}_{x \text{ е най-малък}}$

$|A_3| = \{1/i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

P^{A_3} като P^{A_2}

$\varphi_4 = \exists x \exists y (\overbrace{\neg P(x,y)}^{x<y} \& \forall z \forall t (\overbrace{\neg P(x,z)}^{x<z} \& \overbrace{\neg P(z,t)}^{z<t} \& \overbrace{\neg P(t,y)}^{t<y} \Rightarrow$

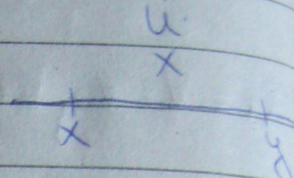
$\Rightarrow \exists u (\underbrace{\neg P(z,u)}_{z<u} \& \underbrace{\neg P(u,t)}_{u<t})))$ Тази ф-ла е изпълнена за нашия универсум

$\varphi_4' \; \exists x \exists y (\overbrace{\neg P(x,y)}^{x<y} \& \forall z \forall t (P(z,x) \; \overbrace{x \leq z}^{x \leq z} \& \overbrace{\neg P(z,t)}^{z<t} \& \overbrace{P(y,t)}^{t<y} \Rightarrow$

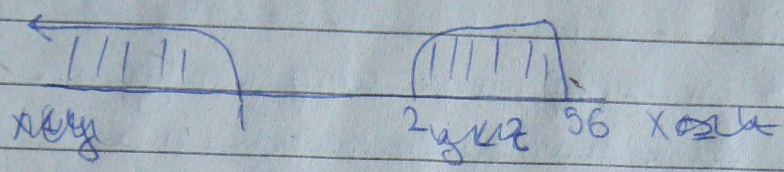
$\Rightarrow \exists u (\underbrace{\neg P(z,u)}_{z<u} \& \underbrace{\neg P(u,t)}_{u<t})))$ Трябва да сменим универсума за да е вярно φ_4'

$|A_4| = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 56\}$

$\varphi_5 = \exists x \exists y (\underbrace{\neg P(x,y)}_{x<y} \& \neg \exists u (\underbrace{\neg P(x,u)}_{x<u} \& \underbrace{\neg P(u,y)}_{u<y}))$



$|A_5| = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \vee 2 \leq x \leq 56\}$



$\varphi_6 = \exists x \exists y \exists z (\neg P(x,y) \& \neg P(y,z) \& \neg \exists u (P(x,u) \& \neg P(u,y)) \&$

$\& \neg \exists u (\neg P(y,u) \& \neg P(u,z)))$

$|A_6| = \{x = \mathbb{R} \mid x \leq 1 \vee x = 2 \vee 3 \leq x \leq 56\}$

$|A_6|$ - същото

$\varphi_7 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (\neg P(x_1,x_2) \& \neg P(x_2,x_3) \& \neg P(x_3,x_4) \&$

$\& \neg \exists u (\neg P(x_1,u) \& \neg P(u,x_2) \& \neg \exists u (\neg P(x_2,u) \& \neg P(u,x_3)) \&$

$\& \neg \exists u (\neg P(x_3,u) \& \neg P(u,x_4))$

Аналогично $\varphi_8, A_8, \varphi_9, A_9$

$|A_\omega| = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 55\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 55 \leq x \leq 56\}$

16.04.2013

Определимост в структура

структура → множество, наречено универсум

↓ интерпретация на индивидни константи, функционални и предикатни символи.

Нека структурата R^{dm} е с универсум множ. на реалните числа и е с език с формално равенство и два функционални символа, които се интерпретират така:

$$d^{R^{dm}}(a,b) = a+b$$

$$d^{R^{dm}}(a,b) = a \cdot b$$

$\boxed{\forall y\, d(x,y) \doteq y}$ $\quad d - + \; ; \; m - *$

свързани	свързани символи	може да се преименува
свободни	параметър на израза	Не може да се преименува

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy \neq \int_0^1 f(z,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 f(x,z)\,dz$$

x - свободна
y - свързана

```
{int i;          i - свързана
j = i+1          j - свободна
...
}
```

$\varphi_0 = \forall y\, d(x,y) = y$

Искаме да кажем, че $R^{dm} \models 0$ точно тогава, когато x има стойност 0.

По-формално: при всяка оценка v

$$\|\varphi_0\|^{R^{dm}}[v] = u \Leftrightarrow v(x) = 0$$

Това означава, че φ_0 определя $\{0\}$

Тъй като x е единствената свободна променлива в φ, то $\|\varphi_0^{R^{dm}}\|[v'] = \|\varphi_0\|^{R^{dm}}[v'']$, ако оценките v' и v'' са такива, че $v'(x) = v''(x)$

Ако $x_1, x_2, \dots, x_n$ са свободни променливи на φ, то за да означим това по-ясно, ще пишем $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. Когато пишем $\varphi^{R^{dm}}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ще имаме предвид $\|\varphi\|^{R^{dm}}[v]$, където v е такава оценка, че $v(x_1) = a_1$, $v(x_2) = a_2, \dots$ $v(x_n) = a_n$

φ_0 определя $\{0\}$, защото $\varphi_0^{R^{dm}}[0] = u \Leftrightarrow a = 0$

$\varphi_1[x] = \forall y\; m(x,y) \doteq y$

$\varphi_1^{R^{dm}}[a] \leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}\;\; a \cdot b = b \leftrightarrow a = 1$

$$\varphi_2[x] = \exists y(\varphi_1[y] \,\&\, d(y,y) \doteq x)$$
$$d(1,1) \doteq x$$
$$\| \quad \forall y(\varphi_1[y] \Rightarrow d(y,y) \doteq x)$$

$\varphi_3[x]\;\; \exists y \exists z(\varphi_1[y] \,\&\, \varphi_2[z] \,\&\, d(y,z) \doteq x)$

$$\forall y(\varphi_1[y] \Rightarrow \forall z(\varphi_2[z] \Rightarrow d(y,z) \doteq x))$$

~~$\exists x(\ldots \Rightarrow \ldots) \to$ безсмислено~~

~~$\forall x(\ldots \& \ldots) \to$ може, но не~~

$\varphi_{2/3}[x] = \exists y \exists z (\varphi_2[y] \& \varphi_3[z] \& \underbrace{m(x,z) \doteq y}_{x = y/z}$

$\varphi_{-\sqrt{2}}[x] = \exists y (\underbrace{\varphi_2[y] \& m(x,x) \doteq y}_{x^2 = 2} \& \underbrace{\neg \exists z\, m(z,z) \doteq x}_{x<0}$

Нека структурата R^{pq} е с универсум $\mathbb{R}$ и е за език без формално равенство с два триместни предикатни символа p и q, които се интерпретират така:

$\langle a,b,c \rangle \in p^{R^{p,q}} \longleftrightarrow a+b=c$, $p - +$, $q *$

$\langle a,b,c \rangle \in p^{R^{p,q}} \longleftrightarrow a.b=c$

$\varphi_1[x] = \forall y\, m(x,y) \doteq y$ $\psi_0[x] = \forall y\, p(x,y,y)$

$\psi_1[x] = \forall y\, q(x,y,y)$

$\psi_2[x] = \exists y (\psi_1[y] \& p(y,y,x))$

$\psi_3[x] = \exists y \exists z (\psi_1[y] \& \psi_2[z] \& p(y,z,x))$

$\psi_{2/3}$ $q(x,z,y)$

$\psi_{-\sqrt{2}}$ $q(x,x,y)$, $q(z,z,x)$

$\psi_=[x,y] = \exists z (\psi_0[z] \& p(x,z,y))$

$\psi_=[x,y] = x \doteq y$

$\varphi_{\le}[x,y] = \underbrace{\exists z(p(x,z,y)}_{y-x\geq 0} \& \underbrace{\exists t\, q(t,t,z))}_{z\geq 0}$ - само за R^{pq}

Съществува алгоритъм, който за произволна формула, познава дали тя е вярна в R^{dm} (или R^{pq})

$Z^{pq}, Z^{dm}, Q^{pq}, Q^{dm}, N^{pq}, N^{dm}$

Всяко естествено число е сума на четири точни квадрата. за Z^{pq}

$\varphi_{\le}[x,y] = \exists z(p(x,z,y) \& \exists t_1 \exists t_2 \dots \exists t_{10}$

$q(t_1,t_1,t_5) \& q(t_2,t_2,t_6) \& q(t_3,t_3,t_7) \& q(t_4,t_4,t_8),$

$p(t_5,t_6,t_9) \& p(t_9,t_7,t_{10}) \& p(t_{10},t_8,z)))$

За N^{pq}

$\varphi_{\le}[x,y] = \exists z\, p(x,z,y)$

22.04.2013

Да се определят в N^p
1) $\{1,3,5\}$
2) $\{a \mid a \text{ е четно}\}$
3) $\{b \mid b \equiv 3 (\text{mod } 3)\}$

1) $\varphi_1[\![x]\!] \vee \varphi_3[\![x]\!] \vee \varphi_5[\![x]\!]$

2) a е четно, точно когато има x, такова, че $a = 2x$, т.е когато има x такова, че $a = x + x$

$\varphi_{\text{четно}}[\![\overset{u}{a}]\!] = \exists x\, p(x,x,\overset{u}{a})$

$\varphi_{нечетно}[x] = \neg\varphi_{четно}[x]$

a е нечетно, точно тогава, когато $a = 2x+1$ или $x: a = x+x+1$

$\varphi_{нечетно}[a] = \exists x \exists y \exists z (\varphi_1[y] \& p(x,y,z) \& p(x,z,a))$

3) b има вида $5x+3$

$b = x+x+x+x+x+3$

$\varphi_{5x+3}[b] = \exists x \exists y \exists w \exists u (\varphi_3[y] \& p(x,x,z) \& p(z,z,w) \& p(w,x,u)$
$\& p(u,y,b))$

Вместо a и b пишем други.

$\varphi_1[x] = \forall y \forall z\, p(y,z,x) \Rightarrow ((x=y \& x \neq z) \vee (x \neq y \& x = z)))$

"$x = y$" $\varphi = [x,y]$

"$x \neq y$" $\neg\varphi = [x,y]$

зад

$|A| = \mathbb{R}$

$q^A = \{<x,y,z> | x.y = z\}$

("реални числа с умножение")

Кои множества от вида $\{a\}$ са определими?

$\varphi_1[x] = \forall y\, q(x,y,y)$

$\varphi_0[x] = \forall y\, q(x,y,x)$

$\varphi_{-1}[x] = \underbrace{\neg\varphi_0[x]}_{\text{без това}} \& \neg[x] \& \exists y\, q(x,x,y) \& \varphi_1[y]$

$|A| = \mathbb{R}$

$p^A = \{\langle x, y, z\rangle \mid x + y = z\}$

$q^A = \{\langle x, y, z\rangle \mid xy = z\}$

Да се определи $\{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$

$x \leq y$

$x > y$

$x \geq y$

$x < y$, ако $y = x + a$, където a е положително

$\varphi_{\text{положително}}[z] = \exists x\, q(x, x, z)$
(не строго)

$\varphi_{\geq}[x, y] = \exists z(\varphi_{\geq 0}[z] \,\&\, p(y, z, x))$

$|A|$ - множ. на затворени дискове (кръгове) в равнината

→(1) $EQ(x,y)$: $x = y$
- равенство

→(2) $EC(x,y)$

(3) $DC(x,y)$

(4) $TPP(x,y)$

(5) $NTPP(x,y)$

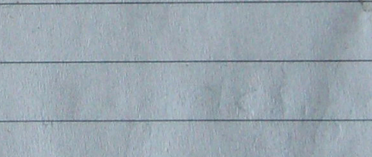
(6) $PO(x,y)$

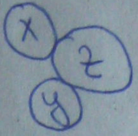
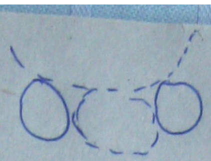
Имаме (1), (2), (6)

Искаме с тях да определим (3), (4), (5)

$\varphi_{\subseteq}[x, y]$, т.е (4) или (5)

$\varphi_{\subseteq}[x, y] = \neg PO(x,y) \,\&\, \neg EC(x,y)$ не



$DC(x,y) = \exists z \exists t (EC(z,x) \& EC(z,y) \&$
$EC(t,x) \& EC(t,y) \&$
$EC(t,z))$

$TPP(x,y) = \neg(x=y) \& \neg EC(x,y) \& \neg DC[(x,y)] \& \neg PO(x,y) \& \exists z (EC(x,z) \&$
$EC(y,z))$

$NTPP(x,y) = \neg(x=y) \& \neg EC(x,y) \& \ldots$

R със събиране и умножение разрешима
N със събиране
N със събиране и умножение неразрешима

$\boxed{23.04.2013}$

$R^{pq}, Z^{pq}, N^{pq}, Q^{pq}, R^{dm}, Z^{dm}, Q^{dm}, N^{dm}$

$\langle a,b,c \rangle \in p \longleftrightarrow a+b=c$

$\langle a,b,c \rangle \in q \longleftrightarrow a \cdot b = c$

$d(a,b) = a+b$

$m(a,b) = a \cdot b$

$\varphi[x] = \exists y \forall z (\underbrace{xy}_{t_1} + z = \underbrace{y+x}_{t_2} \Rightarrow \exists u \; xz = \underbrace{y+u}_{t_3})$

във φ няма друга свободна променлива, освен x

На езика на $\square^{pq}$:

$\exists y \forall z (\underbrace{\exists t_1 \exists t_2 (q(x,y,t_1) \& p(y,x,t_1) \& p(t_1,z,t_2))}_{xy+z=y+x} \Rightarrow$

$\underbrace{\exists u \exists t_3 (p(y,u,t_3) \& q(x,z,t_3))}_{xz=y+u})$

$R^p, Q^p, N^p, Z^p, R^d, Q^d, N^d, Z^d$ - има събиране, няма умножение

$R^d, Q^d, N^d, Z^{dq}, R^{mq}, Q^m, N^m, Z^m$ - Няма събиране, има умножение

p - + ; q - *

	R^{pq} / R^{dm}	Q^{pq} / Q^{dm}	Z^{pq} / Z^{dm}	N^{pq} / N^{dm}	R^p / R^d	Q^p / Q^d	Z^p / Z^d	R^q / R^m	Q^q / Q^m	Z^q / Z^m	N^q / N^m	N^p / N^d
$\{0\}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\{1\}$	+	+	+	+	−	−	−h	+	+	+	+	+
$\{2\}$	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+
$\{1/2\}$	+	+			−	−		−	−			
$\{-1\}$	+	+	+		−	−	−	+	+	+	+	
$=$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\leq$	+	+	+	+	−	−	−					+

$\varphi_0[x] = \forall y\, d(x,y) = y$ $\qquad \psi_0[x] = p(x,x,x)$

$\qquad p(x,y,y)$

$\varphi_1[x] = \forall y\, m(x,y) = y$

$x = y \leftrightarrow x + 0 = y \leftrightarrow \exists z (z = 0$ и $x + z = y)$

$\psi_=[x,y] = \exists z (p(z,z,z) \,\&\, p(x,z,y))$

$\psi'_=[x,y] = \exists z (\forall u\; q(z,u,u) \,\&\, q(x,z,y))$

$\psi'_0 = \forall y\; q(x,y,x)$

$x = -1 \leftrightarrow x \neq 1$ и $x^2 = 1$

$\varphi'_{-1}[x] = \neg\varphi_1[x] \,\&\, \exists y (m(x,x) = y \,\&\, \varphi_1[y])$

$\varphi_{\text{противоположни}}[x,y] = \exists z \underbrace{d(z,z) = z}_{z=0} \& \; d(x,y) = z)$

$\psi_\leq[x,y] = \exists z\, d(z,x) = y)$

$\psi''_1[x] = \neg\psi_0[x] \,\&\, \forall y (\neg\psi_0[y] \Rightarrow \psi_\leq[x,y])$

x е най-малкото разл. от 0 $\leftrightarrow x \neq 0$ и $\forall y (y \neq 0 \Rightarrow x \leq y)$

групи

$(\mathbb{R}^+, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +)$

$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$h(x) = \ln(x)$ $h(xy) = h(x) + h(y)$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

h е биекция м/у $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}$

$g(x) = e^x$ $h(g(x)) = x \rightsquigarrow h$ е инекция

$g(h(x)) = x \rightsquigarrow h$ е сюрекция

$h: A \to B$ е изоморфизъм, ако

1) h е биекция м/у $|A|$ и $|B|$

2) за всеки функц. символ f и произволни $a_1, a_2, \dots, a_n$ от $|A|$

$h(f^A(a_1, a_2, \dots, a_n)) = f^B(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$

3) за всяка индивидуална константа $h(c^A) = c^B$

$\boxed{\begin{array}{l} h(e) = e \\ h(xy) = h(x)h(y) \end{array}}$

4) за всеки предикатен символ p

и произволни $a_1, \dots, a_n \in |A|$

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in p^A \longleftrightarrow \langle h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n) \rangle \in p^B$

Заб: За = не е нужно да се проверява, защото ако h е биекция условието ще бъде вярно.

$p(a, b, c) \leftrightarrow p(h(a), h(b), h(c))$

Ако $h: A \to B$

$A \models \varphi[a] \Longleftrightarrow A \models \varphi[h(a)]$

$a \in [A]$

Ако $h: A \to A$ е изоморфизъм, то h е автоморфизъм.

$\mathbb{R}^p \models \varphi_1[a] \longleftrightarrow \mathbb{R}^p \models \varphi_1[h(a)]$

Ако h е автоморфизъм и $h(1) \neq 1 \Rightarrow \{1\}$ ще е определимо

Полезни кандидати за автоморфизми:

$h(x) = x+1$

$h(x) = 2x$

$h(x) = -x$

$h(x) = x^2$

$h(x) = x^3$

1) h е биекция $R \to R$

2) $\langle a,b,c\rangle \in p^{R^p} \leftrightarrow \langle h(a), h(b), h(c)\rangle \in p^{R^p}$

$a+b=c \leftrightarrow h(a)+h(b)=h(c)$

$h(x) = 2x$ е биекция от R в R, защото $h(g(x))=x$
$g(h(x))=x$, където $g(x) = \frac{x}{2}$

$a+b+c \leftrightarrow 2a+2b=2c$

Но $h(x)=x \leftrightarrow 2x=x \leftrightarrow x=0$

<u>този автоморфизъм запазва само 0</u>, същото върши работа и за Q. Не върши работа за Z и N, защото не е сюрекция.

$h'(x) = -x$ е биекция, защото $h'(h'(x)) = x$

$a+b=c \leftrightarrow (-a)+(-b) = -c$

$\Rightarrow h'$ е изоморфизъм

$h(x)=x \leftrightarrow -x \leftrightarrow x=0$

Не е вярно, че $a \le b \leftrightarrow h'(a) \le h'(b)$

h е биекция

$h(ab) = h(a)h(b)$ $\qquad$ $\sqrt{x^2}=x$, не а $|x| \Rightarrow$ не е обратимо

$[a=b \leftrightarrow h(a)=h(b)]$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x^3}=x$ Не е биекция при Q, Z, N

$h(x)=x^3$ е биекция от R в R, защото $\sqrt[3]{h(x)}=x$ и $h(\sqrt[3]{x})=x$

$(ab)^3 = a^3 b^3$

Значи h е автоморфизъм в R^m

$h(m) = x \leftrightarrow x^3 \leftrightarrow x \in \{1, 0, -1\}$

13.05.2013

Неопределимост

Автоморфизми

Автоморф. на стр. A в себе си.

Наричаме изобр. $h: |A| \to |A|$

със следните св-ва

1) h е биекция $(h(g(x)) = g(h(x)))$

2) h запазва св-ствата

така за всеки предикатен символ, имаме че:

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^A \leftrightarrow \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^A$ (n-арност на p)

3) h е съгласувано с функц. символи, така за всеки функц. символ f имаме, че

$f^A(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h f^A(a_1, \dots, a_n))$ n-арност на f)

и за вс. конст. с-л с $h(c^A) = c^A$

R^q

$|R^q| = R$

$q^{R^q} = \{\langle a, b, c \rangle \mid ab = c\}$

$\{a\}$ е определено за

$a \le 1, 0, 1$, но не е определимо

за никое друго a? $\{2\}$? $\{\pi\}$?

Тв) Ако S е опред. (подмнож. на |A|) и h е автоморф. то h запазва S, това множ. от образите над h на елементите на S запазва S

Така например, ние видяхме, че в стр. N^p (естествените числа със събиране) е определимо. всяко множ. от от вида $\{n\}$. Нека h е автоморфизъм на тази стр., тогава за вс. n ще имаме, че h запазва $\{n\}$, т.е. че $h(n) = n$ тази стр. има има точно един изоморф. и това е идентитетът.

$\boxed{\text{Тв.}}$ Ако множ. S се размества от такъв автоморфизъм, то S не е определимо.

$\boxed{\text{Зад}}$ Да се док. че ако $a \neq 0 \neq 1$, то $\{a\}$ не е определимо в R^q (реалните числа с умножение).

Искаме да намерим автоморфизъм h, такъв, че $h(a) \neq a$; h – биекция.
h – изобр. от универсума на R^q в същия универсум т.е. от R в R

За вс. реални числа имаме, че $\langle a,b,c\rangle \in q^{R^q} \leftrightarrow$
$\langle h(a), h(b), h(c)\rangle \in q^{R^q}$
$ab = c \leftrightarrow h(a)h(b) = h(c)$
$-2 \cdot 3 \neq 6 \nleftarrow (-2)^2 \cdot 3^2 = 6^2$

$h(x) = x+1 \quad 2x \quad xx$
$x+2 \quad 3x$

$h(x) = x^2$ е съгласувано с умнож. в посока $(\rightarrow)$
$h(x) = x^3$ —||— $\qquad ab = c \leftrightarrow a^3 b^3 = c^3$
$h(x) = x^3$ е автоморфизъм.

Кога $h(a) = a$? (т.е. за кои a?)
Когато $a = 0, 1, -1$. Тоест ако $a \neq 0, 1, -1$, то $h(a) \neq a$ и следователно $\{a\}$ е неопределимо.

$\left.\begin{array}{l} x - \text{да} \\ x^2 - \text{не} \\ x^3 - \text{да} \end{array}\right\}$ $h(x) = x^{2n+1}$, $n \geq 1$ също върши работа.

$h(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ също върши работа

$\boxed{\text{зад}}$ $\mathbb{R}^p$: реални числа със събиране. Кои са определими?
$\mathbb{Z}^p$: $\mathbb{Z}$ със събиране
$\mathbb{N}^p$: $\mathbb{N}$ със умножение.

Ще намерим автоморф. на тази стр.
h – биекция на $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$
$a+b=c \leftrightarrow h(a)+h(b)=h(c)$
$h(x)=2x$ (съгл. със съб. и биекция)
Кога $h(a)\neq a$? (т.е. $2a\neq a$) ~ когато $a\neq 0$
Ако $a\neq 0$, то $\{a\}$ ~~то~~ неопределимо
Знаем от предишното упр., че $\{0\}$ е определимо.

$\mathbb{Z}^p$ h: биекция от $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$
$a+b=c \leftrightarrow h(a)+h(b)=h(c)$
Дали $f(x)=2x$ е автоморфизъм? ~ Не, защото h не е биекция.
h? h = нещо по x $h(x)=-x$
Кога $h(a)\neq a$? Т.е. $(-a\neq a)$ ~ когато $a\neq 0$
При $a\neq 0$ $\{a\}$ е неопр., $\{0\}$ е неопр.

$\boxed{\text{зад}}$ $\mathbb{N}^p$: $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, биекция
$ab=c \leftrightarrow h(a)\cdot h(b)=h(c)$
Нека h е автоморфизъм.
$\varphi_{просто}[[x]] \leftrightharpoons \neg\exists d_1, d_2, d_3 (d_1\neq d_2 \& d_2\neq d_3 \& d_3\neq d_1 \& \neg\varphi_=[[d_1 d_2]]$
$\exists e_1 q(d_1, e_1, x) \& \exists e_2 q(d_2 e_2 x) \& \exists e_3 - q(d_3, e_3, x)$

И така, h е изобр. прости числа в прост.
h е биекция в/у прости числа.
Нека $p_0, p_1, p_2, \dots$ са прости числа и за $i\geq 0$, $h(p_i)=q_i$
$h(p_{i0}^{\alpha_0}, p_{i1}^{\alpha_1}, \dots, p_{ik}^{\alpha_k}) = [h(p_0)]^{\alpha_0}, \dots, [h(p_k)]^{\alpha_k} = q_{i0}^{\alpha_0}\dots q_{ik}^{\alpha_k}$

Нека q е биекция в множ. на простите числа.

Деф. h по следния начин:

$\left[\begin{array}{l} h(0)=0 \\ \text{Ако } n = p_{i_0}^{\alpha_0} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k} \text{ е канонично разлагане на } n \end{array}\right.$

на прости множители, то $h(n) = [g(p_{i_0})]^{\alpha_0} \ldots [g(p_{i_k})]^{\alpha_k}$

Тогава $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

(1) h е биекция

(2) $ab = c \leftrightarrow h(a) \cdot h(b) = h(c)$

(3) Ако $a = \prod_{s=0}^{k} p_{i_s}^{\alpha_s}$, $b = \prod_{s=0}^{k} p_{i_s}^{\beta_s}$, $c = \prod_{s} p_{i_s}^{\gamma_s}$

$ab = c \leftrightarrow \alpha_s + \beta_s = \gamma_s$ за $0 \leq s \leq k \leftrightarrow h(a)h(b) = h(c)$

(1) h е биекция, защото h има обратно изображение f, определено, чрез $f(0)=0$, $f(n) = [g^{-1}(p_{i_0})]^{\alpha_0} \ldots [g^{-1}(p_{i_k})]^{\alpha_k}$

Нека $h: A \to A$, ако h има обратно изобр., то h е биекция. Обратното изобр. f на h означ., че за вс. $x \in A$, имаме $h(f(x)) = x$ и $f(h(x)) = x$

Нека $a \neq 0$. Нека p - просто, p - дели a, Нека q - просто q дели a

Нека $g(x) = \begin{cases} p, & x = q \\ q, & x = p \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$

Тогава $h(a) \neq a$ и тогава $\{a\}$ - нетр.

14.05.2013

Автоморфизми:

1) биекция → инекция $\exists g(f \circ g = Id)$
↘ сюрекция $\exists g(f \circ g = Id)$

2) за вс. конст. c: $h(c^A) = c^A$

3) за вс. функц. с-л: $h(f^A)(a_1, \dots, a_n) = f^A(h(a_1), \dots, h(a_n))$

4) за вс. пред. с-л: $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^A \Leftrightarrow \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^A$

Всеки авт. ≠ от Id е нетривиален.

x^2 не е сюрекция
защото $2^2 = (-2)^2$

Кандидати за автоморфизми:

~~$h(x) = x + 1$~~

$\boxed{h(x) = 2x} \rightarrow R^p, Q^p$

$\boxed{h(x) = -x} \rightarrow R^p, Q^p, Z^p$

$h(x) = x^3 \rightarrow (xy)^3 = x^3 y^3 \rightarrow R^p$

$(x+y)^3 \neq x^3 + y^3$

инекция: $a^3 = b^3 \rightarrow a = b$

сюрекция:

$$h(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{ако } x \neq 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0 \end{cases}$$

$0 = \infty$

$0 \cdot \infty = 0 = \infty$

1) $h(h(x)) = x \Rightarrow h$ е биекция

2) за d: $[h(d^{Q^p}(a,b)) = d^{Q^p}(h(a) \cdot h(b))]$

зф $h(a+b) = h(a) + h(b)$

$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ – НЕ

4 зад. за p: $a+b=c \leftrightarrow h(a)+h(b)=h(c)$ НЕ

за m: $h(a\cdot b)=h(a)\cdot h(b)$

1. $a\neq 0, b\neq 0 \quad ab\neq 0$, то $h(a\cdot b)=\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=h(a)h(b)$

2. $a\neq 0, b=0, \quad ab=0$
$h(a\cdot b)=h(0)=0$
$h(a)h(b)=h(a)\cdot 0=0$

3. $a=0, b\neq 0$ - аналогично

4. $a=b=a\cdot b=0$
$h(ab)=h(0)=0$
$h(a)\cdot h(b)=0\cdot 0=0$

за q: $a\cdot b=c \leftrightarrow h(a)\cdot h(b)=h(c)$

1. $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0, ab\neq 0$
$h(a)h(b)=h(c) \leftrightarrow \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \leftrightarrow ab=c$

2. $a=0, b\neq 0, c\neq 0, ab=0$

Ok: $\begin{cases} a\cdot b=0 \text{ е лъжа} \\ h(a)h(b)=h(c) \leftrightarrow 0\cdot h(b)=\frac{1}{c} \leftrightarrow \frac{1}{c}=0 \text{ е лъжа} \end{cases}$

3. $a\neq 0, b=0, c\neq 0$ - аналогично

4. $a=0, b\neq 0, c=0$
$ab=c$ - истина
$h(a)h(b)=h(c) \leftrightarrow 0\cdot h(b)=0$ - истина

5. $a\neq 0, b=0, c=0$ - аналогично

6. $a = b = 0,\ c \neq 0$

$ab = c$ - лъжа

$h(a) \cdot h(b) = h(c) \leftrightarrow 0 \cdot 0 = \frac{1}{c}$ - лъжа

7. $a = b = 0,\ c = 0$

$ab = c \leftrightarrow 0 \cdot 0 = 0 \leftrightarrow h(a)h(b) = h(c)$

8. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$

$ab = c$ - лъжа

$h(a)\,h(b) = h(c) \leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = 0$ - лъжа

---

h е автоморфизъм в $\mathbb{R}^{q}, \mathbb{R}^{m}, \mathbb{Q}^{q}, \mathbb{Q}^{m}$

За произволна формула $\varphi[x_1, \dots, x_n]$

$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow A \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$

$\mathbb{Q}^{q} \models \varphi[a] \leftrightarrow \mathbb{Q}^{q} \models \varphi[h(a)]$

Да допуснем, че φ определя $\{2\}$ в $\mathbb{Q}^{q}$

$\mathbb{Q}^{q} \models \varphi[a] \leftrightarrow a = 2$

$\mathbb{Q}^{q} \models \varphi[h(a)] \leftrightarrow h(a) = 2$

$a = 2$

$\Updownarrow$

$h(a) = 2$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{a} = 2$

ако $a \neq 0$

Не

Следователно $\{2\}$ не е определимо $\mathbb{Q}^{q}$

Същото и за $\{1/2\}$ $\mathbb{Q}^{m}, \mathbb{R}^{m}$ и $\mathbb{R}^{q}$

$h(0) = 0$ сравняме двете страни
$h(1) = 1$ за Z^q, N^q, Q^m, R^m зависи от степента коя е по-голяма

$h(\pm 2^m 3^n p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}) = \pm 2^n 3^m p^{k_1} \dots p_s^{k_s}$

където $p_1 \dots p_s$ са различни, прости числа, различни от 2 и 3.

1) $h(h(x)) = x \Rightarrow h$ е биекция

$h(a.b) = h(a)h(b)$

$h(2^{m'} 3^{n'} p_1^{k_1'} \dots p_s^{k_s'} \cdot 2^{m''} 3^{n''} p_1^{k_1''} \dots p_s^{k_s''}) = h(2^{m'+m''} 3^{n'+n''} p_1^{k_1'+k_1''} \dots p_s^{k_s'+k_s''})$

$= 2^{n'+n''} 3^{m'+m''} p_1^{k_1'+k_1''} \dots p_s^{k_s'+k_s''} =$

$= 2^{n'} 3^{m'} p_1^{k_1'} \dots p_s^{k_s'} \cdot 2^{n''} 3^{m''} p_1^{k_1''} \dots p_s^{k_s''} = h(2^{m'} 3^{n'} p_1^{k_1'} \dots p_s^{k_s'}) h(2^{m''} 3^{n''} p_1^{k_1''} \dots p_s^{k_s''})$

h е автоморфизъм за N^q, N^m, Z^q и Z^m

$a \le b \hookrightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$ - не

$\boxed{\text{зад}}$ Структура A; Универсум $\mathbb{Z}$

$f^A(x) = x - 1$

Да се докаже, че ако $B \subseteq \mathbb{Z}$, то B е определимо в $A \to B = \mathbb{Z}$ или $B = \emptyset$

$\varphi = x = f(x)$ няма определя $\emptyset$

$x = x$ определя $\mathbb{Z}$

$[h(f^A(x)) = f^A(h(x))]$

$h(x-1) = h(x) - 1$

Нека $B \subseteq \mathbb{Z}$, но $B \neq \emptyset$ и $B \neq \mathbb{Z}$

Нека $a \in B$ Нека $b \notin B$

$h(x) = x + (b-a)$

$h(a) = b$

Ако допуснем, че φ определя B, то $A \models \varphi[a] \leftrightarrow A \models \varphi[h(a)]$

$a \in B$ истина $\qquad A \models \varphi[b]$, $b \notin B$ лъжа

$\Rightarrow B$ не е определимо

Автоморфизъм в $h(x)$?

1) Нека $g(x) = x + (a-b)$

$\left.\begin{array}{l} f(g(x)) = x \\ g(f(x)) = x \end{array}\right\}$ f е биекция

2) Няма константи

3) За вс. функции: $h(x-1) = h(x) - 1$

4) За вс. пред. $C-1$ (само $=$) $\quad x + 1 + (b-a) = x + (b-a) - 1$.

Структура A', универсум $\mathbb{N}_1 =$, $f^A(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ако } x \neq 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0 \end{cases}$

Кои едноместни масиви са определими? $\sim$ Всички

$\varphi_0[x] = x = f(x)$ - вярно за $x = 0$

$\varphi_1[x] = \exists y \, (\underbrace{y = f(x)}_{y=0} \;\&\; x = f(y))$

$\varphi_{103}[x] = \exists y (y = f(y) \& \; x = \underbrace{f(f(\ldots f(y) \ldots)))}_{103 \, f}$

21.05.2013 Резолюция

P - парламентът отказва да приеме нови закони.
Q - протестите свършват
R - президентът подава оставка
S - протестите продължават повече от година

Ще се прекратят ли протестите, ако парламентът откаже да приеме нови закони?

$\neg X \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$	$\overset{?}{\models} \neg Q$
$\neg(S \& R) \Rightarrow P \Rightarrow \neg Q$	
$\neg S$	
$\neg P$	

① Махаме $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

$x \Leftrightarrow y \models (x \Rightarrow y) \& (y \Rightarrow x)$

$x \Rightarrow y \models \neg x \vee y$

② Вкарваме отрицанието навътре

$\neg(p \& Q) \models \neg p \vee \neg Q$

$\neg(p \vee Q) \models \neg p \& \neg Q$

$\neg\neg p \models p$

(предпочитаме по-вътрешни отрицания)

③ Прилагаме докато може

$p \vee (Q \& R) \models (p \vee Q) \& (p \vee R)$

$\neg\neg(S\&R)\vee(\neg P\vee Q)\nvDash$

$S\vee\neg P\vee\neg Q\,\&\,(R\vee\neg P\vee\neg Q)\nvDash$

1) $\{S, \neg P, \neg Q\}$

2) $\{R, \neg P, \neg Q\}$

3) $\{\neg S\}$

4) $\{P\}$

5) $\{Q\}$ – добавили сме обратното на $\neg Q$. Слагаме отрицанието на това което искаме да докажем

6) От 1) и 3) => $\{\neg P, \neg Q\}$

От 6) и 5) => 7) $\{\neg P\}$

От 7) и 4) => $\blacksquare$

=> Протестите няма да свършат.

$\boxed{\text{зад}}$ 1) $\{\neg p, \neg Q\}$

2) $\{\neg p, Q\}$

3) $\{p, \neg Q\}$

4) $\{p, Q\}$

съкращава се само по един, не може и двете

$\neg Q$, Q – тавтологични дизюнкти

От 3) и 4) => 5) $\{P\}$

От 1) и 2) => 6 $\{\neg P\}$

от 6) и 5) => 7) ■

$\boxed{\text{зад}}$ 1) $\{P, Q, R\}$

2) $\{P, \neg Q, \neg R\}$

3) $\{\neg P, Q, \neg R\}$

4) $\{P, \neg Q, R\}$

5) $\{P, Q, \neg R\}$

6) $\{\neg P, \neg Q, R\}$

7) $\{\neg P, Q, R\}$

8) $\{\neg P, \neg Q, \neg R\}$

9) от 1) и 3) => $\{Q, R, \neg R\}$ → не работи с такива
от 9) и 10) => 11) тавтологичен дизюнкт.

12) $\{\neg P, Q\}$ от 11) и 3)

13) $\{R, \neg Q\}$ от 11) и 4)

14) $\{\neg P, R\}$ от 12) и 13)

15) $\{Q, R\}$ от 13) и 1)

16) $\{R\}$ от 13) и 15)

17) $\{P, \neg Q\}$ от 16) и 2)

18) $\{P, Q\}$ от 5) и 16)

19) $\{\neg P, \neg Q\}$ от 16) и 8)

20) $\{Q, \neg Q\}$ от 12) и 17)

21) $\{p\}$ от 17) и 18)

22) $\{\neg Q\}$ от 21) и 19)

23) $\{Q\}$ от 22) и 23)

24) $\blacksquare$

От 6) и 14)

$\{\neg p, \neg Q, R\}$ $\{\neg p, R\}$

остава $\{\neg p, R\}$, премахваме по-дългия

② Ако $D_1 \subseteq D_2$, махаме D_2

③ Предпочитаме по-къси дизюнкти.

Алгоритъм за Пренексна Нормална форма (ПНФ)

⓪ Махаме $\Leftrightarrow$ ($\exists y\, P(y) \Leftrightarrow \forall x\, q(x) \sim \exists y\, P_y \Rightarrow \forall x\, q(x)\ \&\ \forall x\, q(x) \Rightarrow \dots$)

① Правим всички променливи различни (свързаните променливи могат да се преименуват, но свободните не).
(Пр. за свързани променливи: $\forall x\, \underbrace{f(x)}$; $\exists x\, \underbrace{q(x)}$)

② Избираме квантор (предпочитаме по-вътрешен, защото изкарваме кванторите навън.) (С групирани квантори работим като с един.

③ Коя е формулата на избрания квантор? (Най-малката формула, започваща от квантора)

④ Коя е следващата формула по големина

⑤ Коя е логическата операция на следващата формула по големина?

⑥ Къде ще отиде квантора? ($\sim$ Пред следващата по големина формула.)

(6.1) Ще се промени ли квантора? ($\sim$ Да, ако пред квантора има ¬, или кв. стои от ляво на ($\Rightarrow$), в противен случай няма да се промени)

⑦ Изкарваме квантора
⑧ Проверяваме за грешки и за грешни скоби
⑨ go to ②

зад Приведете в ПНФ формулата:

$$(\neg\forall x\, p(x,y) \Rightarrow \neg\exists x\, q(x)) \vee \neg(\exists y\, p(y,x) \Leftrightarrow \forall x\, q(x))$$

св. - свързана пром. своб. - свободна променлива

(0) Махаме $\Leftrightarrow$

$$(\neg\forall \overset{св}{x}\, p(x,\overset{своб}{y}) \Rightarrow \neg\exists x\, \overset{св}{q(x)}) \vee \neg((\exists y\, \overset{св}{p(y},\overset{своб}{x}) \Rightarrow \forall x\, \overset{св}{q(x)}) \,\&\, (\forall x\, \overset{св}{q(x)} \Rightarrow \exists y\, \overset{св}{p(y},\overset{своб}{x})))$$

(1) Правим всички променливи различни.

$$(\neg\underbrace{\forall t\, p(t,y)}_{\text{ф-ла на кв.}} \Rightarrow \neg\underbrace{\exists u\, q(u)}) \vee \neg((\underbrace{\exists v\, p(v,x)} \Rightarrow \forall w\, q(w)) \,\&\, (\underbrace{\forall z\, q(z)} \Rightarrow \underbrace{\exists n\, p(n,x)}))$$

(2) Избираме квантор. (3) Коя е ф-лата на избрания квантор?

(4) Коя е следващата ф-ла по големина?

$$(\underbrace{\neg\forall t\, p(t,y)}_{да} \Rightarrow \underbrace{\neg\exists u\, q(u)}_{да}) \vee \neg((\underbrace{\exists v\, p(v,x) \Rightarrow \forall w\, q(w)}_{да}) \,\&\, (\underbrace{\forall z\, q(z) \Rightarrow \underbrace{\exists n\, p(n,x)}_{не}}_{да}))$$

(5) Ще се промени ли квантора?

$$(\exists t\, \neg p(t,y) \Rightarrow \forall u\, \neg q(u)) \vee \neg((\forall v\, p(v,x) \Rightarrow \forall w\, q(w)) \,\&\, (\exists z\, q(z) \Rightarrow \exists n\, p(n,x)))$$

$(\forall t(\neg p(t,y) \Rightarrow \forall u \neg q(u)) \vee \exists v \forall w(p(v,x) \Rightarrow \forall w\, q(w)) \,\&$

$\exists z \exists u(q(z) \Rightarrow \exists u\, p(u,x)))$

$\forall t \forall u(\neg p(t,y) \Rightarrow \neg q(u)) \vee \exists v \forall w((p(v,x) \Rightarrow q(w)) \,\&$

$\& \exists z \exists u(q(z) \Rightarrow p(u,x)))$

$\forall t \forall u((\neg p(t,y) \Rightarrow \neg q(u)) \vee \exists v \forall w \exists z \exists u((p(v,x) \Rightarrow q(w)) \,\&$

$\& (q(z) \Rightarrow p(u,x))))$

$\forall t \forall u((\neg p(t,y) \Rightarrow \neg q(u)) \vee \exists v \exists w \forall z \forall u \neg((p(v,x) \Rightarrow q(w)) \,\&$

$\& (q(z) \Rightarrow p(u,x))))$

$\forall t \forall u \exists v \exists w \forall z \forall u((\neg p(t,y) \Rightarrow \neg q(u)) \vee \neg((p(v,x) \Rightarrow q(w))$

$\& (q(z) \Rightarrow p(u,x)))$

28.05.2013г. Определимост, неопределимост

$\boxed{\text{зад}}$ контр. 2

$|A| = \mathbb{N}$

$\langle n,k \rangle \in p^A \longleftrightarrow$ броят на простите делители на n $\leq$ на броя на прост. дел на k

Да се док. че $\{0\}$ и $\{1\}$ са определимо и $\{2012\}$ е неопределимо

Реш: Прости делители на 0: всички прости числа

$\varphi_0[x] \leftrightharpoons \forall y P(y,x)$ (за вс. число y има по-малко делители от x)

$\Rightarrow \{0\}$ - опред.

1 не е просто число

1 няма нито един прост делител

$\varphi_1[x] \leftrightharpoons \forall y P(x,y)$ Така док. че $\{1\}$ е опред

2 има само 1 прост дел., 3 - също.

Всяко просто число има само 1 прост. дел.

Затова 2 и 3 не са различими в нашата структура - и двете имат точно 1 прост дел.

Нека
$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \notin \{2,3\} \\ 2, & \text{ако } x = 3 \\ 3, & \text{ако } x = 2 \end{cases}$$

Това е биекция защото:

$h(h(x)) = x \rightarrow h$ е биекция.

$\langle n,k \rangle \in p^A \longleftrightarrow \langle h(n), h(k) \rangle \in p^A$ - това е истина, защото $\forall n$ n и $h(n)$ имат равен брой прости делители

Следователно h е автоморфизъм.

Ако допуснем, че $\{2\}$ е определимо от с $\varphi_2[x]$ тогава

$n = 2 \longleftrightarrow n \in \{2\} \leftrightarrow A \models \varphi_2[2] \longleftrightarrow A \models \varphi_2[n] \longleftrightarrow A \models \varphi_2[h(n)]$

$\longleftrightarrow h(n) \in \{2\} \longleftrightarrow h(n) = 2$ Но това е противоречие защото по опред. $h(2) = 3$ не 2

Да намерим простите делители на 2012:

$$\begin{array}{r|l} 2012 & 2 \\ 1006 & 2 \\ 503 & \end{array}$$

503 е просто число, защото:
$23^2 > 503 \to$ простите числа ако има
про делители то те са от 2 до 23
2, 3, 5, 7, 11, 13... Не делят 503 $\Rightarrow$ 503 - просто

Следователно 2012 има точно два прости делителя - 2 и ~~2012~~ 503.

Кое друго число има точно 2 прости делителя? 6
Тогава можем да заместим 2012 с 6 за по-просто

$$h(x) = \begin{cases} x, \text{ ако } x \notin \{2012, 6\} \\ 6, \text{ ако } x = 2012 \\ 2012, \text{ ако } x = 6 \end{cases}$$

Ако допуснем, че $\{6\}$ е определимо с $\varphi_3\{x\}$, тогава $n = 2012 \leftrightarrow \ldots$ оттук е еквивалентен за предикатия $h(x)$ и док. на автоморфизъм

опред. неопред.

$\boxed{\text{зад}}$ $|A| = \mathbb{N}^2 \quad (\langle x', x'' \rangle \in \mathbb{N}^2)$

$\langle x, y \rangle, \langle z, t \rangle \in p^A \leftrightarrow x < z$

$\langle x, y \rangle \langle z, t \rangle \in q^A \leftrightarrow y \geq t$

Да се док. че са определими:

$\{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}^2\}$ $(x = \langle x', x'' \rangle)$ т.е. $\langle\langle -, - \rangle \langle -, - \rangle$

$\{\langle 1, 1 \rangle\}$

$\{0, 1\}$

Реш: P не е изпълнено за $\langle x, x \rangle$

$$\underset{\langle t', t'' \rangle \ \langle u', u'' \rangle}{\varphi[t,u]} = \neg \underbrace{p(t',u')}_{t'' \geq u'} \& \neg \underbrace{p(u',t')}_{u' \geq t'} \& q(t',u') \& q(u',t')$$

Доказахме, че $\{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}^2\}$ е определимо

За $\{\langle 1, 1 \rangle\}$:

($x \leq y$ ако: $\exists q$ т.че $x+q = y$)

$$\varphi\langle 1,1 \rangle [\underset{\langle x', x'' \rangle}{x}]$$

$0 < a$

$$a = 1 \iff 0 < a \ \& \ \forall b\,(0 < b \Rightarrow \overbrace{a < b \vee a = b}^{\text{екв. на } \neg(b<a)})$$

$$a > 0 \iff \exists b\,(b < a)$$

$$\varphi\langle 1,1 \rangle[x] = \exists y\, p(y,x) \ \& \ \forall y\,(\exists z\, p(z,y) \Rightarrow \neg p(y,x) \ \&$$

$$\& \ \exists y\, \neg q(y,x \ \& \ \forall y\, \exists z, \neg q(z,y) \Rightarrow q(y,x))$$

$$a = 1 \iff \underbrace{a \neq 0}_{\exists y:\ \neg b \geq a} \ \& \ \forall b\,(b \neq 0 \Rightarrow a \leq b)$$

Доказахме, че $\{\langle 1, 1 \rangle\}$ е определимо

За $\{\langle 0, 1 \rangle\}$

$$\varphi_{\langle 0,1 \rangle}[x] = \neg \exists y\, p(y,x) \ \& \ \exists y\, \neg q(y,x) \ \& \ \forall y\,(\exists z\, \neg q(z,y) = q(y,x))$$

Без q не може да се определи $\{\langle 1,1\rangle\}$, защото не можем да кажем за вторите елементи на двойките. Автоморфизмът не може да промени първите ел. заради p, но без q не е ясно дали вторите ел. ще се променят.

$$h(\langle n,m\rangle)=\begin{cases}\langle n,m\rangle, \text{ ако } m\notin\{0,1\}\\ \langle n,0\rangle, \text{ ако } m=1\\ \langle n,1\rangle, \text{ ако } m=0\end{cases}$$

Това е автоморфизъм и е аналогично на това от предходната задача.

$h(\langle 1,1\rangle)=\langle 1,0\rangle$, значи $\{\langle 1,1\rangle\}$ не е определимо

По-подробно:

$\langle n,m\rangle=\langle 1,1\rangle \longleftrightarrow A\models \varphi_{\langle 1,1\rangle}[\langle n,m\rangle] \longleftrightarrow A\models \varphi_{\langle 1,1\rangle}(h\langle n,m\rangle)$ (-)

$\longleftrightarrow h(\langle n,m\rangle)=\langle 1,1\rangle$

За да докажем, че нещо не е определимо то измисляме някакъв автоморфизъм който не запазва множ.

изпълнимост

$\boxed{\text{Зад}}$ (давана миналия семестър)

Да се докаже, че множ. от следните формули е изпълнимо:

(*) $\forall x\forall y\forall z\forall t(x\neq y \& x\neq z \& x\neq t \& y\neq z \& y\neq t \Rightarrow z=t)$

(1) $\forall x \exists y\, p(x,y)$

(2) $\exists x \exists y\, p(x,y)$ (тази ф-ла се включва в (1) затова е излишна)

(3) $\exists x \exists y (\neg p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x))$

(4) $\forall x\, \neg p(x,x)$

Ще превърнем (*) в дизюнкт:

формула: $A \Rightarrow B \models !A \vee B$

$\neg(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \models \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$

$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \models \neg\varphi_1 \,\&\, \neg\varphi_2$

$\neg(x \neq y \,\&\, x \neq z \,\&\, \dots \,\&\, y \neq t) \vee z = t$

$\forall x \forall y \forall z \forall t\, (x = y \vee x = z \vee x = t \vee y = z \vee y = t \vee z = t)$

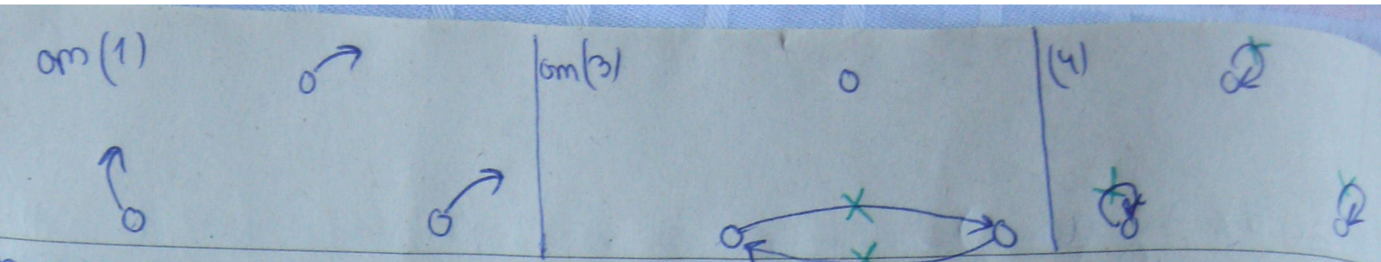
(←) (Т.е. коя е тази структура при която за всеки четири елемента точно два са еднакви? т.е. това е структура с три елемента най-много)

$|A| \leq 3$

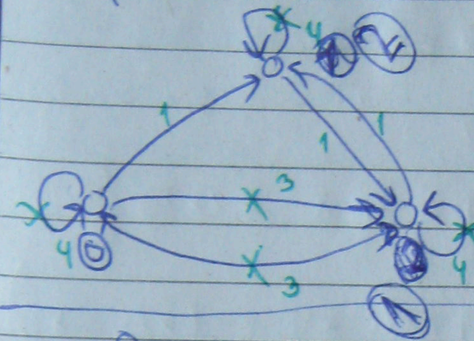
Тук целта е да се док. че не може да се стигне от тези формули до празното множ. (■).

Задачи за изпълнимост не се доказват с резолюция!

Нека ако е изпълнено $p(x,y)$, то съществува ребро от x до y (т.е $x \to y$)



В крайна сметка:



$|A| = \{0, 1, 2\}$

$p^A = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$

Изпълнимост

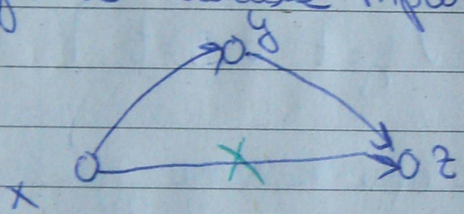
$\boxed{\text{зад}}$ 6 ① $\neg \forall x \forall y \forall z\, (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

② $\forall x \exists y\, (p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x) \,\&\, p(y,y))$

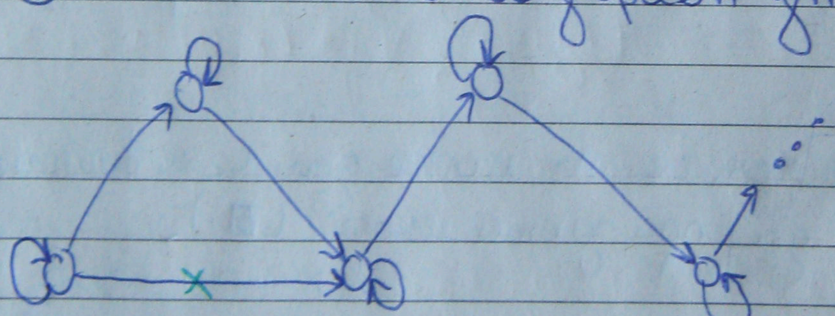
Реш:

① озн. че нямаме транзитивност ~~т.е ∃ ∀x∀y∀z +~~

(1) :



За ②: Ако имаме безкраен универсум:

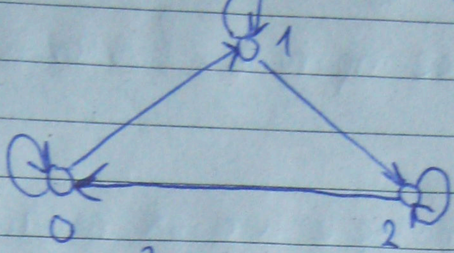


$\langle n, m\rangle \in p^A \longleftrightarrow n = m$ или $n+1 = m$

това е еквивалентно на:

$p^A = \{\langle n, m\rangle \mid n = m$ или $n+1 = m\}$

2) Ако имаме краен универсум:



$|A| = \{0, 1, 2\}$

$p^A = \{ \langle 0,0\rangle \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,0\rangle \}$

това е еквивалентно на:

$p^A = \{ \langle n, m\rangle \in |A|^2 \mid n = m$ или $n+1 = m (\mathrm{mod}\ 3) \}$

$\boxed{\text{зад}}$ $|A| = \mathbb{N}$ определимост

$$f^A(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ако } x \neq 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0 \end{cases}$$

Какво е определимо в тази структура?
∾ Всички едноелементни множества.

$\varphi_0[x] = x = f(x)$

$\varphi_1[x] = \underbrace{\neg x = f(x)}_{\neq 0} \& f(x) = f(f(x))$

4.06.2013 г. Парадокс на пияниците

Съществува човек, който ако се напие, всички хора ще се напият.

Зад $p(x) = $ („x получава 2") (същото ще е и с „x получава 6")

$\exists x(p(x) \Rightarrow \forall x\, p(x))$ (По принцип не е хубаво да правим
преименуваме ф. формули в които имаме $\exists$ и после
$\exists x(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ $\Rightarrow$, но в зад. за парадокса е така)

$\Gamma \models \varphi$ Г - аксиоми, φ - формула за доказване

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ - Вземаме отрицанието на това, което искаме да докажем и аксиомите и целта е да достигне до празното множество ■

0 Слагаме отрицанието
$\neg\varphi \rightleftharpoons \neg\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\,(p(y))$

1 Привеждаме в пренексен вид
1.1 Избираме квантор
1.2 Къде свършва формулата
1.3 Коя е най-малката по-голяма операция
1.4 Каква е операцията?

$\neg\varphi \rightleftharpoons \neg\exists x(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

1.5 Ще се промени ли квантора? ~ Не, защото кв. е от дясно на $\Rightarrow$, ако беше от ляво на $\Rightarrow$, щеше да се промени.

$\neg\varphi \equiv \neg\exists x \forall y (p(x) \Rightarrow p(y))$ - кванторът ще се промени, защото опер. е отр. 1

$\neg\varphi \equiv \forall x \exists y \neg(p(x) \Rightarrow p(y))$

Достигнахме до пренексния вид на формулата.

2 Скулемизация

Идеята е да се махнат всички $\exists$

$\exists x\, p(x) \rightsquigarrow p(c)$ слагаме нов символ

$\forall x \exists y\, p(x, y) \rightsquigarrow \forall x\, p(x, f(x))$ нов символ за ф-ла

$\exists x \forall y \exists z \forall t \forall u \exists w\, p(x, y, z, t, u, w)$

$x \rightsquigarrow c$

$z \rightsquigarrow f(y)$

$t \rightsquigarrow g(y)$

$w \rightsquigarrow h(y, u, v)$

$\forall y \forall u \forall v\, p(c, y, f(y), g(y), u, v, h(y, u, v))$ - Скулемова нормална форма.

$\neg\varphi \equiv \forall x \exists y \neg(p(x) \Rightarrow p(y))$ $\quad y = f(x)$

$\neg \forall x \neg(p(x) \Rightarrow p(f(x)))$ - Скулемова нормалната форма

$\neg(p(x) \Rightarrow p(f(x)))$

$\neg(\neg p(x) \vee p(f(x)))$

$\cancel{\neg\neg} p(x) \,\&\, \neg p(f(x))$

$p(x) \,\&\, \neg p(f(x))$

1) $\{p(x)\}$

2) $\{\neg p(f(x))\}$

3) От 1) $[x/f(x)]$ $\{p(f(x))\}$

4) От 2) и 3) ■

$\boxed{\text{зад}}$ Да се докаже, че хората пият много алкохол заради махмурлука.

<u>аксиома</u>: Който пие много алкохол получава махмурлук

пие(x, y): x пие много y

a(x) - x е алкохол

м(x) - x е махмурлук

има(x, y) - x получава y

Нашата аксиома придобива вида:

$\varphi = \forall x(\exists y(\text{а}(y) \,\&\, \text{пие}(x,y)) \Rightarrow \exists y(\text{м}(y) \,\&\, \text{има}(x,y)))$

Да се докаже:

Ако нямаме махмурлук, никой не би пил много алкохол.

Преведено в нашите означения това е:

$\psi = \neg \exists x\, \text{м}(x) \Rightarrow \neg \exists x \exists y(\text{а}(y) \,\&\, \text{има}(x,y))$

преименуваме променливите на φ и привежд. в ПНФ

φ

$\forall x(\exists y(\text{а}(y) \,\&\, \text{пие}(x,y)) \Rightarrow \exists z(\text{м}(z) \,\&\, \text{има}(x,z)))$

$\forall x \exists z(\exists y(\text{а}(y) \,\&\, \text{пие}(x,y)) \Rightarrow (\text{м}(z) \,\&\, \text{има}(x,z)))$

$\forall x \exists z \forall y((\text{а}(y) \,\&\, \text{пие}(x,y)) \Rightarrow (\text{м}(z) \,\&\, \text{има}(x,z)))$

Достигнахме до ПНФ

Привеждаме формулата в СНФ

$z \rightsquigarrow \text{бол}(x)$

$\forall x \forall y((\text{а}(y) \,\&\, \text{пие}(x,y)) \Rightarrow (\text{м}(\text{бол}(x)) \,\&\, \text{има}(x, \text{бол}(x))))$

!! Сколемовата нормална форма не е еквивалентна на първоначалната формула

Махаме импликацията

$\neg(a(y) \,\&\, \text{пие}(x,y)) \vee (\text{м}(\text{бол}(x)) \,\&\, \text{има}(x, \text{бол}(x))))$

$\neg a(y) \vee \neg \text{пие}(x,y) \vee (\text{м}(\text{бол}(x)) \,\&\, \text{има}(x, \text{бол}(x))))$

$\vee$ - дизюнкция - <u>умножение</u>

$\&$ - конюнкция - <u>събиране</u>

$(\neg a(y) \vee \neg \text{пие}(x,y) \vee \text{м}(\text{бол}(x))) \,\&\, (\neg a(y) \vee \neg \text{пие}(x,y) \vee \text{има}(x, \text{бол}$

1) $\{\neg a(y), \neg \text{пие}(x,y), \text{м}(\text{бол}(x))\}$

2) $\{\neg a(y), \neg \text{пие}(x,y), \text{има}(x, \text{бол}(x))\}$

Преобразуване ψ

$\psi: \neg \exists x\, \text{м}(x) \Rightarrow \neg \exists x\, \exists y\, (a(y) \,\&\, \text{има}(x,y))$

! Правим отрицание на формулата която искаме да док

$\neg(\forall x \neg \text{м}(x) \Rightarrow \forall z \forall y \neg (a(y) \,\&\, \text{има}(z,y)))$

$\neg(\forall z \forall y (\forall x \neg \text{м}(x) \Rightarrow \neg(a(y) \,\&\, \text{пие}(z,y)))$

$\neg(\forall z \forall y \exists x (\neg \text{м}(x) \Rightarrow \neg(a(y) \,\&\, \text{пие}(z,y)))$

$\exists z \exists y \forall x \neg(\neg \text{м}(x) \Rightarrow \neg(a(y) \,\&\, \text{пие}(z,y)))$

<u>Сколемизация:</u>

$z = \text{Н}$ (Ники) $y = \text{В}$ (Водка)

$\forall x \neg(\neg ц(x) \Rightarrow \neg(a(b) \,\&\, пие(H,b)))$

$\forall x \neg(\cancel{\neg\neg} ц(x) \vee \neg(a(b) \,\&\, пие(H,b)))$

$\forall x (\neg ц(x) \,\&\, (a(b) \,\&\, пие(H,b)))$

Резолвенти:

1) $\{\neg a(y), \neg пие(x,y), ц(бол(x))\}$

2) $\{\neg a(y), \neg пие(x,y), има(x, бол(x))\}$

3) $\{\neg ц(x)\}$

4) $\cancel{\{a/пие}$ $\{a(b)\}$

5) $\{пие(H,b)\}$

6) от 1) и 3) $[x/бол(x)]$ $\{\neg a(y), \neg пие(x,y)\}$

7) от 4) и 6) $[y/b]$ $\{\neg пие(x,b)\}$

8) от 5) и 7) $[x/H]$ ■

$\boxed{\text{Зад}}$ ① Някои пациенти уважават докторите

② Никой пациент не уважава шарлатанина.

③ Да се докаже, че докторите не са шарлатани.

д(x) - x е доктор

ш(x) - x е шарлатанин

п(x) - x е пациент

ув(x, y) - x уважава y

$\varphi_1: \exists x (п(x) \& \forall y (д(y) \Rightarrow ув(x, y)))$

$\varphi_2: \neg \exists x \exists y (п(x) \& ш(y) \& ув(x, y))$

$\psi: \forall x (д(x) \Rightarrow \neg ш(x)) \Rightarrow$ ф-лата която трябва да се док.

φ_1 0. Не се налага преименуване.

1. Привеждане в ПНФ

$\exists x (\underbrace{п(x) \& \forall y (док(y) \Rightarrow ув(x, y))})$

$\exists x \forall y (п(x) \& (док(y) \Rightarrow ув(x, y)))$

$\exists x \forall y (п(x) \& (\neg док(y) \vee ув(x, y)))$

Сколемизация

$x = c_1$

$\forall y (п(c_1) \& (\neg док(y) \vee ув(c_1, y)))$

1) $\{п(c_1)\}$

2) $\{\neg д(y) \vee ув(c_1, y)\}$

(φ₂) ¬∃x∃y(п(x) & ш(y) & уб(x,y))

∀x∀y¬(п(x) & ш(y) & уб(x,y))

∀x∀y ¬п(x) ∨ ¬ш(y) ∨ ¬уб(x,y)

~~3) {¬п(x)}~~ 3) {¬п(x) ∨ ¬ш(y) ∨ ¬уб(x,y)}

~~4) {¬ш(x)}~~

~~5) {¬уб(x,y)}~~

(ψ) Слагаме отр. (7) пред ψ и го преобразуваме

¬∀x(g(x) => ¬ш(x))

4) {g(r)}

∃x¬(¬g(x) ∨ ¬ш(x))

x = r 5) {ш(y)}

∃x (g(r) & ш(y))

Резолвенти:

1) {п(ц)}

2) {¬g(y) ∨ уб(ц,y)}

3) {¬п(x)}

4) {¬ш(x)}

5) {¬уб(x,y)}

6) от 1) и 3) [x/ц]

7) от 4) и 2) [y/r] {уб(ц,y)}

8) от 7) и 6) [y/r] {¬ш(r)}

9) 5) ...

Резолвенти:

1) {п(ц)}

2) {¬д(y) ∨ уб(ц, y)}

3) {¬п(x) ∨ ¬ш(y) ∨ ¬уб(x, y)}

4) {д(г)}

5) {ш(y)}

6) от 1) и 3) [x/ц] {¬ш(ц) ∨ ¬уб(ц, y)}

7) от 2) [y/г] и 4) {уб(ц, y)}

8) от 6) [y/г] и 7) {¬ш(г)}

9) от 5) и 8) ■

11.06.2013

Зад ① Митничарите обискират всеки преминаващ границата, без притежаващите дипломатически паспорт

② Някои трафиканти са преминавали границата и са били обискирани от трафиканти

③ Поне един трафикант е митничар или притежател на дипломатически паспорт

От ① и ② да се док. че следва ③

мит(x) – x е митничар
траф(x) – x е трафикант
дип(x) – x има дипломатически паспорт
п(x) – x преминава границата
об(x, y) – x обискира y

$\varphi_1 = \forall x(\text{п}(x) \,\&\, \neg\text{дип}(x) \Rightarrow \exists y(\text{мит}(y) \,\&\, \text{об}(y,x)))$

$\varphi_2 = \exists x(\text{траф}(x) \,\&\, \text{п}(x) \,\&\, \forall y(\text{об}(y,x) \Rightarrow \text{траф}(y)))$

$\varphi_3 = \exists x(\text{траф}(x) \,\&\, (\text{мит}(x) \vee \text{дип}(x)))$

φ_1 $\dashv\vDash \forall x \exists y(\neg(\text{п}(x) \,\&\, \neg\text{дип}(x)) \vee (\text{мит}(y) \,\&\, \text{об}(y,x)))$

$y \longrightarrow \delta(x)$

СНФ: $\forall x(\neg\text{п}(x) \vee \text{дип}(x) \vee (\text{мит}(\delta(x)) \,\&\, \text{об}(\delta(x), x)))$

$\neg\text{п}(x) \vee \text{дип}(x) \vee \text{мит}(\delta(x)) \,\&\, \neg\text{п}(x) \vee \text{дип}(x) \vee \text{об}(\delta(x), x)))$

φ_2 $\exists x(\text{траф}(x) \,\&\, \text{п}(x) \,\&\, \forall y(\text{об}(y,x) \Rightarrow \text{траф}(y)))$

$x \longrightarrow к$

$\forall y(\text{траф}(к) \,\&\, \text{п}(к) \,\&\, (\neg\text{об}(y,к) \vee \text{траф}(y))$

φ_3 $\neg\varphi_3 \dashv\vDash \neg\exists x(\text{траф}(x) \,\&\, (\text{мит}(x) \vee \text{дип}(x)))$

$\forall x \neg(\text{траф}(x) \,\&\, (\text{мит}(x) \vee \text{дип}(x)))$

$\forall x(\neg\text{траф}(x) \vee \neg(\text{мит}(x) \vee \text{дип}(x)))$

$\forall x(\neg\text{траф}(x) \vee (\neg\text{мит}(x) \,\&\, \neg\text{дип}(x)))$

$\forall x((\neg\text{траф}(x) \vee \neg\text{мит}(x)) \,\&\, (\neg\text{траф}(x) \vee \neg\text{дип}(x)))$

Резолвенти:

1) {¬п(x), дит(x), шит(δ(x))}

2) {¬п(x), дит(x), об(δ(x), x)}

3) {траф(к)}

4) {п(к)}

5) {¬об(y,к), траф(y)}

6) {¬траф(x) ∨ ¬шит(x)}

7) {¬траф(x) ∨ ¬дит(x)}

8) от 3) и 6) [x/к] {¬шит(к)}

9) от 3) и 7) [x/к] {¬дит(к)}

10) от 4) и 1) [x/к] {{дит(к), шит(δ(к))}

11) от 4) и 2) [x/к] {дит(к), об(δ(к), к)}

За сега пропускаме 1) и 9) и също 2) и 9)

12) от 9) и 10) {шит(δ(к))}

13) от 9) и 11) {об(δ(к), к)}

14) от 5) ~~и 13)~~ [y/δ(к)] и 13) {траф(δ(к))}

15) от 6) $[x/\delta(k)]$ и 14) $\{\neg$ шит$(\delta(k))\}$

16) от 12) и 15) ∎

$\boxed{\text{зад}}$ писмен изп. 2012/2013 зимен семестър КН

Ако са зададени $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ да се док. че следва φ_4

$\varphi_1 = \exists z \forall x (\forall y\, p(f(x), y) \vee q(z, f(x)))$

$\varphi_2 = \exists z \forall y (q(y, f(f(y))) \Rightarrow \forall x\, p(x, f(z)))$

$\varphi_3 = \forall x \forall y (p(x, f(y)) \Rightarrow (p(f(y), x) \vee \neg \exists y \exists x\, p(x, y)))$

$\varphi_4 = \exists y (\exists x\, p(f(x), y) \,\&\, \exists\, p(y, x))$

$\varphi_1 \models\!\dashv \exists z \forall x \forall y (p(f(x), y) \vee q(z, f(x)))$

$z \rightsquigarrow c \quad \exists z \forall x \forall y (p f(x), y) \vee q(c, f(x))$

$\varphi_2 \models\!\dashv \forall y \forall x (\neg q(y, f(f(y))) \vee p(x, f(z)))$

$z \rightsquigarrow a$

$\neg q(y, f(f(y))) \vee p(x, f(a))$

$\varphi_3 \; \forall x \forall y (p(x, f(y)) \Rightarrow (p(f(y), x) \vee \forall z \forall t \neg p(t, z)))$

$\forall x \forall y \forall z \forall t (\neg p(x, f(y)) \vee p(f(x), x) \vee \neg p(t, z))$

$\neg\varphi_4$ $\neg \exists y \exists x \exists z (p(f(x), y) \& p(y, z))$

$\forall y \forall x \forall z (\neg p(f(x), y) \vee \neg p(y, z))$

1) $\{p(f(x), y), q(c, f(x))\}$

2) $\{\neg q(y, f(f(y))), p(x, f(a))\}$

3) ~~$\{\neg p(x, f(y)), p(f(y), x), \neg p(t, z)\}$~~

4) $\{\neg p(f(x), y), \neg p(y, z)\}$

Повечето дизюнкти са с дължина 2. Ако имаме дизюнкти с дължина n и k, то новия дизюнкт от тях ще има дължина n+k−2 при нас това пак е 2. Затова така трябва да ги преобразуваме, че да станат два еднакви.

5) от 3) $[t/x, z/f(x)]$

6) от 4) $[y/f(x), z/f(x)]$

7) от 6) и 1) $[y/f(x)]$ $\{q(c, f(x))\}$

8) от 2) $[x/f(a)]$ и 6) $[x/a]$ $\{\neg q(y, f(f(y)))\}$

5) е подмножество на 3), затова махаме 3)

9) от 5) $[x/f(y)]$ и 6) $[x/y]$ $\{\neg p(f(y), f(y))\}$ – вече го има в 6, не върши работа

10) от 8) [y/b] и 7) [x/f(y)] ■

Консултация по Логическо Програмиране:
6.07.2013 14:00 часа 02 стая