25.02.2013 г. (3 гр.) СЕП - упр.

Стела Николова - замества 1 месец

① (Обикновена) индукция над $N = \{0, 1, 2, \dots\}$

Принцип на обикновената индукция (ПОИ)

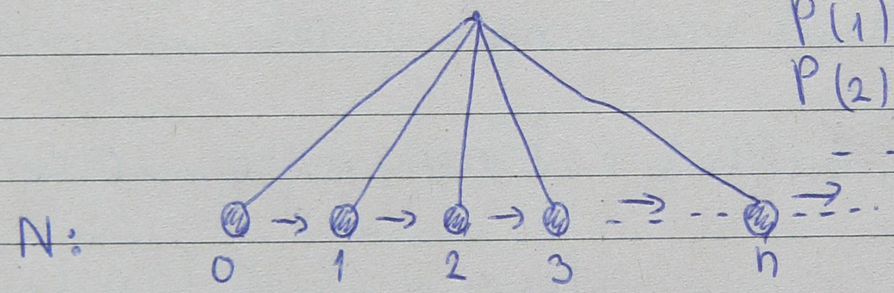
Нека P е свойство над N, такова, че:

1) $P(0)$ (база)

2) $\underbrace{P(n)}_{\text{индуктивна хипотеза}} \Rightarrow P(n+1)$ за $\forall n \in N$ (това е индуктивна стъпка)

Тогава за $\forall n \; P(n)$

$P(0) \Rightarrow P(1)$
$P(1) \Rightarrow P(2)$
$P(2) \Rightarrow P(3)$
- - - - - - - -



$$\text{ПОИ: } \boxed{\frac{P(0), \; \forall n \; P(n) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n \; P(n)}}$$

Принцип пълната (възвратната) индукция (ППИ):

Нека P е свойство над $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ такова, че:

1) $P(0)$

2) За произволно $n \in N$, ако всяко от числата $0, 1, \dots, n$ има св-вото P и $n+1$ има св-вото P

Тогава за всяко $n \in N$ е вярно $P(n)$

ППИ:

$$\frac{P(0),\ \forall n\,(P(0)\ \&\ P(1)\ \&\ \dots\ \&\ P(n)) \Rightarrow P(n+1)}{\forall n\ P(n)}$$

1 зад Да се док. че за $\forall$ ест. число $n \geq 2$ се разлага на произведение от прости множители

$(12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 ;\quad 7 = 7)$

Док: Нека $P(n) \overset{def}{\Leftrightarrow} n$ се разлага

База: $P(2)$, т.е. 2 се разлага

Инд. хипотеза: Нека $n \geq 2$ - произволно и нека $P(2), P(3), \dots, P(n)$ е вярно, т.е $2, 3, \dots, n$ се разлагат

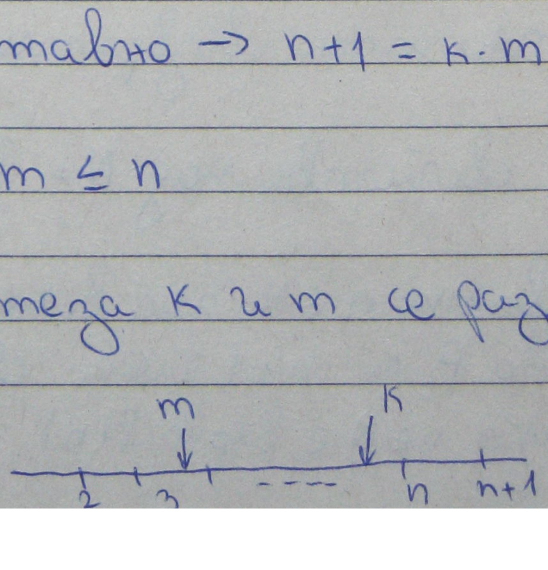
Защо $n+1$ се разлагат?

1 сл.) $n+1$ - просто $\Rightarrow n+1 = n+1$ - прост множител.

2 сл.) Ако $n+1$ - съставно $\rightarrow n+1 = k \cdot m$, където

$2 \leq k \leq n \qquad 2 \leq m \leq n$

Но по инд. хипотеза k и m се разлагат $\Rightarrow$ $n+1$ се разлага



факт: $\boxed{\text{ПОИ} \Leftrightarrow \text{ППИ}}$

Решаваме същата зад с ПОИ като вземем

по-силно свойство:

$Q(n) \Leftrightarrow P(2) \,\&\, P(3) \,\&\, \cdots \,\&\, P(n)$

Всъщност $\forall n\, Q(n) \Leftrightarrow \forall n\, P(n)$

ППИ $\Leftrightarrow$

$$(3)\quad \boxed{\frac{\forall n \quad (\forall k < n \quad P(k) \Rightarrow P(n))}{\forall n \quad P(n)}}$$

Базата $P(0)$ е включена в (3) в случая:

$n = 0$: за $\forall k < 0 \quad P(k) \Rightarrow P(0)$ - Това е тривиално вярно

q	p	q → p
f	f	t
f	t	t
t	f	f
t	t	t

② Фундирани наредби; Фундирани множества

Нека X е множество

$\leq$ е частична наредба в X ако:

1) $x \leq x$

2) $x \leq y$ & $y \leq x \Rightarrow x = y$

3) $x \leq y$ & $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Казваме, че $<$ е строга наредба в X ако:

1) $\neg(x < x)$ - антирефлексивност за $\forall x \in X$

2) за $\forall x\ \forall y\ \forall z$ $x < y$ и $y < z \Rightarrow x < z$ - транзитив.

3) за $\forall x\ \forall y$ $x < y \Rightarrow \neg(y < x)$ - силна анти-симетричност (асиметричност)

$\boxed{\text{2 зад}}$ За строгата наредба $<$ докажете че

1) + 2) $\Rightarrow$ 3)

<u>Док:</u> Нека 1) и 2) - (т.е. антирефл. и транзит.)

Да допуснем, че $\exists x, y : x < y$ и $y < x$

По транзитивност $x < x$ - това е противоречие на антирефлексивността.

Една наредба е фундирана, ако в нея няма крайни спускания.

Казваме, че строгата наредба $<$ е фундирана (well-founded), ако $\neg\exists\, x_0, x_1, \dots \in X : x_0 > x_1 > x_2 \dots$

(т.е. в X няма безкрайни спускания)

Множество X, в което има фундирана наредба се нарича фундирано множество.

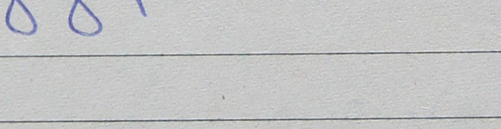
Пр. за фундирани множ.:

$\boxed{\text{3 зад:}}$ Кои от изброените множ. са фундирани?

а) $\mathbb{N}$ и $<$ - очевидно да

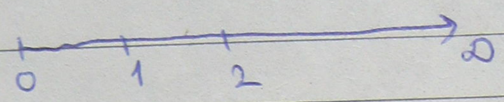
б) $\mathbb{Z}$ (цели) и $>$ $\quad 0 > -1 > -2 \dots$ - очевидно не е

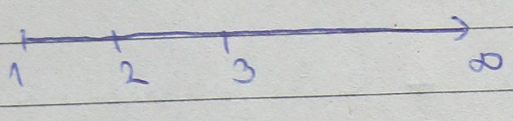
в) $\mathbb{Q}^+$ и $<$



$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \dots$ очевидно не е г) $2^N = \{ M \mid M \subseteq N \}$ - не е фундирано (ест. числа)

$A \subsetneq B$ - строго включване ($A \subset B$)

N_0 

N_1 

N_2 

- - - - - - - - - - - - - - -

д) лексикографска наредба

Нека $X = N \times N$ и

лексикографска наредба в X:

$(x, y) \underset{\text{преди}}{<} (x', y') \overset{\text{if}}{\Longleftrightarrow} x < x'$ или $x = x'$ и $y < y'$

$N \times N$ $(0,0) < (0,1) < (0,2) \ldots < (1,0) < (1,1) < \ldots$

$< (2,0) < \ldots$

Тази релация е фундирана

4 зад Докажете, че лексикографската наредба е фундирана:

Д-во: Да допуснем, че $(x_0, y_0) > (x_1, y_1) > (x_2, y_2) > \dots$

Пример: $(x_0, y_0) = (3, 4)$

$(3, 4) > \dots > (2, y_2) > \dots$

y_2 е крайно число => наредбата е фундирана

3 Принцип на структурна индукция.

Нека $(X, <)$ е фундирано множество.

Нека $P(x)$ е свойство в X такова, че за $\forall x \in X$ е

изпълнено: $\forall y < x \; P(y) \Rightarrow P(x)$ (*)

Тогава за $\forall x \in X \; P(x)$

Док: Да допуснем, че $\exists x_0 : \neg P(x_0)$

От (*) => $\exists x_1 < x_0 : \neg P(x_1)$

(иначе ако $\forall x_1 < x_0 \; P(x_1) \overset{(*)}{\Rightarrow} P(x_0)$)

$x_0 > x_1 > x_2 > x_3 \dots$

$\neg P(x_0), \neg P(x_1), \neg P(x_2), \neg P(x_3) \dots$ $\overset{\circ}{X}$

Това е принцип за индукция за произволно множ.

$\boxed{5 \text{ зад}}$ (функция на Акерман)

Нека $F : N \times N \to N$ удовлетворява условието:

$$(**) \begin{cases} F(0, y) = y+1 \\ F(x+1, 0) = F(x, 1) \\ F(x+1, y+1) = F(x, \overbrace{F(x+1, y)}^{z}) \end{cases}$$

Докажете, че $\exists!$ F за която усл. $(**)$ е изпълнено

<u>Док:</u> Единственост:

Нека F_1 и F_2 удовл. $(**)$. Ще видим че $F_1 = F_2$

т.е. $\forall (x, y) \in \underbrace{N \times N}_{X} : \underbrace{F_1(x, y) = F_2(x, y)}_{P(x, y)}$

$\forall (x, y) \in X : P(x, y)$

$$\frac{\forall (x, y) (\forall (x', y') \prec (x, y) \; P(x', y') \Rightarrow P(x, y))}{\forall (x, y) \quad P(x, y}$$

$(x, 1) \prec (x+1, 0)$

$(x+1, y) \prec (x+1, y+1)$

$(x+z) \prec (x+1, y+1)$

Нека $(x, y) \in N \times N$ и нека $\forall (x', y') < (x, y)\ P(x', y')$

т.е $F_1(x', y') = F_2(x', y')$

Да видим, че $P(x, y)$, т.е $F_1(x, y) = F_2(x, y)$

1 сл) $x = 0$ $F_1(0, y) \overset{(**)}{=} y+1 = F_2(0, y)$

2 сл.) $x > 0$, $y = 0$ $F_1(x, 0) \overset{(**)}{=} F_1(x-1, 1)$ ~~по инд. хипот.~~

и $F_2(x, 0) = F_2(x-1, 1)$ $F_1(x-1, 1) = F_2(x-1, 1)$
по индукт. хипотеза

3 сл.) $x > 0$, $y > 0$ $F_1(x, y) \overset{(**)}{=} F_1(x-1, F_1(x, y-1))$
по инд. хип.

$F_2(x, y) = F_2(x-1, \underbrace{F_2(x, y-1)}_{z})$

за $(x-1, z)$

$\boxed{6 \text{ зад}}$ 91 - функция на Маккарти

Нека $F: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ удовлетворява условието

$$F(x) = \begin{cases} x - 10, & x > 100 \\ F(F(x+11)), & x \leq 100 \end{cases}$$

Да се докаже че $F(x) = G(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{ако } x > 100 \\ 91, & \text{иначе} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{Z}\ (F(x) = G(x))$

$F(100) = F(111) = F(101) = 91$

$(x, \angle)$ не е фунд.

Разгл. $x \angle y \iff x > y$ & $x \leq 100$

$x \not\angle x$, но или $x > 100$

или $x \geq 100$

$x \not\geq x$

$x \angle y$ $\quad y \angle z$ $\quad ?\ x \angle z$ $\quad$ V

$x \leq 100$ $\quad y \leq 100$

$\underbrace{y \angle x \quad z \angle y}_{z \angle x}$

• $(z, \angle)$ - частично наредено

Ако $z_0 > z_1 > z_2 > \dots > z_k > \dots$

$z_0 \angle z_1 \angle \dots \angle z_k \angle \dots \leq 100$

Следователно $(z, \angle)$ е фундирано

Нека $\forall y \angle x \quad G(y) = F(y)$

$?\ F(x) = G(x)$

① $x > 100 \quad F(x) = G(x) = x - 10$

② $x = 100 \quad F(100) = F(F(111)) = F(101) = 91 = G(x)$

③ $x \angle 100$

а) $x+11 > 100$ т.е. $89 < x < 100$

$F(x) = F(F(x+11)) = F(x+1)$

$x+1 > x$

$x+1 \leq 100$

$x < 100$

$z < y \leftrightarrow y < z \; \& \; z \leq 100$

$x+1 \quad x \quad x \quad x+1$

$x+1 > x$ и $x+1 \leq 100$

$x+1 < x$ по инд предполож.

$F(x+1) = G(x+1) = 91 = G(x)$

$F(x) \qquad x+1 \leq 100$

б) $x+11 \leq 100$

$x \leq 89$

$F(x) = F(F(x+11)) =$

$x+11 > x$	$x+11 < x$
$x+11 < 100$	По индукц. предполож.

$F(x) = F(F(x+11)) = F(91) = G(91) = 91 = G(x)$

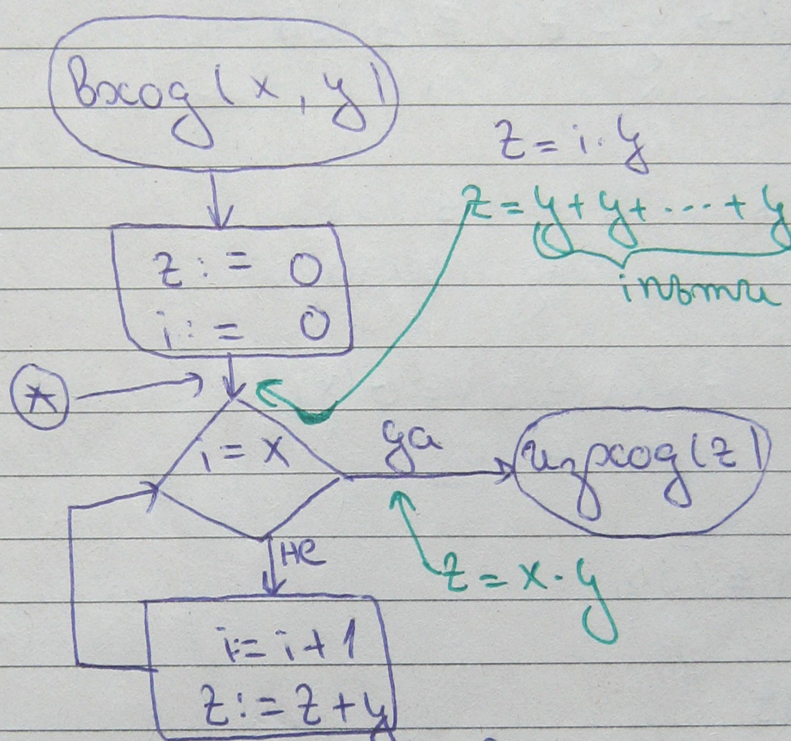
$91 < X$	$91 \leq 100$
	$91 > x$

04.03.2013 г. Упражнение №2

Верификация на Програми

Верификация на блок-схеми с един цикъл

1 зад



$z = iy \;\&\; i = x \Rightarrow z = xy$ — за $\forall x, y \in \mathbb{R}$

При $x = 2,5$ } Не излизаме от цикъла!
$x = -2$

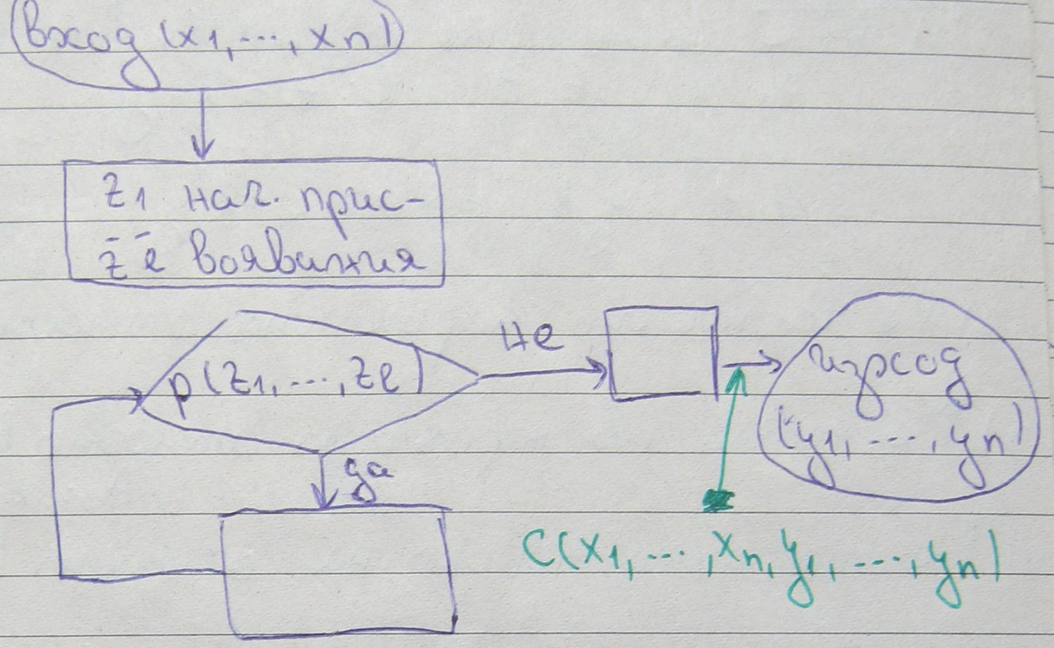
Коректност:

1) Входно условие (предусловие)

<u>Деф</u> <u>входно условие</u>: $A(x_1, \ldots, x_n)$ — връзка изисква не за входа, при което може да говорим за коректност

<u>Изходно условие</u>: $C(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ — условие, което искаме да е изпълнено накрая

типичен : $y = f(x_1, \dots, x_n)$ входно-изходна релация в пр. $P \subseteq X \cdot Y$



Деф: Нека P - произволна програма, а A и C са съответно входно и изходно условие за нея. Казваме, че тази програма P е <u>частично коректна</u> относно дадените A и C, ако $\forall$ вход $\bar{x}$, удовлетворяващ входното условие, е вярно, че ако P завърши, то на изхода ще е вярно изходното условие C.

Казваме, че P е тотално коректна относно дадените A и C ако:

1) P е частично коректна относно A и C

2) P завършва за всеки вход $\bar{x}$, удовлетворяващ A. (изискване за тоталност)

A и C - спецификация на програмата

$A(\bar{x}) \longrightarrow \boxed{P} \longrightarrow C(\bar{x}, \bar{y})$

Няма универсална програма доказват. зад е алгоритмично нерешима

Примери:

1) P е частично коректна относно

$A: x, y \in \mathbb{Z} \quad C: z = x \cdot y$

$z = i \cdot y \ \& \ i = x \Rightarrow z = x \cdot y$

2) P е частично коректна относно $A: x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}$

3) P е тотално коректна относно ~~$A: z \in \mathbb{Z}, C: z = x \cdot y$~~
$A: x \in \mathbb{N}$

4) P е тотално коректна относно $A: z \in \mathbb{Z}, C: z = x \cdot y$

Най-слабо предусловие (wpc wekest pre-condition е най-добро.

$\boxed{\text{1 зад}}$ Да докажем, че $b = (*)$ е изпълнено
$z = iy$ ~~[illegible]~~

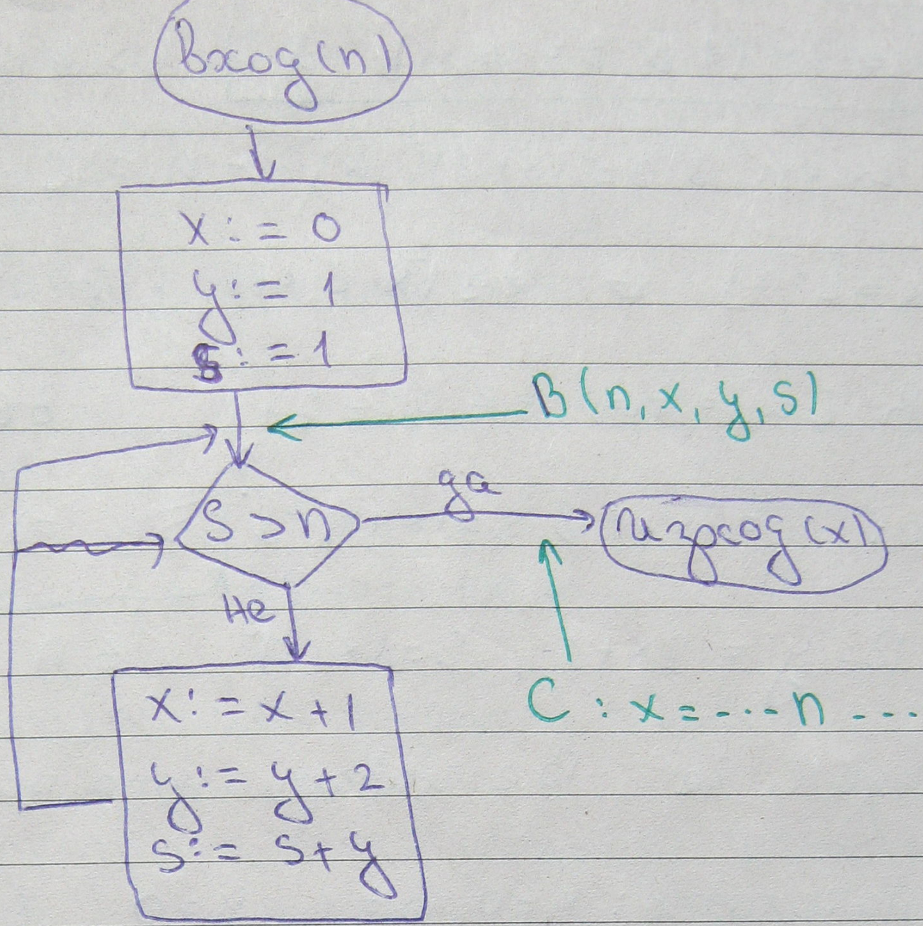
Разсъждаваме с индукция:

База: $i = 0 \quad z = 0 = 0 \cdot y$

Инд. предп. Нека $z = iy \quad z_{н} = z + y = iy + y = (i+1)y = i_{н}y$

$z_{н} = i_{н} y$

2 зад



Докажете, че програмата е тотално коректна относно вх. усл. A: $n \in \mathbb{N}$; изх. усл: C: x = ...n...

Доказателство:

Търсим B(n, x, y, s):

– B е инварианта на цикъла (т.е. поддържа се при всяко минаване през *)

– B & s > n => C

x	y	s
0	1	1
1	3	4
2	5	9
3	7	16
...	...	...
x	(2x+1)	$(x+1)^2$

$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2x+1) = \frac{1 + (2x+1)(x}{2}$

$= (x+1)^2$

$\boxed{B:\ y = 2x+1\ \&\ s = (x+1)^2\ \&\ ?}$ $s > n$

$y = 2x+1\ \&\ s=(x+1)^2\ \&\ \overline{s > n} \Rightarrow C:\ x = [\sqrt{n}] \Leftrightarrow$

$C:\ x = [\sqrt{n}] \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x} < x+1 \quad ()^2 \Leftrightarrow x^2 \leq n < (x+1)^2$

$a \in \mathbb{R}\ [a] = z \Leftrightarrow z \leq a \leq z+1 \qquad z \in \mathbb{Z}$

или $B:\ y = 2x+1\ \&\ s=(x+1)^2\ \&\ \overset{?}{\overline{s > n}} \Rightarrow \boxed{x^2 \leq n}\ \&\ n<(x+1)^2$ ✓

Нека $B:\ y = 2x+1,\ s=(x+1)^2,\ x^2 \leq n$

Да видим, че B е инварианта на цикъла

1) В началото: $x=0,\ s=1,\ y=0$

и B: $1 = 2\cdot 0+1$ ✓

$1 = (0+1)^2$ ✓

$0 \leq n$ ✓ $\qquad y' = 2x'+1\ s' = (x'+1)^2, (x')^2 \leq n$

$B(x', y', s', n)$

2) Да допуснем, че B е вярно при някаква операция

$$\underbrace{y=2x+1,\ s=(x+1)^2,\ x^2 \leq n}_{B(x,y,s,n)}\ \&\ s \leq n \left.\begin{array}{l}\&\ x' = x+1 \\ y' = y+2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(*) \Leftrightarrow y+2 = 2(x+1)+1,\ s+y+2 \underset{\Updownarrow}{=} (x+1+1)^2,\ (x')^2 \leq n$

$y+2 = 2x+3 \qquad (x+1)^2+2x+1+2 = (x+2)^2$ ✓

$y = 2x+1$ ✓

$(x')^2 \leq n \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq n \Leftrightarrow s \geq n$ ✓

$$\underbrace{y = 2x + 1,\ s = (x+1)^2,\ x^2 \le n}_{B(x,\,y,\,s,\,n)},\ \&\ s > n \Rightarrow x^2 \le n \text{ и } n < (x+1)^2$$

11.03.2013 Упражнение № 3

Оценяване:

2 домашни: 2 x 50 т = 100 т.

1 контролно (писмен изпит) = 200 т.

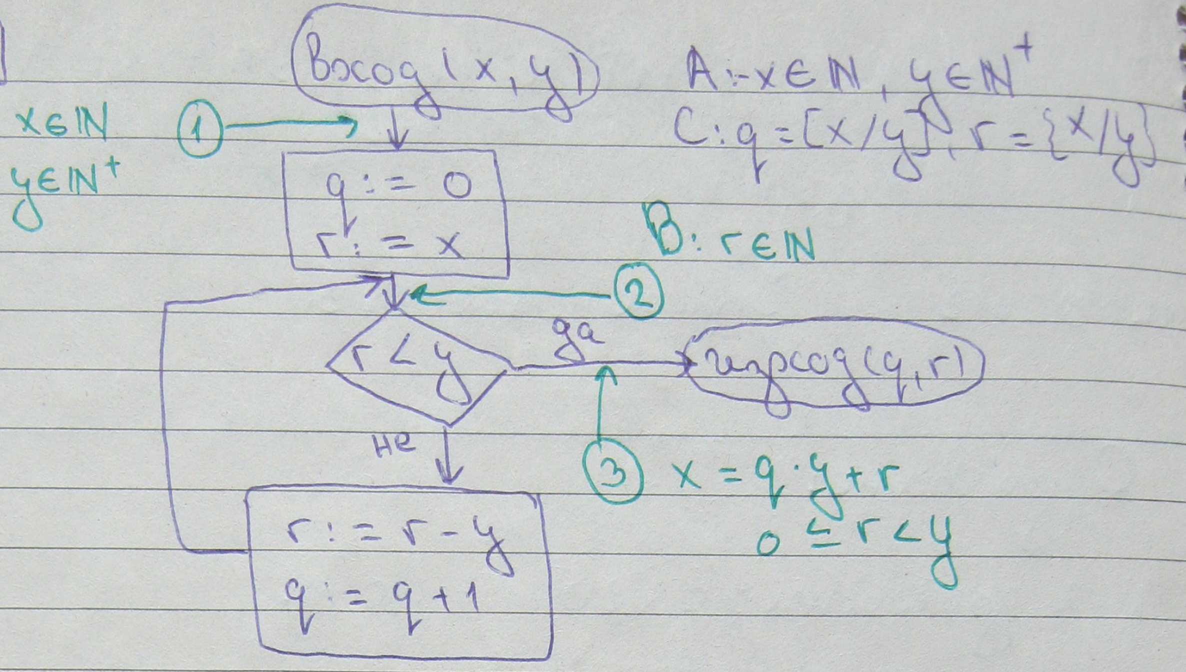
устен изпит: 250 т - минимум 100 т. за минав.

Общо: 550 т.

При изкарани от 250 - 300 т → тройка

Домашно: 13 стр / 11 зад
25 стр. / 6 зад
25 стр. / 8 в, г зад

21/2а



Това е програма, която намира частното и остатъка при делене на 2 числа

<u>Входно условие</u>: A: $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}^+$

<u>Изходно условие</u>: C: $x = q \cdot y + r$ & $0 \le r < y$

Докажете тотална коректност на програмата съответно на дадените спецификации

<u>Доказателство</u>:

За частична коректност:

Търсим подходящо условие B, което е вярно при всяко минаване през точката 2 и от него следва C

Което означава за усл. B да са изпълнени:

а) 1 → 2 да се верифицира т.е ако в 1 е вярно A, то в 2 да е вярно B б) ② => ② Ако в т.② е изпълнено B, то при следващото попадане в ② B отново е вярно

в) ② => ③ Ако в т.② е вярно B и спрем в т.③, то там е изпълнено C

Защо ако сме намерили такова B се доказва частична коректност на P относно A и C.

Нека за някой вход (x, y), удовл. A, програмата е завършила

$$① \Rightarrow \underbrace{② \Rightarrow ② \Rightarrow \dots \Rightarrow ②}_{k \geq 1} \Rightarrow ③$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & \Rightarrow & B & \Rightarrow & B & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & B & \Rightarrow & C \\ а) & & б) & & б) & & & & б) & & в) \end{array}$$

Накрая в т.③ C е изпълнено => P е частично коректна

Търсим такова усл. B:

$$B \,\&\, r < y \Rightarrow x = q \cdot y + r,\ 0 \leq r < y$$

Хипотеза:

Нека B: $\boxed{x = q \cdot y + r \,\&\, 0 \leq r}$

Да видим дали а) и б) са верни:

а) ① => ② $\underset{=0}{q} \cdot y + \underset{=x}{r}$ ✓ $0 \leq \underset{=x}{r}$ -> да защото $x \in \mathbb{N}$ (от A)

б) ② $\Rightarrow$ ② $\square$

Нека $x = q \cdot y + r$ & $r \geq 0$ и $r \geq y$ и $r' = r - y$ $q' = q+1$

$B(x,y,q,r)$ & $r \geq y \Rightarrow B(x,y,q+1,r-y)$

Да видим, че $x = q' \cdot y + r'$ и $r' \geq 0$

$\Leftrightarrow r - y \geq 0 \Leftrightarrow r \geq y$ ✓

$\Updownarrow$

$x = (q+1)y + r - y \Leftrightarrow x = qy + r$

За завършване:

Нека тръгнем с $(x,y): x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}^+$

① $\rightarrow$ ②

A B: $r = x \in \mathbb{N}^+$

② $\rightarrow$ ② $r' = \underset{\in \mathbb{N}}{r} - \underset{\in \mathbb{N}}{y} \in \mathbb{N}$

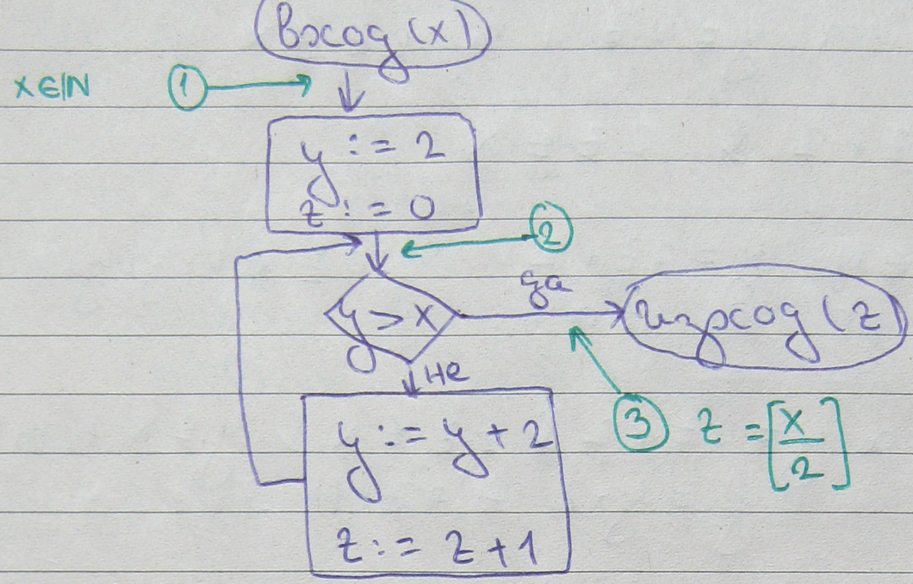
Ако допуснем, че за някое x, y: $A(x,y)$ е вярно,
P е зациклила, то:

r_n - текуща стойност на r при n-та итерация.

$r_0 = x, r_1, r_2, \ldots$ е намаляваща $r_{n+1} = r_n - y < r_n$ $(y \in \mathbb{N}^+)$

$x = r_0 > r_1 > r_2 > \ldots$ X - Това е противоречие.

2 зад 25 / 8 б)



Докажете тотална коректност относно усл.:

A: $x \in \mathbb{N}$

C: $z = \left[\frac{x}{2}\right]$

Доказателство:

y	z
2	0
4	1
6	2
2z+2	z

Частична коректност:

Търсим инварианта B:

B: $y = 2z + 2$ & ?

$z = \left[\frac{x}{2}\right] \Rightarrow z \le \frac{x}{2}$ и $z + 1 > \frac{x}{2}$

$z = 0 \quad 2z + 2 = 2 = y$

$2z \le x$ и $\underbrace{2z + 2 > x}_{\text{усл. C}}$

$y = 2z + 2$ & ? & $y > x \Rightarrow 2z \le x$ и $\underbrace{2z+2}_{y} > x$

$y = 2z + 2 \quad 2z + 2 > x$

Пред ст-ст $y = 2z$ и $2z \le x$

В: $y = 2z + 2 \ \& \ 2z \le x$

(1) => (2) $x \in \mathbb{N}$, $\underbrace{y}_{=2} = 2\underbrace{z}_{=0} + 2$ ✓ $2 \cdot 0 \le x$ ✓, защото $x \in \mathbb{N}$

(2) => (2) Нека $y = 2z + 2 \ \& \ 2z \le x \ \& \ y \le x$ (от ∠γ)

$y' = y + 2 \quad z' = z + 1$

? => $y' = 2z' + 2$ и $2z' \le x$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$y + 2 = 2z + 2 + 2 \qquad 2z + 2 \le x$

$y = 2z + 2$ ✓ $\qquad y \le x$ ✓

(2) => (3) - ясно

За завършване:

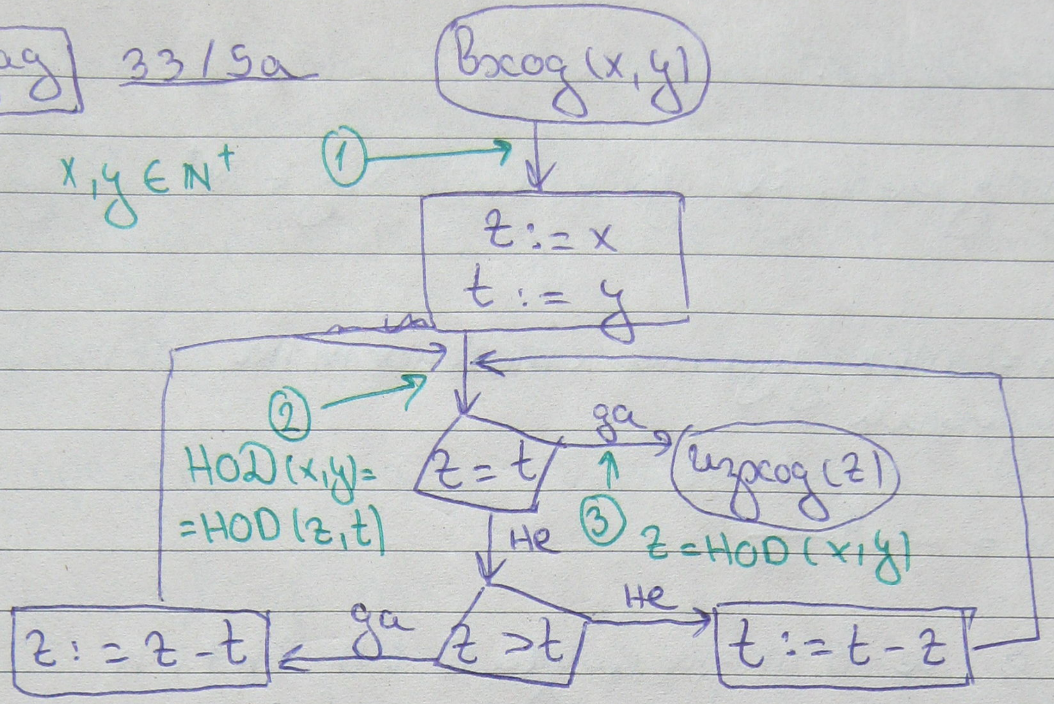
Ако допуснем, че P зацикля за някое x, то имаме безкрайна редица $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$

y_n - текуща стойност на y при прем. през т. (2)

$y_0 = x$, $y_{n+1} = y_n + 2 > y_n$

$\{y_n\}$ е растяща и $y_n \le x$ за $\forall x$ ↯ - противоречие

$\boxed{3 \text{ зад}}$ 33/5а



A: $x, y \in \mathbb{N}^+$

C: $z = НОД(x,y)$

НОД	x	y
	18	12
	6	12
	6	6 $\Rightarrow НОД(12,18) = 6$

$НОД(z,t) = НОД(z-t, t),\ z \geq t$

$НОД(z,z) = z.$

В т.② $НОД(z,t) = const = НОД(x,y)$

① ⇒ ② – Очевидно

② ⇒ ③

~~Ако~~ $НОД(z,t) = НОД(x,y)$ и $z = t$

(*) тогава $НОД(z,t) = z = НОД(x,y)$

② $\overset{да}{\Rightarrow}$ ②

② $\overset{не}{\Rightarrow}$ ② → аналогично с ② $\overset{да}{\Rightarrow}$ ②

② ⇒ ③ (*)

② $\overset{да}{\Rightarrow}$ ② $\quad НОД(x,y) = НОД(z,t)$ и $z > t,\ z' = z - t \overset{?}{\Rightarrow}$

$НОД(z-t, t) = НОД(x,y)$ → да (от (*))

За завършване:

Да допуснем, че за някои $x, y \in \mathbb{N}^+$ P зацикля.

Нека z_n = текущата стойност на n-то вик-зане в цикъла

Нека t_n = —"—

Ясно е, че в този случай $\forall n\ z_n \neq t_n$

? $z_n, t_n \in \mathbb{N}^+$

$\{z_n\}$ и $\{t_n\}$ са намаляващи, но не строго

<u>I начин:</u> Доказваме, че $u_n = z_n + t_n$ е строго намаляваща и $u_n \in \mathbb{N}^+$

① Защо z_n и $t_n \in \mathbb{N}^+$:

$$z_0 = x \in \mathbb{N}^+ (A) \quad z_{n+1} = \begin{cases} \overset{\in \mathbb{N}^+}{z_n} - \overset{\in \mathbb{N}^+}{t_n}, & z_n > t_n \\ z_n, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$t_0 = y \in \mathbb{N}^+ (A)$$

② $u_n = z_n + t_n \in \mathbb{N}^+$

$$= z_n < z_n + t_n = \overset{\in \mathbb{N}^+}{u_n}$$

③ $u_{n+1} < u_n$

$u_{n+1} = z_{n+1} + t_{n+1} = z_n - t_n + t_n =$

$u_{n+1} = z_{n+1} - t_{n+1} = t_n - z_n + z_n = \dots$

II начин: $\{(z_n, t_n)\}$ е лексикографски строго намаляваща

С индукция по n док. че $z_n \in \mathbb{N}^+$, $t_n \in \mathbb{N}^+$:

База: $n = 0$ $z_0 = x$, $t_0 = y$ ✓ (от А)

Инд. предпол: Нека за някое n $z_n \in \mathbb{N}^+$, $t_n \in \mathbb{N}^+$

Ще док. тв. за $n+1$:

$$z_{n+1} = \begin{cases} z_n > t_n, & z_{n+1} = \overset{\in \mathbb{N}^+}{z_n} - \overset{\in \mathbb{N}^+}{t_n} > 0 \in \mathbb{N}^+ \\ z_n < t_n, & z_n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

Аналогично се док. за t_{n+1}

Ще док. че: $(z_{n+1}, t_{n+1}) < (z_n, t_n)$

1) сл: $z_n > t_n$ $z_{n+1} = z_n - t_n < z_n$
$\Rightarrow (z_{n+1}, t_{n+1}) < (z_n, t_n)$

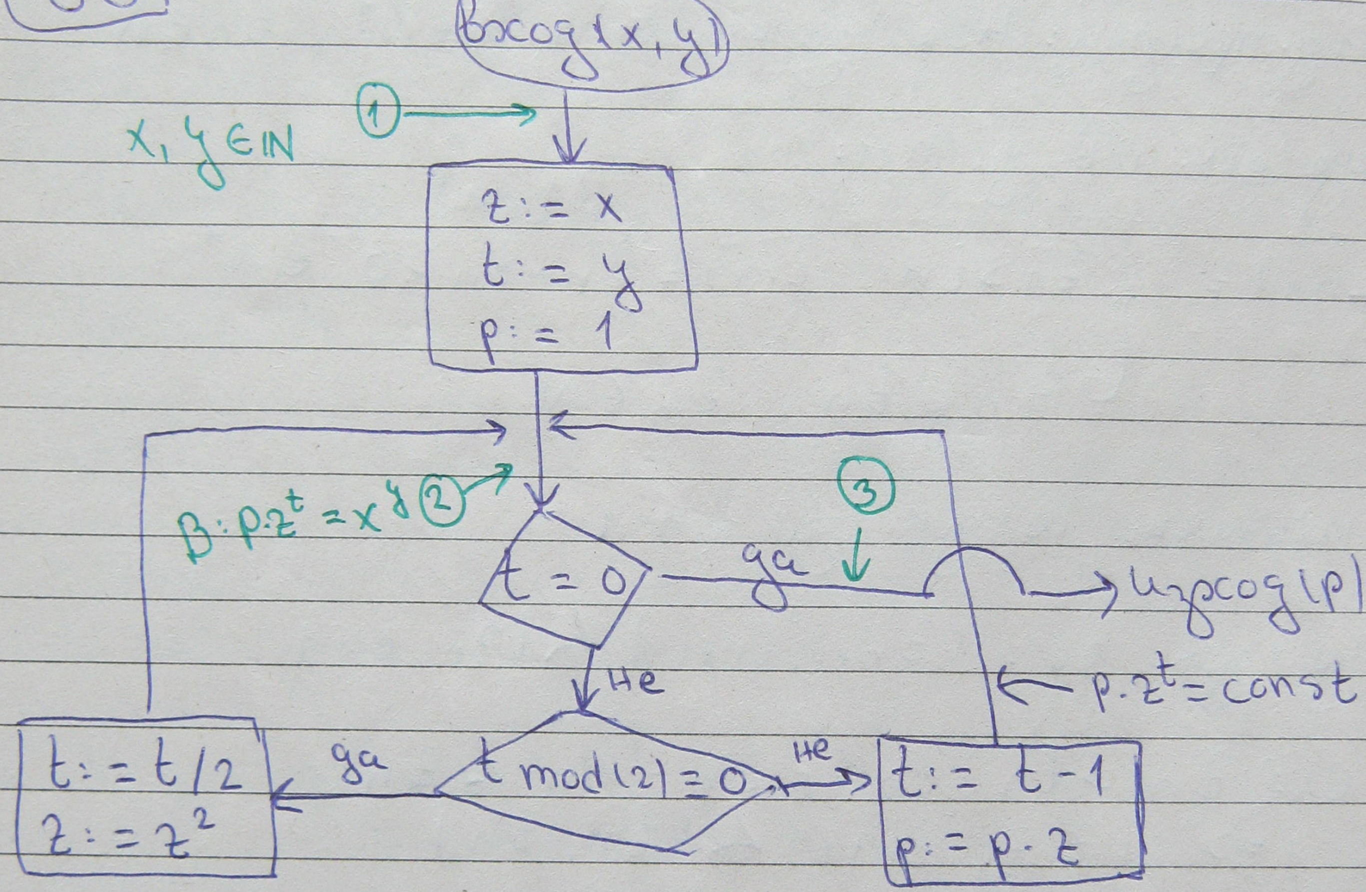
2) сл. $z_n < t_n$: $z_{n+1} = z_n$
$t_{n+1} = t_n - z_n < t_n$
$\Rightarrow (z_{n+1}, t_{n+1}) < (z_n, t_n)$

Доказахме, че $\{(z_n, t_n)\}$ е лексикографски строго намаляваща

18.03.2013 г. Упражнение № 4

Метод на Флойд за доказване
на частична коректност на програми.

$\boxed{\text{1 зад}}$ 36/7 а)



Докажете тотална коректност относно:

A: $x, y \in \mathbb{N}$

C: $p = x^y$

Това е алгоритъм за бързо степенуване

$$(z^2)^{\frac{t}{2}} = z^t$$

Доказателство:

$B: p \cdot z^t = x^y = const$

① => ② $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \cdot x^y = x^y$ ✓

② $\overset{да}{\Rightarrow}$ ② $p \cdot z^t = x^y,\ t' = t/2\ z' = z^2 \overset{?}{\Rightarrow} p(z')^{t'} = x^y$

Наистина $p(z')^{t'} = p(z^2)^{t/2} = p \cdot z^t = x^y$

② $\overset{не}{\Rightarrow}$ ② $p \cdot z^t = x^y\ t' = t-1,\ p' = p \cdot z \Rightarrow p' z^{t'} = x^y$

② => ③ $p z^t = x^y$ & $t = 0 \Rightarrow p = x^y$ -> да

Програмата е частично коректна и относно
$A_0: x, y, \in \mathbb{Z}$

<u>Условие за завършване:</u>

Да допуснем, че за някое $y \in \mathbb{N}$ програмата зацикля.

Нека t_n = ст-та на t при n-та итерация.

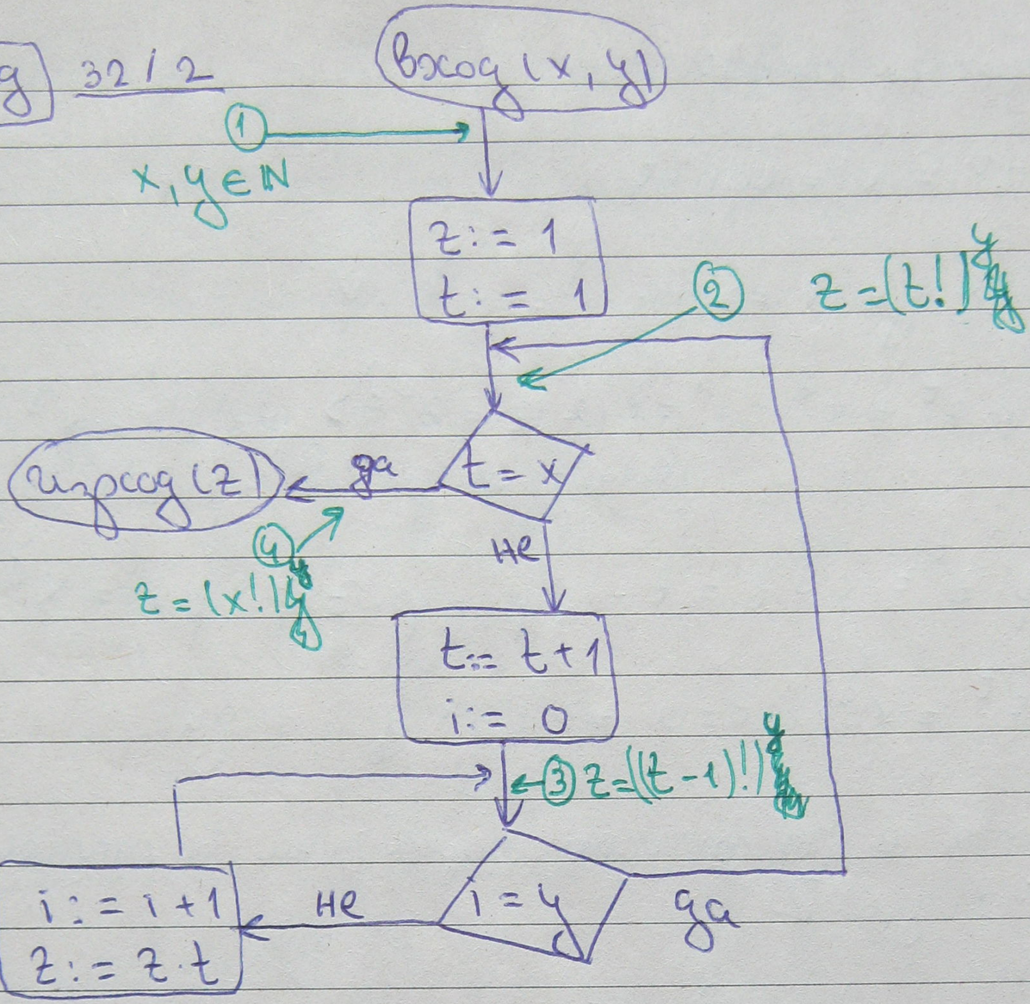
$\forall n\ t_n$ е определено и $t_n \neq 0$

Да видим, че: 1) $\forall n\ t_n \in \mathbb{N}\ (t_n \in \mathbb{N}^+)$ - индукц. по n
2) $\{t_n\}_n$ е строго намаляваща

$n = 0\quad t_0 = y \in \mathbb{N}$ (От A) $\quad t_{n+1} \overset{?}{<} t_n$

$t_{n+1} = \frac{t_n}{2} < t_n \quad t_{n+1} = t_n - 1 < t_n$

2 зад 32/2



Докажете ~~тотална~~ частична коректност относно:

A: $x, y \in \mathbb{N}$

C: $z = (x!)^y$

и завършва при A: $x \in \mathbb{N}^+, y \in \mathbb{N}$

Завършване:

За вън~~тр~~ешния цикъл: $t_0 = 1 \geq x \in \mathbb{N}^+$

$t_{n+1} = t_n + 1$

За вътрешния цикъл: $i = 0 \geq y \in \mathbb{N}$

$i_{n+1} = i_n + 1$

„Срязваме" стрелките на P на подходящи места, така, че ∀ траектория на P да се обхване с такива срезове

С 2 среза в началото на двата цикъла обхващаме всички траектории

$$① \Rightarrow ② \Rightarrow ③ \underbrace{\Rightarrow \dots \Rightarrow ③}_{n_1 \geq 1} \Rightarrow ② \Rightarrow ③ \overbrace{\Rightarrow \dots \Rightarrow ③}^{n_2 \geq 1} \overbrace{\Rightarrow \dots \Rightarrow ③}^{n_k \geq 1} \Rightarrow ② \Rightarrow ④$$

С всеки срез i „свързваме" условие A_i, като с началния и крайния срез свързваме началното и крайното условие.

Другите условия A_i избираме така че за $\forall$ дъга $ⓘ \Rightarrow ⓙ$ да е вярно че:
ако в т. i е изпълнено A_i, то в т. j да е изпълнено A_j (*). Тогава твърдим, че програмата е частично коректна относно A и C.

Наистина, нека за x, y удовл. входното усл. A, програмата P е спряла. Да видим, че в т ④ е вярно C

$$A_1 = A \overset{(*)}{\Rightarrow} A_2 \overset{(*)}{\Rightarrow} A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_2 \Rightarrow A_4$$

A_i - индуктивни твърдения.

① ⇒ ② $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow B_1(x, y, 1, 1)$, т.е $1 = (1!)^y$ - ✓

② ⇒ ③ $z = (t!)^y,\ t' = t+1,\ i = 0 \Rightarrow B_2\ z = ((z'-1)!)^y \cdot t^i$
$\Rightarrow z = (t!)^y\, t_0 = (t!)^y$ ✓

③ ⇒ ③ $z = ((t-1)!)^y \cdot t^i,\ i' = i+1 \quad z' = ((t-1)!)^y\, t^i$
$z' = z \cdot t \Rightarrow z \cdot t = ((t-1)!)^y\, t^{i+1}$ ✓

③ => ② $z = ((t-1)!)^y \cdot t^i$ & $y = i$ => $z = (t!)^y$ $z = ((t-1)!)^y \, t^i$

② => ④ ✓ очевидно

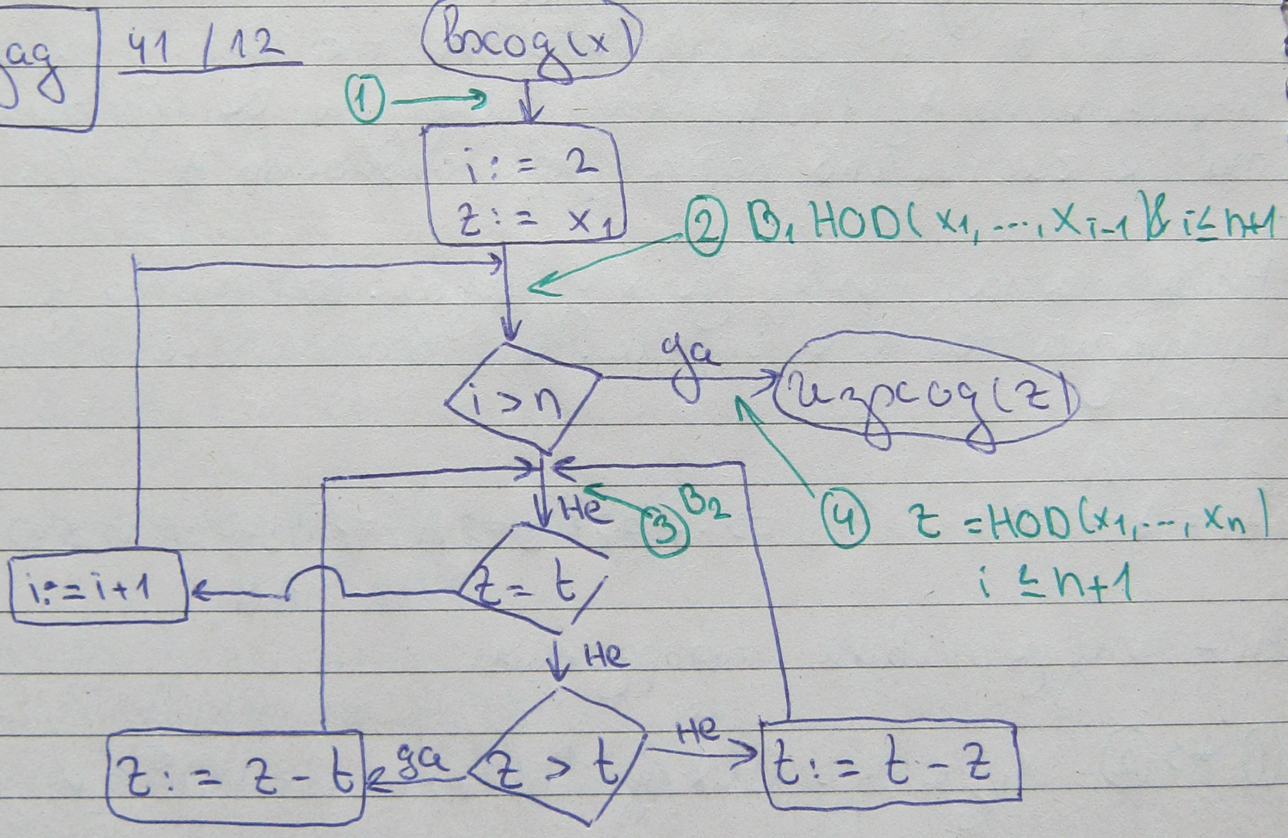
Как да се сетим за B_1 и B_2?

За B_1: B_1 & $t = x$ => $z = (x!)^y$

$z = (t!)^y$

B_1: $z = (t!)^y$
B_2: $z = ((t-1)!)^y$

3 зад   41 / 12



Док. че зад. намира НОД на ел. на масива

$НОД(НОД(x_1, \dots, x_{i-1}), x_i) = НОД(x_1, \dots, x_i)$

вх. усл: A: $x = (x_1, \dots, x_n)$ $x_i \in \mathbb{N}^+$, $n \ge 2$
изх. усл: C: $z = НОД(x_1, \dots, x_n)$

Доказателство:

1) Частична коректност:

$B_1: z = HOD(x_1, \dots, x_{i-1})$ & $i \le n+1$

B_1 & $i > n \Rightarrow i = n+1$

$B_2: HOD(x_1, \dots, x_i) = HOD(z, t)$ & $i \le n$

в т. ③ $HOD(z, t) = const = HOD(z_{н}, t_{нач.}) =$

$= HOD(HOD(x_1, \dots, x_{i-1}) x_i) = HOD(x_1, \dots, x_i)$

③ $\Rightarrow$ ② B_2 & $i' = i+1$ & $i \le n$ $\quad i' \le n+1$ V

① $\Rightarrow$ ② V

② $\Rightarrow$ ④ $z = HOD(x_1, \dots, x_{i-1})$, $\underbrace{i \le n+1, i > n}_{\Rightarrow i = n+1} \Rightarrow z = HOD(x_1, \dots x_n)$

② $\Rightarrow$ ③ $B_1, t = x_i, i \le n \overset{?}{\Rightarrow} HOD(x_1, \dots, x_i) = HOD(z, t)$ и $i \le n$

$HOD(z, t) \overset{B_1}{=} HOD(HOD(x_1, \dots, x_{i-1}), x_i) = HOD(x_1, \dots, x_i)$ V

③ $\Rightarrow$ ② $HOD(z, t) = HOD(x_1, \dots, x_i)$, $i \le n$, $z = t$, $i' = i+1$

$\Rightarrow z = HOD(x_1, \dots, x'_{i-1})$ и $i' \le n+1$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$z = HOD(x_1, \dots, x_i)$ V $\qquad i+1 \le n+1 \Leftrightarrow i \le n$ V

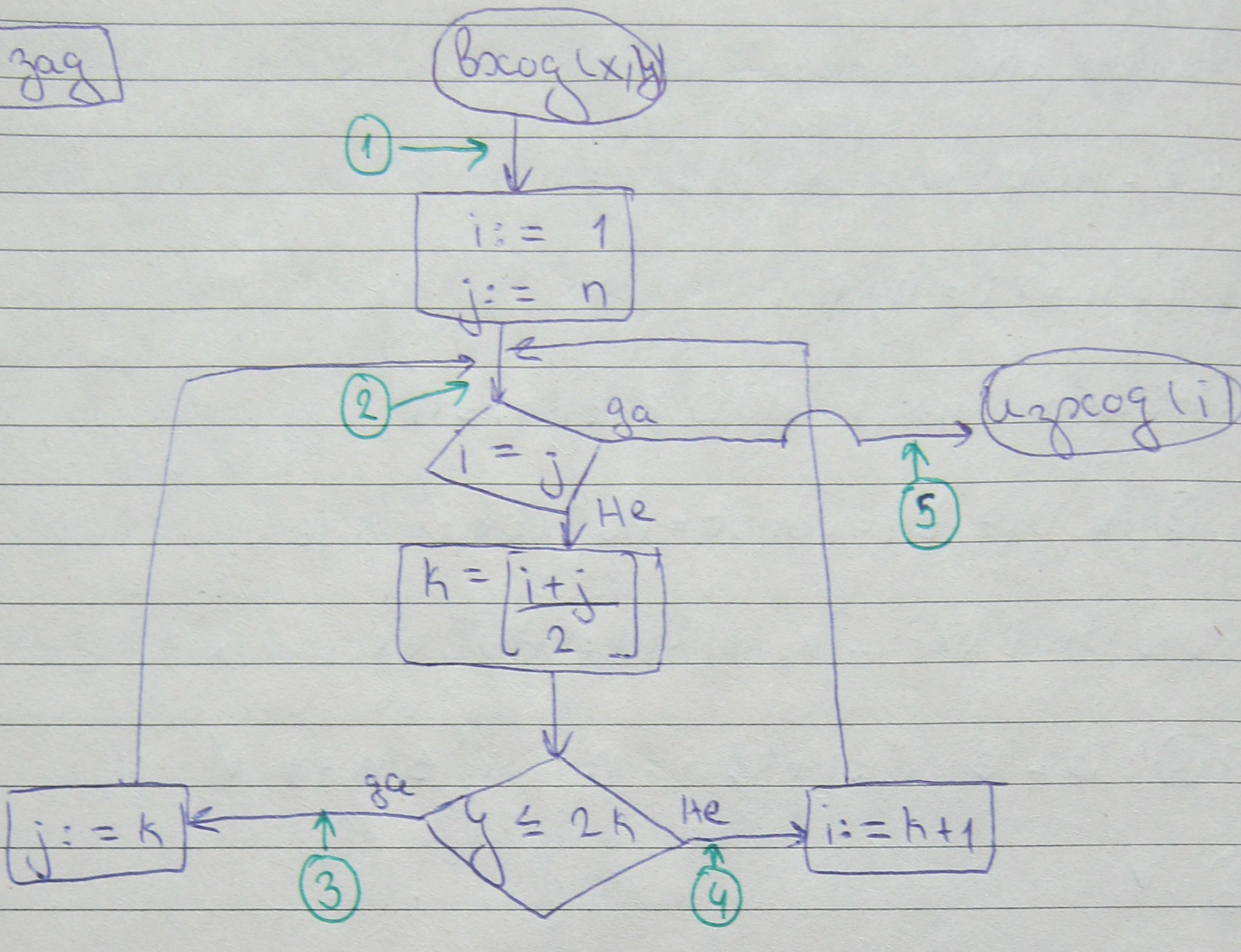
От $HOD(z, t) = HOD(x_1, \dots, x_i)$

но $z = t \Rightarrow HOD(z, z) = HOD(x_1, \dots, x_i) = z$

За да док. че вътр. цикъл не зацикля $\Rightarrow$ поглеждаме предната задача.

25.03.2013г. Упражнение № 5

$\boxed{1 \text{ зад}}$



Докажете тотална коректност относно:

A: $X = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$, $y \in \{x_1, \dots, x_n\}$

C: $i = \min\{j \mid x_j = y\}$

Това е двоично търсене

1 A: $x = (x_1, \dots, x_n)$ $y \in \{x_1, \dots, x_n\}$ $n \geq 1$

5 C: $x_i = y$ & $y \notin \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$

2 B: $y \in \{x_i, \dots, x_j\}$ & $i \leq j$ & $y \notin \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$

3 E: $y \in \{x_i, \dots, x_k\}$ & $j \leq k$ & $y \in \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$

4 F: $y \in \{x_{k+1}, \dots, x_j\}$ & $k+1 \leq j$ & $y \in \{x_1, \dots, x_k\}$

① => ② $y \in \{x_1, \dots, x_n\}$ $y \notin \emptyset$ $i = 1 \leq j = n$ ✓

② => ③ $i < j$, $k = \left[\frac{i+j}{2}\right]$ $k < j$, $y \leq x_k \Rightarrow y \in \{x_i, \dots, x_k\}$

- да защото $y \in \{x_i, \dots, x_j\}$ (от В) $y \leq x_k$ $i \leq k$

③ => ② Е и $j = k \Rightarrow$ В - очевидно

② => ④ $i < j$, $k = \left[\frac{i+j}{2}\right] = k < j \Rightarrow k+1 \leq j$ $y \notin \{x_1, \dots, x_k\}$

$y > x_k$, $y \in \{x_i \leq \dots \leq x_n \leq \dots x_j\} \Rightarrow y \in \{x_{k+1}, \dots, x_j\}$

④ => ② F & $i = i+1 \Rightarrow$ В

② => ⑤ $i = j \Rightarrow y = x_i$ и $y \notin \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$

Завършване: ($i-j$ строго намалява)

Да допуснем, че програмата е зациклила при коректни входни данни

Нека j_s и i_s са стойностите на i и j в s-тата итерация

$i_s \neq j_s$ по допускане още $i_s \leq j_s$ (от В $\Rightarrow i_s < j_s$)
Това е редица от естествени числа

Ще докажем, че редицата $u_s = j_s - i_s$ е строго намаляваща и $u_s \in \mathbb{N}$, то това ще е противоречие с това, че прогр. е зациклила
т.е ще док. че $j_{s+1} - i_{s+1} < j_s - i_s$ $\forall s$

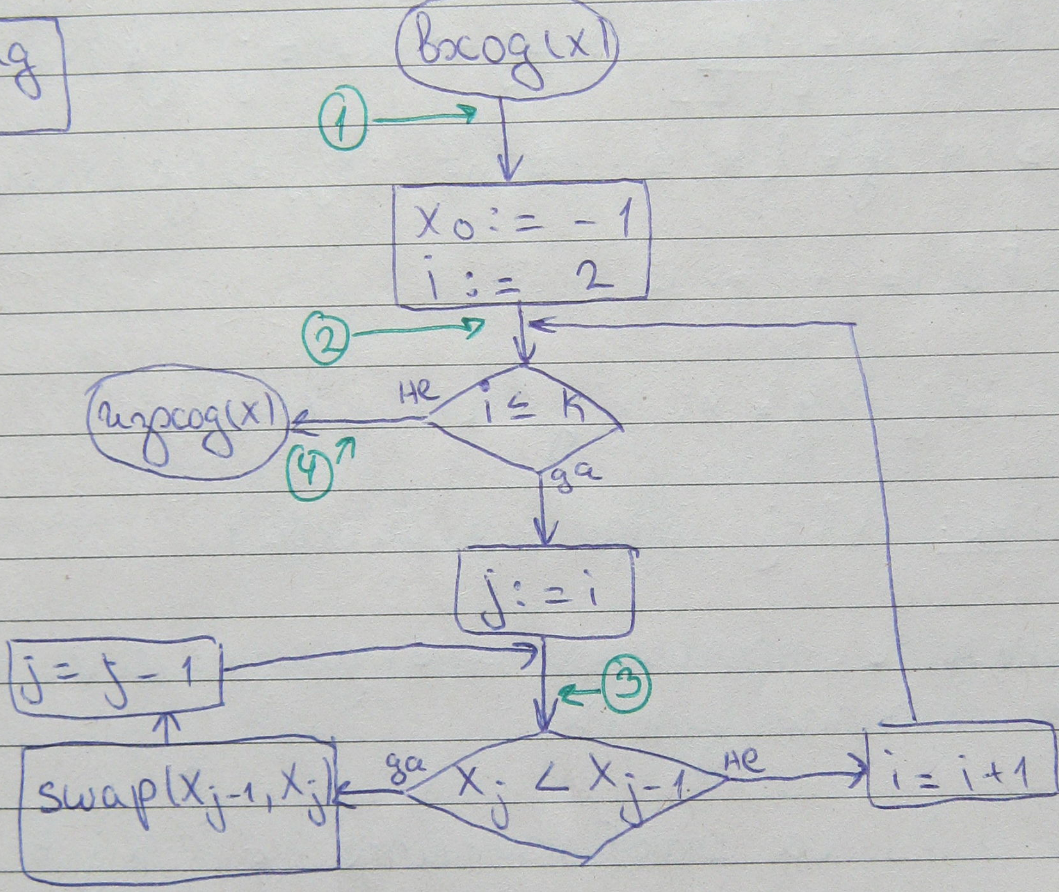
1 сл. През „да" $i_{s+1} = i_s$ $j_{s+1} = k = \left[\frac{i_s + j_s}{2}\right]$

$j_{s+1} < j_s \Rightarrow j_{s+1} - i_{s+1} < j_s - i_s$

2 сл. През „не" $i_{s+1} = k+1$; $j_{s+1} = j_s$

$i_{s+1} > k \geq i_s \Rightarrow j_{s+1} - i_{s+1} < j_s - i_s$

2 зад



① A: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_1 \geq 0 \ldots, x_n \geq 0; n \geq 1$

④ C: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$

• Верифицирайте следния метод за сортиране чрез insertionSort

Док-во:

② B: $i \leq n+1$ ($\&$ $i > n \to$ Излизане с $i = n+1$) $\&$ $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{i-1}$

③ D: $i \leq n$ $\&$ $x_0 \leq \ldots \leq x_{j-1}$ $\&$ $x_j \leq \ldots \leq x_i$ $\&$ $j \leq i$ $\&$ $x_{j-1} \leq x_{j+1}$ (ако $j < i$)

1 => 2 $ord(1): x_0 \le x_1$ и $i = 2 \le n+1$ ✓

2 => 4 $i \le n+1$ и $i \ge n \Rightarrow i = n+1$

$ord(i-1)$ и $i = n+1 \Rightarrow ord(n)$ т.е C ✓

~~$ord(j-1) \equiv ord(i-1)$, което е B~~

2 => 3 $i \le n$ $j = 1 \le i$ при $j = 1$

$ord(j-1) \equiv ord(i-1)$, което е B

$x_i \le x_i$ очевидно

$j < i$, то $x_{j-1} \le x_{j+1}$

3 => 2 $x_0 \le \dots x_{j-1}$ $x_j \le \dots \le x_i$ и $x_{j-1} \le x_{i-1}$

т.е $ord(i)$

$i' = i+1$ и $ord(i'-1)$

от $i \le n \Rightarrow i+1 \le n+1$ т.е $i \le n+1$

3 => 3 $x_0 \le \dots \le x_{j-1}$ $x_j \le \dots \le x_i$

$x_j \le x_{j-1}$

$x_j \le x_{j+1}$ $x_{j-2} \le x_{j-1}$

$x_{j-2} \le x_j$ $j-1 = j$, т.е $x_{j'-1} \le x_{j'+1}$

Домашно №1:

13/11 25/6 25/8 б, в 30/1 33/4

33/5 в 36/7 б 39/10 44/15

Екстра Кредит: 46/13 48/20 48/21

01.04.2013 г. <u>Компактни оператори</u> 64 стр.

Частични функции и операции с тях

Оператор:

$\Gamma : F_n \to F_k \qquad F_n = \{ f \mid f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \} \quad \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$

$\Gamma(f) = g$

f, g - функции

Γ е от тип $n \to k$ или (n, k)

Оператори на повече аргументи: $\Gamma(f_1, \ldots, f_n) = g$

$\Gamma : F_{n_1} \times \ldots \times F_{n_m} \to F_k$ от тип $(n_1 \ldots n_m) \to k$

Примери: ① $\Gamma : F_1 \to F_1$

$\underbrace{\Gamma(f)}_{g} = 2 \cdot f$ т.е.

$\Gamma(f)(x) \simeq 2 \cdot f(x)$

② $\Gamma(f)(x) \simeq (f(x))^2$

$\Gamma_c(f) = f \circ f$ или

$\Gamma_c(f)(x) \simeq f(f(x)) \; \forall x$

④ $\Gamma_d : F_2 \to F_2$ (от тип $(2 \to 1)$)

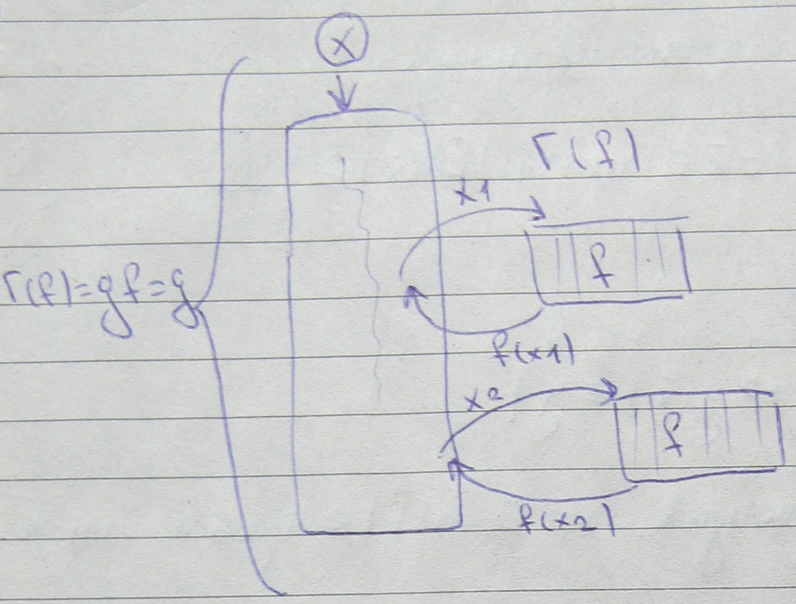
диагонала

$\Gamma_d(f)(x) \overset{df}{\simeq} f(x, x)$

	0	1	...	x
0	$f(0,0)$			
1		$f(1,1)$		
...			...	
x				$f(x,x)$

5. $\Gamma : F_1 \to F_2$

$\Gamma(f)(x,y) \overset{df}{\simeq} f(x)\cdot f(y)$ (от тип $(2 \to 2)$)



$\Gamma(f)(x)$

Какви условия да удовлетворява $\Gamma : F_1 \to F_1$ за да описва реалната ситуация (от картинката)?

1. $\Gamma(f)(x) \simeq y \Rightarrow \exists \Theta(\Theta$ е крайна и $\Theta \subseteq f$ и $\Gamma(\Theta)(x) \simeq y)$

2. $\Gamma(f)(x) \simeq y$ и $f \leq g \Rightarrow \Gamma(g)(x) \simeq y$

монотонност на Γ

1 + 2 $\Leftrightarrow$ Γ е компактен.

Деф: Γ е компактен ако:

$\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y \longleftrightarrow$

$(\exists \Theta \leq f[\Theta$ е крайна $\& \; \Gamma(\Theta)(\bar{x}) \simeq y])$

Деф: $Dom(f) = \{\bar{x} \mid !f(\bar{x})\}$ $\quad \bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$

$f(x)$ е деф.

$f: \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ частична функция

Деф: $Ran(f) = \{y = Y \mid \exists \bar{x} \in Dom(f) [f(\bar{x}) \simeq y]\}$

Деф: $f \subseteq g \overset{df}{\iff} G_f \subseteq G_g$

графика на f

$\iff \forall \bar{x}, y (f(\bar{x}) \simeq y \Rightarrow g(\bar{x}) \simeq y)$

Деф: f е крайна функция, ако $Dom(f)$ е крайно множ.

$!f(x)$ - f е деф. в т. x

$\neg !f(x)$ - f не е деф. в т. x

Бин. релация в F_n: $f \subseteq g \overset{df}{\iff} G_g \subseteq G_f$

$\iff \forall \bar{x}, y (f(\bar{x}) \simeq y \Rightarrow g(\bar{x}) \simeq y)$

$\subseteq$ е частична наредба

1) $f \subseteq f$

2) $f \subseteq g \;\&\; g \subseteq h = f \subseteq h$

3) $f \subseteq g \;\&\; g \subseteq f \Rightarrow f = g$

$\subseteq$ в F_n е частична, т.е не за всеки две f и g:

$f \subseteq g$ или $g \subseteq f$ или $f \subseteq g$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$G_f \subseteq G_g \qquad G_g \subseteq G_f$

$\emptyset^{(n)} \in F_n$

$\forall \bar{x} \in \mathbb{N}^n : \neg ! \emptyset^{(n)}(\bar{x})$

ОС (област на Скот)
множество с една релация и един най-малък ел.

<u>Деф:</u> ОС е $(F_n, \subseteq, \emptyset^{(n)})$, където
1) $(F_n, \subseteq)$ е частично наредено множ.
2) $\emptyset^{(n)}$ е най-малкия елем. на F_n
3) $\subseteq$ е пълна

θ е крайна, ако $Dom(\theta)$ е крайно:
$\emptyset^{(n)}$ е крайно за $\forall n$.

<u>Деф:</u> $f: \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$
$A \subseteq \mathbb{N}$
$f|_A$ е такава ф-я g за която $Dom(g) = Dom(f) \cap A$
рестрикция
ако $g(\bar{x}) = y \Rightarrow f(\bar{x}) = y$

(т.е g всъщност f, но само върху A)

$\Gamma : F_n \to F_k$ - оператор от тип $(n \to k)$ или $((n, k))$
$\Gamma(f) = g$
$\in F_n$ $\in F_k$

$\Gamma : F_{n_1} \times \dots \times F_{n_e} \to F_k$ от тип $(n_1, \dots, n_e \to k)$

Примери:
1) $\Gamma(f) = f_{100}$, където $f_{100}(x) = 100 \ \forall x$
2) $\Gamma(f) = fact$, където $fact(x) = x!$
прим. за константни оператори
3) $\Gamma(f) = f$ id (идентитет)

4) $\Gamma(f) = f \circ f$
5) $\Gamma(f)(x) \simeq f(f(x))$

б) $\Gamma(f,g) = f \circ g$

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x \cdot f(x-1), & x > 0 \end{cases}$$

$\Gamma(f)(x) \simeq f(x,x)$ $\quad \Gamma: \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$

$\Gamma: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_k$

Деф: Γ е монотонен, ако $\forall f, g$ ако $g \subseteq f$, то $\Gamma(g) \subseteq \Gamma(f)$ (*)

Деф: Γ е компактен, ако $\forall f, \bar{x}, y$: (**)

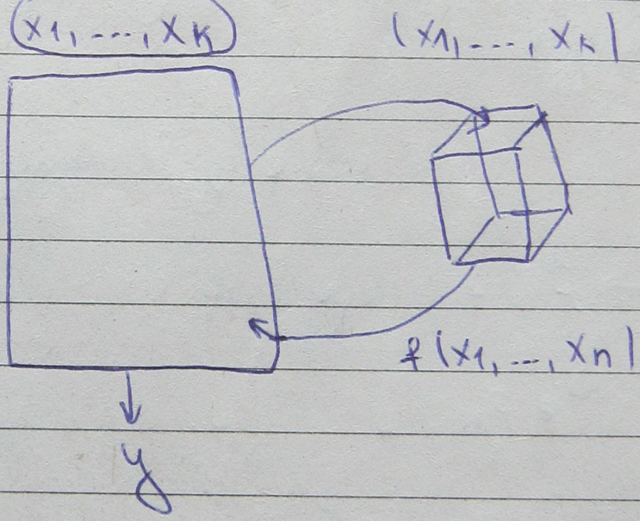
$\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y \Leftrightarrow \exists \theta (\theta \subseteq f$ и θ е крайна и $\Gamma(\theta)(\bar{x}) \simeq y)$

Твърдение: Ако Γ е компактен, то Γ е монотонен

$\Gamma: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_k$

$\Gamma(f)(x_1, \dots, x_k)$

Ясно е, че Γ е програма която f като „оракул", то:



1) $\Gamma(f)(x_1, \dots, x_n) \simeq y \Rightarrow \exists \theta$
$(\theta \subseteq f$ и $\Gamma(\theta)(\bar{x}) \simeq y)$ т.е Γ е краен (и компактен в (**))

2) $\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y$ & $g \supseteq f \Rightarrow \Gamma(g)(\bar{x}) \simeq y$

$\Leftrightarrow f \subseteq g \Rightarrow \forall \bar{x}\ \underbrace{(\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq \Rightarrow \Gamma(g)(\bar{x}) \simeq y)}$ т.е

$\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$

$f \subseteq g \Rightarrow \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$ или Γ е монотонен

Γ - непрекъснат оператор

$f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots \subseteq f_n \subseteq \dots$ в F_n

$\cup f_i \in F_n : (\cup f_i)(\bar{x}) \simeq y \leftrightarrow (\exists i)[f_i(\bar{x}) \simeq y]$

За всяка монот. раст. редица $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$;

$\Gamma(\bigcup_i f_i) = \bigcup_i \{\Gamma(f_i)\}$

Γ - монотонен:

$f \subseteq g \rightarrow \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$

Пример:

Дефиниция на оператор:

$\Gamma(f)(x) \simeq f(x) \quad \Gamma(f) = f$ док. че е комп.

$\boxed{1 \text{ зад}}$ 68 / 1;2

① Докажете, че следните оператори са монотонни

② После докажете, че са крайни.

в) $f(x)$

~~б~~) $\Gamma(f)(x) \simeq 2f(x)$

$f \subseteq g \overset{?}{\Rightarrow} \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$

Наистина, нека $f \subseteq g$. Да видим, че $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$, т.е.

$\forall x, y\ (\Gamma(f)(x) \simeq y \overset{?}{\Rightarrow} \Gamma(g)(x) \simeq y)$

Наистина x, y - фиксирани и $\underbrace{\Gamma(f)(x) \simeq y}_{2f(x) \simeq y \Rightarrow !f(x) \Rightarrow}$, ~~т.е.~~ Да видим, че

и $\Gamma(g)(x) \simeq y$

По деф $\Gamma(g)(x) = 2 \circ g(x) \overset{?}{=} 2 \circ f(x) = \Gamma(f)(x)$ по деф $f \subseteq g$

$\Rightarrow g(x)$ е дефин

и $g(x) = f(x)$

$\Gamma(g) = 2 \circ g(x) = 2f(x) = \Gamma(f)(x)$

2)

~~2~~) $\Gamma(f)(x) \overset{def}{\simeq} f(f(x))$

Нека $f \subseteq g$. Да видим, че $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$

Нека $\Gamma(f)(x) \simeq y \Rightarrow ! f(x)$

$f(f(x)) \simeq y$ или $\exists z$ $f(x) \simeq z$ и $f(x) \simeq y$

$f \subseteq g \Rightarrow g(x) \simeq z$ и $g(z) \simeq y$

Следов. $\Gamma(g)(x) \overset{def}{\simeq} g(\underbrace{g(x)) \simeq g(f(x)}_{=z_0}) = f(f(x)) = y$

т.е $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$

$\Gamma(f)(x) \simeq$ if $x = 0$ then 1 else $x f(x-1)$

Доказателство:

Нека $f \subseteq g$ и нека за някое x $\Gamma(f)(x) = y$. Да видим, че $\Gamma(g)(x) \simeq y$

$\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$

1 сл. $x = 0$

$\Gamma(f)(x) = 1 = \Gamma(g)(x)$

2 сл. $x > 0$

$\Gamma(f)(x) \overset{df}{\simeq} x \cdot f(x-1)$ Но $\Gamma(f)(x) = y \Rightarrow$

$x f(x-1) = y$ и в частност $! f(x-1)$

$df \Rightarrow$ и $f(x-1) = g(x-1)$

$\Rightarrow \Gamma(g)(x) \simeq x g(x-1) = x f(x-1) = \Gamma(f)(x) \simeq y$

5) $\left.\begin{array}{l} \Gamma(\theta)(x) \simeq y \\ \theta \subseteq f \end{array}\right\} \overset{?}{\to} \Gamma(f)(x) \simeq y$

$\Gamma(\theta)(x) \simeq \theta(x) \simeq y$

$\theta \subseteq f \to f(x) \simeq y \to \Gamma(f)(x) \simeq f(x) \simeq y$

68/1 и) $\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0 & , x=0 \\ f(x-1, f(x,y)), & x>0 \end{cases}$

Реш: Ще докажем, че Γ е монотонна

2) $\Gamma(f)(x,y) \simeq z \to \exists \theta < f : \Gamma(\theta)(x,y) \simeq z$

1) $f \leq g \xrightarrow{?} \Gamma(f) \leq \Gamma(g)$

$x=0 : \Gamma(f)(0,y) \overset{def}{\simeq} 0 = \Gamma(g)(0,y)$

$x>0 : !\Gamma(f)(x,y) \overset{def}{\simeq} !f(x-1, !f(x,y)) \simeq z$

$!f(x,y) \simeq u \to !g(x,y) \simeq u$

$!f(x-1,u) \simeq z \to !g(x-1,u) \simeq z$

$\Gamma(g)(x,y) \simeq g(x-1, g(x,y)) \simeq z$

2) $!\Gamma(f)(x,y) \simeq z$

$x=0 : \Gamma(f)(0,y) \overset{def}{\simeq} 0$

$? \theta \leq f : F(\theta)(0,y) \simeq 0$

Нека $\theta = \theta^{(2)}$

$x>0 : !\Gamma(f)(x,y) \overset{def}{\simeq} !f(x-1, \underbrace{!f(x,y)}_{u}) \simeq z$

$!f(x-1,u) \simeq z$

$\theta = \{ \langle x-1, u, z \rangle, \langle x, y, u \rangle \}$

[2 зад] [68/1] Докажете, че следните оператори са крайни

а) $\Gamma(f)(x) \simeq 2 f(x)$

Γ е краен ако:

$\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y \Rightarrow \exists \theta (\theta \subseteq f$ и θ е крайна и $\Gamma(\theta)(\bar{x}) \simeq y)$ за $\forall \bar{x}, y \; \forall f$

Доказателство:
Нека f, x, y са произволни и имаме $\Gamma(f)(x) \simeq y$ т.е $2 f(x) \simeq y$
Нека $\theta \rightleftharpoons f|_{\{x\}}$. Ясно е че $\theta(x) = f(x)$

$\theta \subseteq f$, θ е крайна и $\Gamma(\theta)(x) \overset{def}{\simeq} 2\theta(x) = y$

б) $\Gamma(f)(x) \simeq f(f(x))$
2 точки
Нека $\Gamma(f)(x) \simeq y$, то $f(f(x)) \simeq y$
Следователно $\exists z: f(x) \simeq z$ и $f(z) \simeq y$

$\theta \overset{def}{=} f|_{\{x, z\}}$ θ е крайна, $\theta \subseteq f$

и $\Gamma(\theta)(x) \simeq \theta(\theta(x)) = \theta(\underbrace{f(x)}_{z}) = f(\underbrace{f(x)}_{z}) = y$

в) $\Gamma(f)(x) =$ if $x = 0$ then 1
else $x \cdot f(x-1)$

Док: Нека $\Gamma(f)(x) \simeq y$
$\Gamma(\emptyset)(0) = 1$
1 сл) $x = 0$ $\Gamma(f)(x) = 1$ Нека $\theta = \emptyset$ $\theta \subseteq f$, θ е крайна
2 сл) $x > 0$ $\Gamma(f)(x) \overset{def}{\simeq} x f(x-1) = y$ Следов $! f(x-1)$

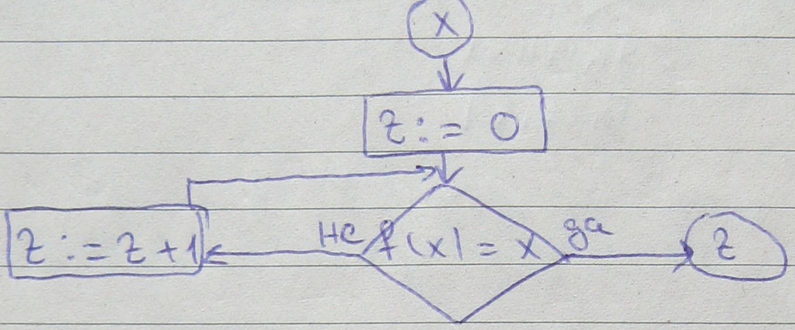
Нека $\theta = f|_{\{x-1\}}$, $\theta \subseteq f$, θ е крайна

$\Gamma(\theta)(x) = x\,\theta(x-1) = x\cdot f(x-1) = \Gamma(f)(x) = y$

д) $\Gamma(f)(x) = \sum_{z \le x} f(x) \equiv f(0) + \dots + f(x)$

$\theta = f|_{\{0,1,\dots,x\}}$

е) $\Gamma(f)(x) \simeq \min\{z \mid f(z) \simeq x\}$



$\theta = f|_{\{0,\dots,z\}}$

Пример за некомпактен оператор (безкрайни редици)

$\Gamma(f)(x) \simeq \sum_{z \text{ е четно}} f(z)$

$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} f(x), & Dom(f) \text{ е крайно множ.} \\ \neg!, & \text{иначе} \end{cases}$

Неподвижни точки на компактни оператори

$\Gamma : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_k \quad \mathcal{F}_n = \{f : f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}\}$

при $n = k$: $\Gamma : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ $\quad$ f - функция, такава че за такъв Γ, неподвижната точка на Γ е $\Gamma(f) = f$

Казваме, че f е **най-малка неподвижна точка** (НМНТ) на Γ, ако:

1) $\Gamma(f) = f$
2) $\Gamma(g) = g \Rightarrow f \subseteq g$

$$f \subseteq g \Leftrightarrow Gf \subseteq Gg \Leftrightarrow \forall \bar{x}\, y\, (f(\bar{x}) \simeq y \Rightarrow g(\bar{x}) \simeq y)$$

$$R: \quad f(x) = \underbrace{\text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x \cdot f(x-1)}_{\Gamma_R(f)(x)}$$

$\Gamma(f)(x)$ $\qquad\qquad$ $\Gamma_R(f, x)$

$f(x) \simeq \Gamma(f)(x) \ \forall x$

или $f = \Gamma_R(f)$

Всяка рекурсивна програма R определя оператор, при това компактен. И обратно, всеки компактен оператор Γ определя рекурсивна програма $R_\Gamma: f(\bar{x}) = \Gamma(f)(\bar{x})$

Теорема НМНТ на $\forall$ компактен оператор $\Gamma: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ е точно функцията която се пресмята с call by value от рекурсивната програма, определена от Γ.

$$R: f(\bar{x}) = \Gamma(f)(\bar{x})$$

Теорема на **Кнастер-Тарски**

Нека $\Gamma: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ е компактен. Тогава НМНТ f_Γ на оператора Γ $\exists$ и

$$f_\Gamma = \bigcup_k \underbrace{\Gamma^k(\emptyset^{(n)})}_{f_k}$$

7' $\boxed{1 \text{ зад}}$ $\boxed{73/16}$ Опишете всички неподвижни точки на следните оператори и в частност посочете най-малката на всеки от тях.

б) $\Gamma(f) = f_0$ f_0 - фиксирана функция

f е неподвижна точка на Γ, ако $\underbrace{\Gamma(f)}_{f_0} = f$ т.е $f = f_0$ единствена неподв. точка.

$R_\Gamma : f(x) = \underbrace{\Gamma(f)(x)}_{f_0(x)}$, или

$R_\Gamma : f(x) = f_0(x)$

ясно е, че R пресмята f_0

а) $\Gamma(f) \overset{def}{\simeq} f$ идентитет $\Gamma \; F_1 \to F_1$

Ясно е, че $\forall f \in F_1$ е неподв. точка на Γ

и $\emptyset^{(1)}$ е НМНТ

като рек. програма

$R: f(x) \simeq \Gamma(f)(x)$ или

$R: f(x) \simeq f(x)$

Ясно е, че R пресмята $\emptyset^{(1)}$

ж) $\Gamma : F_1 \to F_1$

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ f(x+1), & x > 0 \end{cases}$$

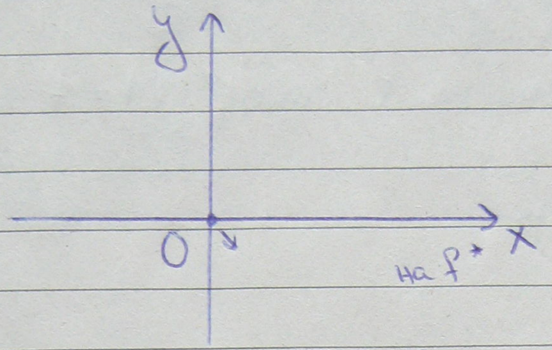
Нека f е неподвижна точка на Γ, т.е $f(x) = \Gamma(f)(x)$

$R: f(x) =$ if $x=0$ else $f(x+1)$

$f(0) \to 0$

$f(1) \to f(2) \to f(3) \to \dots \quad x>0 \quad f(x) \to f(x+1) \to f(x+2) \to \dots$

или в пресмята $f^*(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ ?! & , x>0 \end{cases}$



Има ли Γ други неподвижни точки?

$f(x) \cong \begin{cases} 0 & , x=0 \\ & \end{cases}$

(*) $\Gamma(f)(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ f(x+1) & , x>0 \end{cases} \iff f = \Gamma(f)$

Нека f изпълнява (*), т.е неподвижна точка на Γ

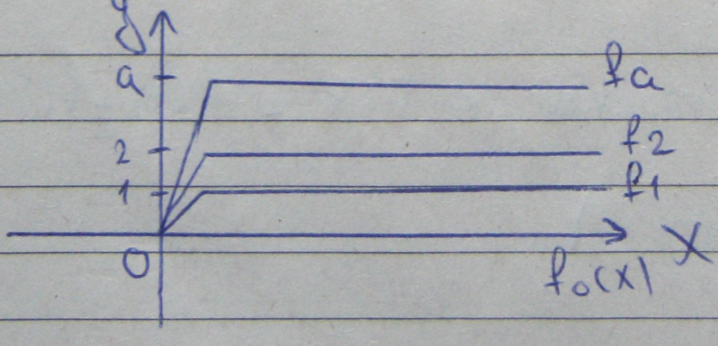
Тогава ясно е, че $f(0) = 0$

при $x>0 \quad f(x) \cong f(x+1) \cong f(x+2)$

$x=1 \quad f(1) \cong f(2) \cong f(3) \cong \dots \cong f(x) \quad \forall x$

8.04.2013

За $\forall a \in N \quad f(a) \cong \begin{cases} 0 & , x=0 \\ a & , x>0 \end{cases}$ неподв. точки на Γ



и) $\Gamma(f)(x) \cong \begin{cases} 0 & , x=0 \\ f(x-1, f(x,y)) & , x>0 \end{cases}$

$f = \Gamma(f)$, то $f =$

като рекурсивна програма

R: $F(x,y) =$ if $x=0$ then 0 else $F(x-1, F(x,y))$

$x=0$ $F(0,y)=0$

$x>0$ $F(x,y) \to F(x-1, F(x,y)) \to \dots$

с call by value

или с $f_{CV}(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & x=0 \\ ?!, & x>0 \end{cases}$

с call by name $x>0$ $F(x,y) \to F(x-1, F(x,y)) \to$

$\to F(x-2, F(x-1, (F(x,y))) \to \dots \to F(0, F(1, F(2, \dots, F(x,y)))) \to 0$

$f_{CN}(x,y) = 0$ $\forall x,y$

f_{CV}, f_{CN} - неподвижни точки

Неподвижни точки на Γ са и всички ф-ии

$f_a(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ ?!, & x>a \end{cases}$

в) $\Gamma(f)(x) \simeq$ if $x=0$ then 1 else $x \cdot f(x-1)$

Нека $f = \Gamma(f)$

Тогава $f(x) \simeq$ if $x=0$ then 1 else $x \cdot f(x-1)$ (*)

R: $f(x) =$ if $x=0$ then 1 else $x \cdot f(x-1)$

R пресмята факториел $f(x) = x!$

! Ако f е тотална и $g \supseteq f$, то $g = f$

I начин: да оплишем неподв. т. на Γ

Видяхме, че $fact(x) = x!$ е НМНТ на Γ (защото се пресмята от R_Γ) следователно $\forall$ друга неподв. т. f на Γ: $f \supseteq fact$

Но $fact$ е тотална $\Rightarrow$ Γ има единствена неподвижна точка $x!$

II начин: Нека $f = \Gamma(f)$. С индукция по x ще покажем, че $f(x) = x!$

$x=0$: $f(0) \overset{*}{\simeq} 1$ $\quad 1 = 0!$

x: допускаме, че $f(x) = x!$

за $x+1$: $f(x+1) \overset{*}{=} (x+1) f(x) = (x+1) x! = (x+1)!$

$\boxed{\text{Твърдение:}}$ Нека $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ - монотонно растяща редица. Тогава точната ѝ горна граница

$f = \bigcup_n f_n$ $\exists$ и се дефинира по следния начин:

$$f(\bar{x}) \simeq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists n\, f_n(\bar{x}) = y$$

$\Gamma: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$

$\Gamma^k(f) = \underbrace{\Gamma(\Gamma \dots (\Gamma(f)) \dots)}_{k}$ $\quad k=0$ $\quad \Gamma^0(f) = f$

$\Gamma^{k+1}(f) = \Gamma(\Gamma^k(f))$

$\boxed{\text{Теорема}}$ На Кнастер-Тарски

Нека $\Gamma : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ е компактен оператор. Тогава НМНТ f_Γ на оператора Γ $\exists$ и

$$f_\Gamma = \underbrace{\bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma^k(\emptyset^{(n)})}_{f_k}$$

$\boxed{73/16}$ Като използвате теоремата на Кнастер-Тарски, намерете НМНТ-и на следните оператори

(22c) $\Gamma(f)(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ f(x+1), & x > 0 \end{cases}$

Нека $f_k = \Gamma^k(\emptyset^{(1)})$ $\quad$ $f_0 = \emptyset^{(1)}$

$\quad f_{k+1} = \Gamma(f_k)$

$f_\Gamma = \bigcup_{k=0}^{\infty} f_k$

Знаем, че $\emptyset = f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots$

$f_0 = \emptyset$

$f_1(x) \overset{def}{=} \Gamma(f_0(x))$ ясно е, че за някое k $f_k = f_{k+1} | \Gamma$

$\simeq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \emptyset(x+1), & x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ ?!, & x > 0 \end{cases}$ $\quad \Gamma(f_k) = \Gamma(f_{k+1})$ или $\to$ $f_{k+1} = f_{k+2} \dots$

или $f_k = f_{k+1} = f_{k+2} = \dots$

$f_2(x) \simeq \Gamma(f_1(x)) \simeq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \underbrace{f_1(x+1)}_{?!}, & x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ ?!, & x > 0 \end{cases}$

$\emptyset = f_0 \subseteq f_1 = f_2 = f_3 = \dots$

$\bigcup_k f_k = f_1$, т.е. $f_\Gamma = f_1$

B) $\Gamma(f)(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ x \cdot f(x-1), & x>0 \end{cases}$

$f_0 = \emptyset^{(1)}$

$f_1 \stackrel{def}{=} \Gamma(\emptyset)(x) \cong \begin{cases} 1, & x=0 \\ x\cdot\emptyset(x-1), & x>0 \end{cases} \cong \begin{cases} 1, & x=0 \\ \neg!, & x>0 \end{cases}$

$f_0 \subseteq f_1$

$f_2 \stackrel{def}{\cong} \Gamma(f_1)(x) \cong \begin{cases} 1, & x=0 \\ x\cdot f_1(x-1), & x>0 \end{cases} \cong \begin{cases} 1, & x=0 \\ x\cdot 1, & x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ \neg!, & x-1>0 \end{cases}$

$f_2 \cong \begin{cases} x!, & x \leq 1 \\ \neg!, & x>1 \end{cases}$

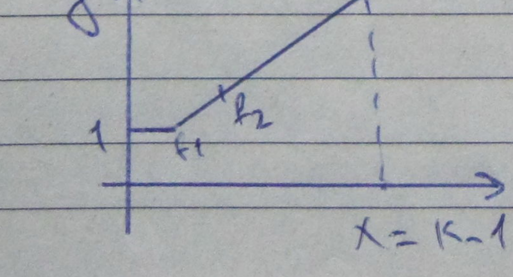
$f_3(x) \cong \Gamma(f_2)(x) \stackrel{def}{\cong} \begin{cases} 1, & x=0 \\ x\cdot f_2(x-1), & x>0 \end{cases} \stackrel{def}{\cong} \begin{cases} 1 & x=0 \\ x(x-1)!, & x-1 \leq 1 \\ \neg! & , x>2 \end{cases}$

$\cong \begin{cases} 1, & x=0 \\ x!, & x \leq 2 \\ \neg!, & x>2 \end{cases}$

инд. хипотеза: $f_k(x) \cong \begin{cases} x!, & x<k \\ \neg!, & x \geq k \end{cases}$

за $f_{k+1}(x) \cong \Gamma(f_k)(x) \cong \begin{cases} 1, & x=0 \\ x\cdot f_k(x-1), & x>0 \end{cases} \cong \begin{cases} 1=x!, & x=0 \\ x(x-1)!=x!, & x-1<k, x>0 \\ \neg!, & x-1 \geq k \end{cases}$

$\cong \begin{cases} x!, & x<k+1 \\ \neg!, & x \geq k+1 \end{cases}$



$f_\Gamma = x!$

$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \ldots \subseteq$

По деф. $f = \bigcup_k f_k$ се деф. така $f(x) \cong y \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists_k \, (f_k(x) \cong y)$

За случая нека x - произволно. Тогава

$$f(x) = y \Leftrightarrow \exists k \;\; f_k(x) = x!$$

Нека $k = x+1$

$\Rightarrow f^{(x)} = x!$ за $\forall x$, т.е. $f_\Gamma(x) = x!$

г)

$$\Gamma(f)(x) \cong \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ 2 \cdot f(x-1) & , x > 0 \end{cases}$$

$f_0 = \emptyset^{(1)}$

$$f_1(x) \cong \Gamma(f_0)(x) \cong \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ \underbrace{2 \cdot \emptyset(x-1)}_{= ?!} & , x > 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) \cong \Gamma(f_1)(x) \cong \begin{cases} \\ \dots \\ \end{cases}$$

f_Γ е такава функция f, за която $f(x) \cong \Gamma(f)(x)$ т.е

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ 2f(x-1) & , x > 0 \end{cases}$$

$$f_k(x) = \begin{cases} 2^x & , x < k \\ ?! & , x \geq k \end{cases}$$ инд. хип.

$R: f(x) = \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } 2f(x-1)$

$f(x) \overset{x>0}{\Longrightarrow} 2 \cdot f(x-1) \overset{x>0}{\Longrightarrow} 2 \cdot f(x-2) \dots 2^x (\underset{\emptyset}{\underset{\parallel}{f_0}})$

$$f_{k+1}(x) \simeq \Gamma(f_k)(x) \simeq \begin{cases} 1 & , x=0 \\ 2\cdot f_{k-1}(x-1) & , x>0 \end{cases} \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} 1 = 2^x & , x=0 \\ 2\cdot 2^{x-1} = 2^x & , x>0, x-1<k \\ ?! & , x-1 \geq k \end{cases} \simeq \begin{cases} 2^x & , x < k+1 \\ ?! & , x \geq k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcup_k f_k = 2^x$$

e) $$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1 & , x=0 \\ \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 & , \text{ако } x \neq 0 \text{ и } x \text{ е четно} \\ 2\cdot\left(f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)^2 & , x \text{ не е четно} \end{cases}$$

R: $f(x) = \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else if } x \equiv 0(2) \text{ then } \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$
$\text{else } 2\left(f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)^2$

$x = 15 = 1111_{(2)}$ $\lg 15 = 4$

$f(15) \to 2(f(7))^2 \to 2(2(f(3))^2)^2 \to \ldots \to f(0)$

k) $\boxed{75/17}$

$$\Gamma(f)(x,y) = \begin{cases} 0 & , x=y \\ f(x,y+1)+1 & , x \neq y \end{cases}$$

R: $f(x,y) \simeq \text{if } x=y \text{ then } 0 \text{ else } f(x,y+1)+1$

функцията е $x-y$

$y \leq x: f(x,y) \to f(x,y+1)+1 \xrightarrow{x=y+1} 0+1 = 1$

$\xrightarrow{x>y+1} f(x,y+2)+1)+1 \to$

$k = x-y$ $f(x,y+3)+3 \to$

$\ldots f(x,y+k)+k \to \ldots 0+k$

$y > x: f(x,y) \to f(x,y+1)+1 \xrightarrow{x<y+1} f(x,y+2)+2 \to \dots$ Забива

Вижда се интуитивно, че R пресмята

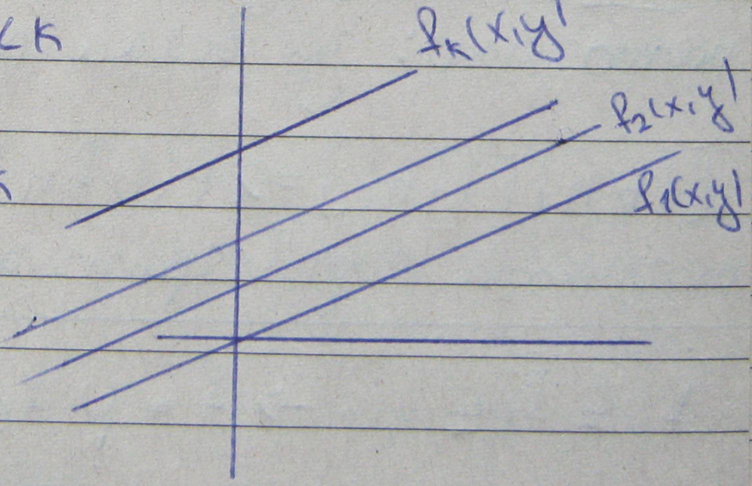
$$f_q(x,y) \simeq \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ ?!, & x < y \end{cases}$$

$f = f_r$

$$f_r(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ ?!, & x < y \end{cases}$$

инд. предпол./хипотеза

$$f_k(x,y) = \begin{cases} x-y, & 0 \leq x-y < k \\ & \text{иначе} \\ ?!, & x-y \geq k \end{cases}$$



ператори

инд пр. скот

$D_V(R)$

$D_N(R) \neq D_V(R)$

$D_N(R)$

Индуктивно правило на Скот

Правило на Скот

Нека $\Gamma: F_n \to F_n$ е компактен оператор, а $P(f)$ е свойство в F_n (на n-местните ф-ции), такава, че:

1) $P(\emptyset^{(n)})$
2) $P(f) \Rightarrow P(\Gamma(f))\ \forall f \in F_n$
3) P е непрекъснато свойство, т.е $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots$ и $(\forall k\ P(f_k))$, то $P(\bigcup_k f_k)$

(P е затворено)

Тогава $P(f_\Gamma)$

Деф: Нека $P(f)$ е свойство (т.е $P \subseteq F_n$). P е непрекъснато, ако: за всяка растяща редица $\{f_i\}$ в F_n:

$[(\forall n)P(f_n)] \Rightarrow P(\bigcup f_n)$ (свойството P е вярно за точната горна граница)

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots \to f = \bigcup_k f_k$$

$$P(f_0), P(f_1), \dots \Rightarrow P(f)$$

Д-во: От теорем. на Кнастер-Тарски:

$$f_\Gamma = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma^k(\emptyset$$

$$f_\Gamma = \bigcup(f_0 = \emptyset \subseteq f_1 \subseteq \underbrace{f_2}_{\Gamma(f_1)} \subseteq \dots \subseteq f_k \subseteq \underbrace{f_{k+1}}_{\Gamma(f_k)} \subseteq \dots)$$

Имаме, че $P(\emptyset)$ (1)
ако допуснем, че $P(f_n)$, то от (2): $P(\Gamma(f_n))$, т.е $P(f_{n+1})$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n\ P(f_n) \xRightarrow{(3)} P(\underbrace{\bigcup_n f_n}_{f_\Gamma})$ т.е $P(f_\Gamma)$

Примери за непрекъснати свойства:

(1) Частична коректност

$$P(f) \rightleftharpoons (\forall \bar{x})[I(\bar{x}) \wedge !f(\bar{x}) \to O(\bar{x}, f(\bar{x}))]$$

$I(\bar{x})$ - свойство в/у естествените числа

O - изходящо свойство

Ще покажем, че P е непрекъснато свойство:

Нека вземем $\{f_n\}$ - монотонно растяща редица от частични функции и $(\forall n)(P(f_n))$ (т.е. нека лявата част на импликацията е вярна)

Ще докажем, че $P(\bigcup_n f_n)$

Нека $\bar{x}$ е произв., такова че: $I(\bar{x}) \wedge !\underbrace{(\bigcup_n f_n)(\bar{x}) \simeq y}$

Деф. за точна горна граница:

$$(\bigcup_n f_n(\bar{x})) \simeq y \xleftrightarrow{def} (\exists n)[\underbrace{f_n(\bar{x}) \simeq y}]$$

$$P(f_n) \to O(\bar{x}, y)$$

По допускане $I(\bar{x})$ е вярно

Получихме, че това е вярно за точната горна граница

② Тотална коректност

$P(f) \rightleftharpoons (\forall \bar{x})[I(\bar{x}) \to !f(\bar{x}) \wedge O(\bar{x}, f(\bar{x}))]$

Ще докажем, че $P(f)$ е непрекъснато

Нека $\{f_n\}$ е монотонно растяща ~~ф~~ редица от частични функции и нека $(\forall n)P(f_n)$ е вярно.
Ще докажем, че $P(\bigcup_n f_n)$ е варно.

Нека $\bar{x}$ е произв. такова, че $I(\bar{x})$ е вярно.

От $(\forall n)P(f_n) \to !\, f_{42}(\bar{x}) \wedge O(\bar{x}, f_{42}(\bar{x}))$

От деф. на точна горна граница:

$\forall n \; f_n \subseteq \bigcup_n f_n$

Следователно $!\, f_{42}(\bar{x}) \simeq y \to !(\bigcup_n f_n)(\bar{x}) \simeq y$

Следователно $O(\bar{x}, \bigcup_n f_n(\bar{x})) \Rightarrow P(\bigcup f_n)$

<u>Следствие</u>: Ако P е от тип частична коректност $\Rightarrow$ можем да прилагаме инд. правило на Скот

P от тип тотална коректност:

$$\frac{P(\Theta^{(n)}) \wedge P(f) \to P(\Gamma(f))}{P(\bigcup f_n)}$$

! В нетривиалните случаи няма как да докажем инд. правило на Скот за свойства от тип тотална коректност.

Зад **84/4** Нека P_1 и P_2 са непрекъснати свойства на частични функции на n аргумента. Непрекъснати ли са:

а) $P_1 \wedge P_2$ ✓

б) $P_1 \vee P_2$ ✓

в) $\neg P_1$ ✗

Реш: а) $P_1 \wedge P_2$ е непрекъснато

$(P_1 \wedge P_2)(f) \rightleftharpoons P_1(f) \wedge P_2(f)$

Трябва да докажем, че

$\forall n\, (P_1 \wedge P_2)(f_n) \longrightarrow (P_1 \wedge P_2)(\bigcup f_n)$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n\, P_1(f_n) \xrightarrow{P_1 \text{- непр.}} P_1(\bigcup_n f_n) \\ \forall n\, P_2(f) \xrightarrow{P_2 \text{ е непр.}} P_2(\bigcup_n f_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ от деф на } \wedge \Rightarrow$$

$\Rightarrow (P_1 \wedge P_2)(\bigcup_n f_n)$

б) $P_1 \vee P_2$

$(P_1 \vee P_2) \rightleftharpoons P_1(f) \vee P_2(f)$

Трябва да докажем, че:

$\forall n\, (P_1 \vee P_2)(f) \longrightarrow (P_1 \vee P_2)(\bigcup f_n)$

Това означава:
Съществува $i \in \{1,2\}$
$\exists$ под. строго раст. ред $\{n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots\}$
така че $(\forall k)[P_i(f_{n_k})]$

Следователно $P_i(\bigcup_n f_n)$ защото P_i е непрекъснато

$\Rightarrow (P_1 \vee P_2)(\bigcup_n f_n)$

в) $\neg P_1$ – не е непрекъснато

Ще дадем контрапример:

. $P_1(f) \rightleftharpoons (\forall \bar{x})[\neg ! f(\bar{x})]$ е непрекъснато

$P_2(f) \rightleftharpoons (\exists \bar{x})[! f(\bar{x})]$ е непрекъснато

$(\forall n) P_1(f_n)$: $f_n = \emptyset^{(k)}$ $\Rightarrow P_1$ е непр.
$= \emptyset^{(k)}$ $\Rightarrow P_1(\bigcup_n f_n)$
$= \emptyset^{(k)}$

P_2: Нека вземем монотонно раст. редица

$(\forall n) P_2(f_n)$

$P_3 \rightleftharpoons (\exists \bar{x})[\neg ! f(\bar{x})]$ не е непрекъснато

Пример: $f(x) = 2x$
$$f_k(x) = \begin{cases} 2x & , x < k \\ \neg ! & , x \geq k \end{cases}$$

$(\forall n) P_3(f_n)$: $\neg ! f_n(n)$ за $\forall n$
$\bigcup_n f_n = f$ – това е тотална функция
$\Rightarrow$ не става

Извод: Непрекъснатите свойства не са затворени относно операцията отрицание ($\neg$)

$\boxed{85/5}$ Дадени са Γ_1 и Γ_2 - непрекъснати. Непрекъснати ли са:

а) $P_1(f) \rightleftharpoons \Gamma_1(f) \subseteq \Gamma_2(f)$ ✓

б) $P_2 \rightleftharpoons \Gamma_1(f) = \Gamma_2(f)$ ✓

Реш: а) $P_1 : (\forall n)[P_1(f_n)] \colon (\forall n)[\Gamma_1(f) \subseteq \Gamma_2(f_n)]$

Трябва да докажем, че: $P_1(\bigcup_n f_n)$

т.е дали $\Gamma_1(\bigcup_n f_n) \overset{?}{\subseteq} \Gamma_2(\bigcup_n f_n)$

Дали от това че Γ_1 и Γ_2 са непр. $\Rightarrow$

$\bigcup_n \Gamma_1(f_n) \overset{?}{\subseteq} \bigcup_n \Gamma_2(f_n)$

От $(\forall n)[\Gamma_1(f_n) \subseteq \Gamma_2(f_n)] \Rightarrow$

$\bigcup_n \Gamma_1(f_n) \subseteq \bigcup_n \Gamma_2(f_n) \Rightarrow$

$\Gamma_1(\bigcup_n f_n) \subseteq \Gamma_2(\bigcup_n f_n) \Rightarrow$

$P_1 \bigcup_n f_n$

$(\forall n)[g_n \subseteq h_n] \rightarrow \bigcup_n g_n \subseteq \bigcup h_n$

Произв. $!\bigcup_n g_n(\bar{x}) \simeq y \rightarrow !(\bigcup_n h_n)(\bar{x}) \simeq y$

$(\exists n[!g_n(\bar{x}) \simeq y$

$(\exists n)[!h_n(\bar{x}) \simeq y]$ защото $g_n \subseteq h_n$

$\Rightarrow \bigcup_n h_n(\bar{x}) \simeq y$

б) $P_2(f) \rightleftharpoons \Gamma_1(f) = \Gamma_2(f)$ е еквив:

$\underbrace{\Gamma_1(f) \subseteq \Gamma_2(f)}_{\text{непр}} \wedge \underbrace{\Gamma_2(f) \subseteq \Gamma_1(f)}_{\text{непр}}$, но от P_1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P_2 е непр.

$\boxed{85б}$ $\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x & , x < y \\ f(x-1,y) & , x \geq y \end{cases}$

Докажете, че: $(\forall x \forall y)[!f_\Gamma(x,y) \rightarrow f_\Gamma(x,y) < y]$

като $\Gamma(f_\Gamma) = f_\Gamma$

$\Gamma(g) = g \Rightarrow f_\Gamma \subseteq g$

<u>Реш:</u> Нека $P(f) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!f(x,y) \rightarrow f(x,y) < y]$

Прилагаме инд. пр. на Скот:

1) $P(\emptyset^{(2)})$ - вярно ли е? ~ Да, защото:
$f(x,y)$ - false $\Rightarrow$ $f(x,y) \rightarrow f(x,y) < y$ - true

2) ако $P(f) \rightarrow P(\Gamma(f))$

Нека x, y - произв. Приемаме, че $P(f)$ е вярно

<u>1 сл.</u> $x < y \Rightarrow \Gamma(f)(x,y) = x < y \Rightarrow$

$P(\Gamma(f)) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!\Gamma(f)(x,y) \rightarrow \Gamma(f)(x,y) < y]$

<u>2 сл.</u> $x \geq y$: Нека $\Gamma(f)(x,y)$ е дефинирано (т.е
$!\Gamma(f)(x,y) \simeq !f(x \dot{-} y, y)$)

$P(f): !f(x-y,y) \to f(x-y,y) < y$

$\downarrow$

$= \Gamma(f)(x,y)$

Доказахме $P(\Gamma(f))$

$\boxed{87/13}$ Нека

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} \frac{x}{2} & , x \text{ е четно} \\ f\left(f\left(\frac{3x+1}{2}\right)\right) & , x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Докажете, че за f_Γ е изпълнено:

$$(\forall x)\left(!f_\Gamma(x) \Rightarrow f_\Gamma(x) \leq \frac{x}{2}\right)$$

<u>Док:</u> $R: F(x) = \text{if } x \equiv 0(2) \text{ then } \frac{x}{2} \text{ else } f\left(f\left(\frac{3x+1}{2}\right)\right)$

Знаем от теорията, че НМНТ на Γ f_Γ е точно функцията, която ще се пресметне от R с "call by value" (CV)

Твърдим, че ако R спира в/у вход x, то резултатът е $\leq \frac{x}{2}$

Директно е трудно да се види

Нека $P(f) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall x\left(!f(x) \Rightarrow f(x) \leq \frac{x}{2}\right)$

Да видим, че P изпълнява 1) 2) и 3) от пр. на Скот:

1) $P(\emptyset): \forall x\left(\underbrace{!\emptyset(x)}_{false} \Rightarrow \emptyset(x) \leq \frac{x}{2}\right)$ ✓

3) P е непрекъснато

P е от тип „частична коректност", ако е от вида

$$P(f): \forall \bar{x} (I(\bar{x}) \& !f(\bar{x}) \Rightarrow O(\bar{x}, f(\bar{x})))$$

Нека $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ и нека $P(f_0), P(f_1), \dots, P(f_k)$

Защо $P(f)$ за $f = \bigcup_n f_n$?

x – произв. и нека $!f(x)$, т.е нека $f(x) \simeq y$

Тогава $\exists n\ f_n(x) \simeq y$

Но $P(f_n)$ е вярно, т.е $f(x) = y \le \frac{x}{2}$ QED

2) Нека f – произв. и нека $P(f)$

Ще докажем, че $P(\Gamma(f))$, т.е

$$\forall x (!\Gamma(f)(x) \Rightarrow \Gamma(f)(x) \le \frac{x}{2})$$

Нека $x \in N$ – произв. и нека $!\Gamma(f)(x)$ защо $\Gamma(f)(x) \le \frac{x}{2}$?

<u>1 сл:</u> x е четно: $\Gamma(f)(x) \stackrel{def}{\simeq} \frac{x}{2} \le \frac{x}{2}$ ✓

<u>2 сл:</u> x е нечетно: $\Gamma(f)(x) = f(f(\frac{3x+1}{2})) \le \frac{x}{2}$

$$f(f(\tfrac{3x+1}{2})) \stackrel{P(f)}{\le} \frac{f(\frac{3x+1}{2})}{2} \stackrel{P(f)}{\le} \frac{\frac{3x+1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{3x+1}{8} \le \frac{x}{2} ✓$$

$$6x+2 \le 8x$$

Зад Нека

$$\Gamma(f)(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2, & x > 0 \text{ е четно} \\ 3f(x-1), & x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

а) Докажете, че за f_Γ е изпълнено:

$\forall x\,(!f(x) \Rightarrow f_\Gamma(x) = 3^x)$

б) Докажете, че за $\forall x \; !f_\Gamma(x)$
(и следователно $f_\Gamma(x) = 3^x$)

Доказателство: а) $P(f) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x\,(!f(x) \Rightarrow f(x) = 3^x)$

(1) $P(\emptyset)$ - ясно

(3) - ясно

(2) Нека f - произволна и нека $P(f)$ (инд. хипотеза)
т.е имаме, че е вярно $\forall x\,(!f(x) \Rightarrow f(x) = 3^x)$

Ще покажем, че $\Gamma(f)$ е вярно

$P(\Gamma(f)) = \forall x\,(!\Gamma(f)(x) \Rightarrow \Gamma(f)(x) = 3^x)$

Нека x - произв. и нека $!\Gamma(f)(x)$

<u>1 сл</u>. $x = 0$: $\Gamma(f)(x) \overset{def}{=} 1 = 3^0$

<u>2 сл</u> $x > 0$ четно:

$\Gamma(f)(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ оттук имаме, че $!\,f\left(\frac{x}{2}\right)$

От инд. хипотеза $f\left(\frac{x}{2}\right) = 3^{\frac{x}{2}}$

Тогава $\Gamma(f)(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 3^x$

3 сл. $x > 0$ - нечетно: $\Gamma(f)(x) = 3 \cdot f(x-1) \Rightarrow !f(x-1)$

От инд. хипотеза $P(f) \Rightarrow f(x-1) = 3^{x-1}$

$\Gamma(f)(x) = 3 \cdot f(x-1) = 3^x$

По-общо нека $f = \Gamma(f)$ (f_Γ е една такава)

Да видим, че

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 & , x > 0 \text{ четно} \\ 3 f(x-1) & , x - \text{нечетно} \end{cases} \quad (*)$$

С пълна индукция да видим, че $!f(x)$

база: $x = 0$ $f(0) \overset{(*)}{=} 1$ и сл. $!f(x)$

$x > 0$ - четно $f(x) \overset{(*)}{=} \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, но $\frac{x}{2} < x$ и по инд. хип.

$\Rightarrow !f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow !f(x)$

$x > 0$ - нечетно: $f(x) \overset{(*)}{=} 3 f(x-1)$ $x - 1 < x \Rightarrow !f(x-1)$

$\Rightarrow !f(x)$

8.11

Зад Нека $\Gamma(f)(x,y) \simeq$ if $p(x)$ then y else $h(f(k(x), y))$ (тук h и k са фиксирани функции, а p е предикат). Докажете, че за f_Γ е изпълнено:

$$\forall x \forall y \, (h(f_\Gamma(x,y)) \simeq f_\Gamma(x, h(y)))$$

Реш:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y & , p(x) \\ h(f(k(x), y)) \end{cases}$$

$P(f) \Leftrightarrow \forall x \forall y \, (h(f(x,y)) \simeq f(x, h(y)))$

1сл. ~~$P(x)$~~ ~~Тогава~~

(1) $P(\emptyset): \forall x \forall y\, (h(\underbrace{\emptyset(x,y)}_{\neg!}) \simeq \emptyset(\underbrace{x, h(y)}_{\neg!}))$

(3) P е непрекъснато

(2) f - произволна и нека е изпълнено $P(x)$, т.е
$\forall x \forall y\, (h(f(x,y)) \simeq f(x, h(y)))$

$P(\Gamma(f)): \forall x \forall y\, (h(\underbrace{\Gamma(f)(x,y)}_{y}) \simeq \underbrace{\Gamma(f)(x, h(y))}_{h(y)})$?

1 сл: $P(x)$ тогава ↗

2 сл: $\neg P(x)$: $h(\Gamma(f)(x,y)) = h(h(f(k(x),y)))$ $\overset{?}{=}$

$\Gamma(f)(x, h(y)) = h(f(k(x), h(y))$

$\Leftrightarrow h(f(k(x), y) \simeq f(k(x), h(y))$
което е вярно от $P(f)$, за $x = k(x)$

$\boxed{90/20\text{-}б}$
$$\Gamma(f) \simeq \begin{cases} 0 & , y=0 \\ f(1, y-1) & , x=0 \,\&\, y>0 \\ f(f(x-1, y-1), y-1)+1 & , x>0 \,\&\, y>0 \end{cases}$$

Докажете, че $(\forall x \forall y)[!f_\Gamma(x,y) \to f_\Gamma(x,y) \geq \min(x,y)]$

Док: 1) Проверяваме, че Γ е компактен
2) Деф. свойство P и доказваме, че P е непр. свойство
3) Доказваме, че $P(f_\Gamma)$ с правило на Скот.

1) Γ е компактен?

Ще докажем, че Γ е монотонен, т.е:

$(\forall f, g)[f \subseteq g \to \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)]$

Да фиксираме $f \subseteq g$

<u>1сл</u> $y=0$: $\Gamma(f)(x,y) \simeq 0 \simeq \Gamma(g)(x,y)$

<u>2сл</u> $x=0 \,\&\, y>0$: $\Gamma(f)(x,y) \overset{def}{\simeq} f(1,y-1) \overset{def,\, f\subseteq g}{\simeq} g(1,y-1)$

$\overset{def}{\simeq} \Gamma(g)(x,y)$

<u>3сл</u> $x>0 \,\&\, y>0$: $\Gamma(f)(x,y) \overset{def}{\simeq} f(f(x-1,y-1),y-1)+1 \simeq$

$\simeq u+1$

В другата посока:

$(\forall f)(\forall x,y,z)[\Gamma(f)(x,y)\simeq z \to (\exists \theta - \text{крайна})[\theta \subseteq f \,\&$
$\Gamma(\theta)(x,y)\simeq z]]$

фиксираме f: $!\Gamma(f)(x,y)\simeq z$

<u>1сл</u> $y=0$: $\theta = \emptyset^{(2)}$ $\Gamma(\theta)(x,y)\simeq z$

<u>2сл</u> $x=0 \,\&\, y>0$: $\Gamma(f)(x,y-1)\simeq f(1,y-1)\simeq z$

$\theta = \{\langle 1, y-1, z\rangle\}$ т.е

$\theta(1,y-1)\simeq z \,\&\, \forall x'\neq x\ \forall y'\neq y-1 : \neg!\theta(x',y')$

3 сл: $x > 0 \& y > 0$:

$$!\Gamma(f)(x,y) \simeq !f(\underbrace{!\overbrace{f(x-1,y-1)}^{v},y-1)}_{u}+1 \simeq z$$

$$\Theta = \{\langle x-1, y-1, v\rangle, \langle v, y-1, u\rangle\}$$

$$\Gamma(\Theta)(x,y) \simeq \Theta(\Theta(x-1,y-1),y-1)+1 \simeq$$

$$\Theta(v, y-1)+1 \simeq u+1 \simeq z$$

2) $P(f) \rightleftarrows (\forall x,y)[!f(x,y) \to f(x,y) \geq \min(x,y)]$

$$\forall x \forall y\ [I(\bar{x}) \& !f(\bar{x}) \to O(\bar{x}, f(\bar{x}))]$$

Например: $I(x,y) \rightleftarrows 0 = 0$
Също така: $O(x,y\ f(x,y)) \rightleftarrows f(x,y) \geq \min(x,y)$
Следователно P е условие от тип вастилна кор.
ст. P е непрекъснато свойство

3) $(\forall x \forall y)[!f(x,y) \to f(x,y) \geq \min(x,y)]$

? $P(\Theta^{(2)})$
Нека $P(f)$, нека $!\Gamma(f)(x,y) \simeq z$

1 сл $y = 0$: $\Gamma(f)(x,y) \simeq 0 \geq \min(x,y) = 0$

2 сл $x = 0 \& y \geq 0$: $!\Gamma(f)(x,y) \simeq z \geq 0 = \min(x,y)$

3 сл $x > 0 \& y > 0$: $\Gamma(f)(x,y) \simeq f(f(x-1,y-1),y-1)+1 \simeq z$

От $P(f)$: $\underbrace{f(x-1,y-1)}_{v} \geq \min(x-1,y-1)$ (1)

$\underbrace{f(v, y-1)}_{u} \geq \min(v, y-1)$ (2)

(1) и (2) => $u \geq \min(v, y-1)$

$u \geq \min(x-1, y-1)$

$u+1 \geq \min(x-1, y-1)+1$

$z \geq \min(x, y)$

$\left.\begin{array}{l} v \geq \min(a,b) \\ u \geq \min(v,b) \end{array}\right\} u \geq \min(a,b)$

$\Rightarrow P(f) \rightarrow P(\Gamma(f))$

$P(\Theta^{(2)})$ & $P(f) \Rightarrow P(\Gamma)(f) \Rightarrow P(f_\Gamma)$ е изпълнено

$\boxed{\text{Зад}}$ $\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } y \mid x \text{ - } y \text{ дели } x \\ f(f(x, y+1), x), & \text{ако } y \nmid x \text{ - } y \text{ не дели } x \end{cases}$

Докажете, че $(\forall x \forall y)[!f_\Gamma(x,y) \& y \nmid x \rightarrow f_\Gamma(x,y) \mid x]$

Доказателство: Дефинираме:

$P_1(f) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!f(x,y) \& y \nmid x \rightarrow f(x,y) \mid x]$

$P_2(f) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!f(x,y) \& y \mid x \rightarrow f(x,y) \simeq y]$

Опред. $P(f) \rightleftharpoons P_1(f) \overset{\&}{\wedge} P_2(f)$

1) и 2) са тривиални

3) $P(\Theta^{(2)})$

$P(f)$ Ще докажем, че $P_1(\Gamma(f))$ т.е

Нека вземем x, y: $!\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ & $y \nmid x$

$\Gamma(f)(x,y) \cong z \cong f(\underbrace{f(x,y+1)}_{u}, x)$

$!f(u,x) \cong z$

$- \ x \nmid u \xrightarrow{P_1} \cancel{u = y+1} \ f(u,x) \mid u$

$- \ x \mid u \xrightarrow{P_2} f(u,x) \cong x \cong z \to z \mid x$

$!f(x,y+1) \cong u$

$\underbrace{y+1 \mid x \xrightarrow{P_2} u = y+1}_{u \mid x}$

$y+1 \nmid x \xrightarrow{P_1} \underbrace{f(x,y+1)}_{u} \mid x$

Сл $u \mid x$

Сл $P_1(\Gamma(f))$

22.04.2013

Деф: $A = (A, \sqsubseteq, \perp)$ е Област на Скот, ако:
1) $\perp \in A$ е най-малкия ел. на A (т.е. $\perp \sqsubseteq a$ за $\forall a \in A$)
2) $(\forall a \in A)[\perp \sqsubseteq a]$
3) $\sqsubseteq$ е рефлексивна, транзитивна и антисим.
4) За в. монотонно растящи редици $\{a_i\}$ в A: съществува точна горна граница $\bigcup a_i \in A$

Примери: $(F_n, \subseteq, \emptyset^{(n)})$ - О.С

$(\mathbb{N}, \leq, 0)$ - не е О.С

$(P(\mathbb{N}), \subseteq, \emptyset$ - О.С. P - мн. от подм. на ест. числа.

$\boxed{\text{Зад}}$ Нека X - множ., A - О.С

$$Tot = \{ f : X \to A \text{ е тот.} \}$$

$\leq$ - частична наредба т.е: $\forall a\, (a \leq a)$
$\forall a \forall b\, (a \leq b \;\&\; b \leq a \Rightarrow a = b)$
$\forall a \forall b \forall c\, (a \leq b \;\&\; b \leq c \Rightarrow a \leq c)$

$(Tot, \leq, \Omega)$ (Ω - най-малък ел. на Tot)

$\Omega \in Tot$

$(\forall x)[\Omega(x) = \bot_A]$

$$f \leq g \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall x)[f(x) \leq_A g(x)]$$

Област на Скот ~~ли~~ е $(Tot, \leq, \Omega)$?

→ $(\forall x)[\Omega(x) \leq_A f(x)]$ за $\forall f \in Tot$:
$\Omega \leq f$

→ $\leq$ е частична наредба

→ Нека $\{f_i\}$ е монот. раст. редица в Tot

монот. раст	x_0	$\{f_0(x_0) \leq_A f_1(x_0) \leq_A \dots\}$ в A
	$\dots$	$\dots$
монот. раст.	x_n	$\{f_0(x_n) \leq_A f_1(x_n) \leq_A \dots\}$ в A
	$\dots$	$\dots$

$$h(x) = \bigcup_i \{f_i(x)\}$$

$h \in Tot$

$\rightarrow$? $(\forall i)[f_i \leq h] \leftrightarrow$

$(\forall i)(\forall x)[f_i(x) \leq_A h(x)] \leftrightarrow$

$(\forall x)(\forall i)[f_i(x) \leq_A h(x)] \leftrightarrow$

За произволно x:

$\{f_i(x)\}_i$ е монот. раст в A:

$(\forall i)[f_i(x) \leq_A \bigcup_i f_i(x) \stackrel{def}{=} h(x)] \leftrightarrow$

$(\forall i)[f_i \leq h]$

- $(\forall i)[f_i \leq g] \stackrel{?}{\rightarrow} h \leq g$

За произволно x:

$\left.(\forall i)[f_i(x) \leq_A g(x)] \rightarrow \bigcup_i f_i(x) \leq_A g(x)\right\} \Rightarrow$

$(\forall x)[h(x) \leq_A g(x)] \Rightarrow h \leq g$

Пример: за $A \leq N$:

$$f_A(n) = \begin{cases} 0, & n \notin A \\ 1, & n \in A \end{cases}, \quad \{f_A : N \rightarrow \{0,1\}\} \stackrel{}{=} O.C$$

Декартови произведения на О.С.

$A_1, \dots, A_n$ са О.С. $\quad A_i = (A_i, \leq_i, \perp_i)$

$A_1 \times \dots \times A_n = (A_1 \times \dots \times A_n, \leq, \perp)$ е О.С. ?

$\perp = (\perp_1, \dots, \perp_n)$

$\bar{a} \leq \bar{b} \leftrightarrow a_1 \leq_1 b_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq_n b_n$

- $\perp \leq \bar{a}$ за вс. $\bar{a} \in A \times \dots \times A_n$

- $\leq$ е част. наредба
- $\{\bar{a}_i\}$ е монот. раст. в $A_1 \times \ldots \times A_n$

Озн. $\bar{a}_i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$

$\rightarrow a_1^0 \leq_1 a_1^1 \leq_1 a_1^2 \leq_1 \ldots \qquad \bigcup_i a_1^i$ в A_1

$\ldots$

$a_n^0 \leq_n a_n^1 \leq_n a_n^2 \leq_n \ldots \qquad \bigcup_i a_n^i$ в A_n

$\bar{b} = (\bigcup_i a_1^i, \ldots, \bigcup_i a_n^i) \in A_1 \times \ldots \times A_n$

$-(\forall i)[\bar{a}_n \leq \bar{b}]$

$(\forall i)[a_1^i \leq_1 \underset{= \bigcup_i a_1^i}{b_1} \wedge \ldots \wedge a_n^i \leq_n \underset{= \bigcup_i a_n^i}{b_n}]$

$-(\forall i)[\bar{a}_i \leq \bar{c}]$

$(\forall i)[\underbrace{a_1^i \leq_1 c_1} \wedge \ldots \wedge \underbrace{a_n^i \leq_n c_n}]$

$\underset{= b_1}{\bigcup_i a_1^i} \leq_1 c_1 \qquad \underset{= b_n}{\bigcup_i a_n^i} \leq_n c_n$

$\boxed{\text{Зад}}$ $f : A_1 \rightarrow A_2$, A_1, A_2 са О.С.

f е непр. $\leftrightarrow$ $\forall$ мон. раст $\{a_i\}$ в A_1: $f(\bigcup_i a_i) = \bigcup_i f(a_i)$

<u>решение:</u>

— $f : A_1 \rightarrow A_2$ е монотонно:

$(\forall a, b)[a \leq_1 b \rightarrow f(a) \leq_2 f(b)]$

f е непр. $\rightarrow f$ е мон.

$a \leq_1 b$ в A_1

$\bigcup \{a \leq_1 b \leq_1 b \leq b \ldots\} = b$

$f(b) \overset{\text{непр}}{=} \bigcup \{f(a), f(b)\}$ $\quad$ сл. $f(a) \leq_2 f(b)$

$f_1 : A \to A_1$ – непр.

...

$f_n : A \to A_n$ – непр.

$f : A \to A_1 \times \ldots \times A_n$ – О.С.

$f(a) = (f_1(a), \ldots, f_n(a))$ е непр.

Нека $\{a_i\}$ е монот. раст. в A:

$$f(\bigcup_i a_i) \stackrel{?}{=} \bigcup_i f(a_i)$$

$$(f_1(\bigcup a_i), \ldots, f_n(\bigcup a_i)) = \bigcup_i (f_1(a_i), \ldots, f_n(a_i))$$

f_k е непр. $\to$ f_k е монот.:

$\underbrace{\{f_k(a_i)\}}_{b_k^i}$ е монот. раст в A_k

Получаваме: $\{(b_1^i, \ldots, b_n^i)\}_i$ е монот. раст. в $A_1 \times \ldots \times A_n$

Тя има точна горна граница $\bar{b}$:

$$\bar{b} = (\bigcup_i b_1^i, \ldots, \bigcup_i b_n^i) = (\bigcup_i f_1(a_1), \ldots, \bigcup_i f_n(a_i))$$

$\| \mathrm{def}$

$$\bigcup_i (b_1^i, \ldots, b_n^i) = \bigcup_i (f_1(a_i) \ldots f_n(a_i))$$

$$\stackrel{?}{=} (\bigcup_i f_1(a_i), \ldots, \bigcup_i f_n(a_i)) = (f_1(\bigcup a_i), \ldots, f_n(\bigcup_i a_i))$$

$\boxed{13.05.2013}$ Наредбата $\sqsubseteq$ се нарича <u>плоска наредба</u> и се определя:

$$x \sqsubseteq y \iff x = \bot \vee x = y$$

Структурата $(D_\bot, \sqsubseteq, \bot)$ се нарича <u>плоска област на Скот</u>

X, $\bot \notin X$

$(X \cup \{\bot\}, \sqsubseteq, \bot)$

$x \sqsubseteq y \iff x = \bot \vee x = y$

$\boxed{\text{зад}}$

• Ако са О.С.

Нека за всички $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ в A_1:

$(\forall i)[a_i \leq_1 a_{i+1}]$, то съществува n_0:

$(\forall i \geq n_0)[a_i = a_{n_0}]$.

Докажете, че $f: A_1 \to A_2$ е монот, то f е непр.

Реш: • $a \leq_1 b \to f(a) \leq_2 f(b)$

? $f(\bigcup a_i) = \bigcup f(a_i)$ за вс. монот. раст. редица $\{a_i\}$ в A_1

Нека да фиксираме $\{a_i\}$ - монот. раст. в A_1

$(1)\ (\forall i)[a_i \leq_1 \bigcup a_i] \xrightarrow{f \text{ е мон.}}$

$(\forall i)[f(a_i) \leq_2 f(\bigcup a_i)] \to$

$\bigcup_i f(a_i) \leq_2 f(\bigcup_i a_i)$

(2) Ще док. че $f(\bigcup a_i) \leq_2 \bigcup f(a_i)$

Нека $f(a_i) = b_i$

$\{b_i\}$ е монот. раст. в A_2

Нека $f(\bigcup a_i) = c$

Същ. n_0: $(\forall i \geq n_0)[a_i = a_{n_0}] \to \bigcup a_i \geq a_{n_0}$

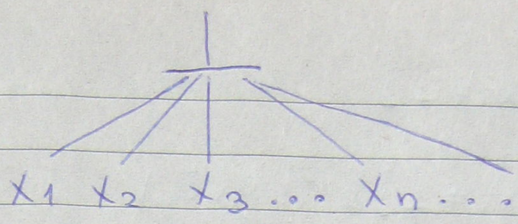
$(\forall i \geq n_0)[b_i = b_{n_0}]$

См. $f(\bigcup a_i) = c = f(a_{n_0}) = b_{n_0}$

$\{b_i\}$ е монот. раст $\to b_{n_0} \leq_2 \bigcup b_i = \bigcup f(a_i)$

$$\underbrace{\overset{c}{\parallel} = f(\bigcup_i a_{n_i})}_{f(\bigcup_i a_i) \leq_2 \bigcup_i f(a_i)}$$

Следствие:



Следователно в плоските О.С мон. изобр = непр. изобр.

$A_1 \dots A_n$ – плоски О.С

$A_1 \times \dots \times A_n = A$

$n = 2$: $A_1 \times A_2 = A$

$(x, y) \le (x', y') \longleftrightarrow$

$x' \sqsubseteq_1 x' \wedge \sqsubseteq_2 y'$

$(\perp_1, \perp_2) \le (x, \perp_2) \le (x, y)$

$\le$

$(\perp_1, y) \le (x, y)$

$A_1 \times \dots \times A_n$: макс. монот. раст. редица: $n+1$ члена

• $f : D_\perp^n \to C_1$

f е монот. $\longleftrightarrow$ f е непр.

• $f : D_\perp^n \to C_1$ е точна ако:
$(\forall \bar{a} \in D^n)(\exists i)[a_i = \perp \to f(\bar{a}) = \perp]$

• $g : D^n \to C$ $\quad g_\perp$ е точно продължение на g

$$g_\bot(\bar a) \begin{cases} \bot, & (\exists i)[a_i = \bot] \\ \bot, & (\forall i)[a_i \neq \bot] \;\&\; \neg! g(\bar a) \\ g(\bar a), & (\forall i)[a_i \neq \bot] \;\&\; ! g(\bar a) \end{cases}$$

$f : Q \to Q$ | $f_1 : Q_1 \to Q_1$

$f(x,y) \simeq \frac{x}{y}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 1 \vee y = 1 \\ 1, & y = 0 \\ \frac{x}{y}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Искаме да док. следното твърдение:

$g : D_1^n \to Ч_1$ е точна $\leftrightarrow$
$\exists f : g^n \to Ч \;\&\; g = f_\bot$

(1) Нека $g = f_\bot$, за някое f.
($\leftarrow$) От деф. $\to g$ е точна.

($\to$) Нека g е точна

Опр. $f : g^n \to Ч$:

$$f(\bar a) \simeq \begin{cases} g(\bar a), & g(\bar a) \neq \bot \\ \neg!, & g(\bar a) = \bot \end{cases}$$

Док. че $f_\bot = g$

$$f_\bot(\bar a) = \begin{cases} \bot, & \text{за някое } i \\ \bot, & \neg! f(\bar a) \text{ (не е дефинирано)} \\ g(\bar a), & \text{иначе} \end{cases}$$

(деф. за $f_\bot$)

• Нека $\bar{a} \in D^n$, тогава:

$g(\bar{a}) \neq \perp \rightarrow g(\bar{a}) = f_\perp(\bar{a})$

$g(\bar{a}) = \perp \rightarrow f(\bar{a})$ (не е деф.) $\neg ! f(\bar{a})$)

$\rightarrow g(\bar{a}) = f(\bar{a})$

Нека $\bar{a} \notin D^n \rightarrow a_i = \perp$ за някое i

Тогава $g(\bar{a}) = \perp = f_\perp(\bar{a})$.

Кнастер - Тарски за непрекъснати изображения

Нека $(A_1, \leq_1, \perp_1)$ и $(A_2, \leq_2, \perp_2)$ са области на Скот. Казваме, че изображението $f: A_1 \rightarrow A_2$ е монотонно, ако при всеки избор на a и b от A_1 е изпълнено че:

$a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)$

Изображението $f: A_1 \rightarrow A_2$ наричаме изброимо непрекъснато (или само непрекъснато), ако за всяка монотонно растяща редица $\{a_k\}$ от елементи на A_1 е в сила равенството

$$f(\bigcup_k a_k) = \bigcup_k f(a_k)$$

В някои случаи е по-лесно да се прилож индукционното правило на Скот, а не теоремата на Кнастер-Тарски.

На изпита ще има такъв тип задача

Теорема за НМНТ:

Дадена е следната област на Скот:

$(A, \leq, \perp)$

$f: A \to A$ е непр.

$a \in A$ е най-малка неподвижна точка за f:

(1) $f(a) = a$ (a е неподвижна точка на f)

(2) $(\forall b)[f(b) = b \to a \leq b]$ (a е най-малката сред неподвижните точки на f)

$\boxed{\text{Теорема}}$ ~~Нека $(A, \leq,$~~

Тогава f има най-малка неподвижна точка a_f:

$$a_f = \bigcup_n \{f^n(\perp)\}$$

• Нека $a_n = f^n(\perp)$ ($f^n(\perp) \to n$ пъти прилагаме f върху $\perp$)

• $\{a_n\}$ е монотонно растяща редица

$a_0 = f^0(\perp) = \perp \leq a_1 = f(\perp)$

• $\left.\begin{array}{l} a_n = f^n(\perp) \leq a_{n+1} = f^{n+1}(\perp) \\ f \text{ е непр} \to f \text{ е монот} \end{array}\right\}$

$a_n \leq a_{n+1} \to \underbrace{f(a_n)}_{= a_{n+1}} \leq \underbrace{f(a_{n+1})}_{= a_{n+2}}$

• $a_f = \bigcup a_n$ (Нека a е точна горна граница)

$$f(a_f) = f\left(\bigcup_n f^n(\perp)\right) \overset{f \text{ е непр.}}{=} \bigcup_n f(f^n(\perp)) = \bigcup_n f^{n+1}(\perp) = a_f$$

(Почваме от a_1, не от a_0 при което най-големия член си остава си остава същия, следователно a_f е неподвижна точка)

• Нека $f(b) = b$

Ще докажем, че $(\forall n)[a_n \leq b]$

$n = 0: \ a_0 = \bot \leq b$

$$\left.\begin{array}{l} n>0: a_n \leq b \\ f \text{ е монот.} \end{array}\right\} \ \underbrace{a_{n+1} = f(a_n) \leq f(b)}_{} = b$$

$$(\forall n)[a_n \leq b] \rightarrow a_f \leq b$$

По този начин могат да се докажат свойства-та на програмата чрез Кнастер-Тарски.

$\boxed{\text{Зад}}$ $\boxed{138/8}$ $$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y, & y = \varepsilon \quad x = \varepsilon \\ f(cdr(x), cons(car(x), y)) \end{cases}$$

Дефинираме $rev(x) = f_r(x, \varepsilon)$ (f_r - НМНТ на този оператор)

Да се докаже, че:

(1) $rev: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ е тотална

(2) $(\forall x \in \Sigma^*)[rev(rev(x)) = x]$

Решение: (1) Можем да използваме индукция, защото: $(\Sigma^*, \prec)$ е фундирана наредба

Ще трябва да докажем, че $\forall x \forall y$ f_r завършва, което е по-общо от ~~та~~ това което искаме да докажем (което се иска в (1))

$\forall x \forall y \, [!f_r(x,y)] \leftarrow$ трябва да го докажем (от това ще следва нашето твърдение). Ще използваме структур~~на~~ индукция по $\prec$ (по x).

$- \; x = \varepsilon : [\, f_r(\varepsilon, y) = \Gamma(f_r)(\varepsilon, y) = y \,\} \; \forall y$

$- \; x \neq \varepsilon$: За произволно y:

$$f_r(x, y) = \Gamma(f_r)(x, y) = f(cdr(x), \underbrace{cons(car(x), y)}_{= z})$$

$$cdr(x) < x : \; !\, f_r(cdr(x), z)$$
$$= f_r(x, y)$$

За домашно да се докаже (2) (чрез структурна индукция или правило на Скот)

$$rev(rev(x, y)) \stackrel{?}{=} rev(y, x)$$

20.05.2013 Денотационна семантика на програми

Означение: $D_V(R): D^n \xrightarrow{\circ} D$
където R – програма.

Зад R: $F(x, \varepsilon)$, where (reverse на string)
$F(x,y) = \text{if } x = \varepsilon \text{ then } y$
$\text{else } F(cdr(x), cons(car(x), y))$

Идеята е на тази програма да съпоставим оператор.

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y & , x = \varepsilon \\ f(cdr(x), cons(car(x), y)) & , x \neq \varepsilon \end{cases}$$

$rev(x) = f_\Gamma(x, \varepsilon)$

Идеята е да докажем, че $D_V(R)(x) = rev(x)$

Програмата се състои от редица термове:

Термове от тип D са
- константи (пр. $\varepsilon, 0, 1, \dots$)
- променливи (пр: $x, y, \dots$)
- ако f e основна операция от тип $D^n \to D$ (пр: $+, -, cons, \dots$) а $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове от тип D, то $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ е терм от тип D.
- ако F e функц. променлива от тип $D^n \to D$, а $\tau_1, \dots, \tau_n$ – термове от тип D, то $F(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е терм от тип D.

(функц. пром се озн. с главни букви)

Термове от тип B са:

- булевите константи tt и ff.
- ако p е основна операция от тип $D^n \to B$, а $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове от тип D, то $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е терм от тип B
- ако π е основна операция от тип $B^n \to B$, а $p_1, \dots, p_n$ са термове от тип B, то $\pi(p_1, \dots, p_n)$ е терм от тип B

Условни термове са:

- ако p е терм от тип B, а τ_1 и τ_2 са термове от тип D, то if p then τ_1 else τ_2 е условен терм
- ако p е терм от тип B, а τ_1 и τ_2 са условни термове от тип D, то if p then τ_1 else τ_2 е условен терм

Рекурсивна програма в типа Data се нарича R:

$$
R: \begin{array}{|l}
\tau_0(\overbrace{X_1, \dots, X_n}^{=\bar{X}}, \overbrace{F_1^{m_1}, \dots, F_k^{m_k}}^{=\bar{F}}), \text{ where} \\
F_1^{m_1}(X_1, \dots, X_n) = \tau_1(\bar{X}, \bar{F}) \\
\dots \\
F_k^{m_1}(X_1, \dots, X_n) = \tau_k(\bar{X}, \bar{F}),
\end{array}
$$

$\tau_0(X, F) = F(X, \varepsilon)$

$\tau_1(X, Y, F)$

$$
R: \begin{array}{|l}
\overbrace{F(X, \varepsilon)}, \text{ where} \\
F(X, Y) = \text{if } (X = \varepsilon \text{ then } Y \\
\qquad \text{else } F(cdr(X), cons(car(X), Y)))
\end{array}
$$

Нека е даден терм $\tau(X_1, \dots X_n, F_1^{m}, \dots, F_k^{m_k})$. Нека $a_1, \dots, a_n \in D$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ са частични функции съответно на $m_1, \dots, m_k$ аргумента в D. Стойността $\tau(a_1, \dots, a_n, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$, съкратено $\tau(\bar{a}, \bar{\varphi})$, на терма τ се дефинира индуктивно:

а) ако τ е константата c, то $\tau(\bar{a}, \bar{\varphi}) \simeq c$

б) ако $\tau = x_i$, то $\tau(\bar{a}, \bar{\varphi}) \simeq a_i$

в) ако $\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_l)$, където f е l-местна осн. операция, то

$$\tau(\bar{a}, \bar{\varphi}) \simeq \tau_1(\bar{a}, \bar{\varphi}), \dots, \tau_l(\bar{a}, \bar{\varphi}));$$

г) ако $\tau = \text{if } p \text{ then } \tau_1 \text{ else } \tau_2$, то

$$\tau(\bar{a}, \bar{\varphi}) \simeq \begin{cases} \tau_1(\bar{a}, \bar{\varphi}), & \text{ако } p(\bar{a}, \bar{\varphi}) \simeq tt \\ \tau_2(\bar{a}, \bar{\varphi}), & \text{ако } p(\bar{a}, \bar{\varphi}) \simeq ff \\ \neg!, & \text{ако } \neg! \, p(\bar{a}, \bar{\varphi}); \end{cases}$$

д) ако $\tau = F_i^{m_i}(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})$, то

$$\tau(\bar{a}, \bar{\varphi}) \simeq \varphi_i(\tau_1(\bar{a}, \bar{\varphi}), \dots, \tau_{m_i}(\bar{a}, \bar{\varphi}))$$

Семантика на програмата

$$\tau_0(\overbrace{X_1, \dots, X_n}^{\bar{X}}, \overbrace{F_1, \dots, F_k}^{\bar{F}}), \text{ where}$$

$$F_1^{m_1}(x_1, \dots, x_n) = \tau_1(\bar{X}, \bar{F}) \to \Gamma_1(\bar{f})(\bar{a}) \simeq \tau_1(\bar{a}, \bar{f})$$

$$F_k^{m}(x_1, \dots, x_{m_k}) = \tau_k(\bar{X}, \bar{F}) \to \Gamma_k(\bar{f})(\bar{a}) \simeq \tau_k(\bar{a}, \bar{f})$$

На всеки ред съпоставяме оператор

Получихме система от непрекъснати оператори.

Нека $\Delta(\bar{f}) = (\Gamma_1(\bar{f}) \ldots \Gamma_k(\bar{f}))$

$\Delta : \mathcal{F}_{m_1} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \to \mathcal{F}_{m_1} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k}$

Ако $\Gamma_1 \ldots \Gamma_k$ са непрекъснати то Δ е непр

$$A \text{ е О.С.} \quad \left.\begin{array}{l} \Gamma_1 : A \to \mathcal{F}_1 \\ \ldots \\ \Gamma_k : A \to \mathcal{F}_k \end{array}\right\} \text{непрекъснато изображение}$$

$\Delta : A \to A : \Delta(\bar{f}) = \Gamma_1(\bar{f}) \ldots \Gamma_k(\bar{f})$

Следователно притежава НМНТ (това е вектор от неподвижни точки)

$$\Delta(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi} : \left| \begin{array}{l} \Gamma_1(\bar{\varphi}) = \varphi_1 \\ \ldots \\ \Gamma_k(\bar{\varphi}) = \varphi_k \end{array}\right.$$

Търсим най-малката НМНТ на системата

Деф Тогава $Dev(R)(\bar{a}) \simeq \tau_0(\bar{a}, \underset{\downarrow}{\bar{\varphi}})$

най-малкото реш. на системата.

$rev(x) = f_r(x, \varepsilon) \simeq$ ~~$f_r(x, \varepsilon)$~~ $\tau_0(x, f_r) \simeq D_v(R)(x)$

$\boxed{\text{зад}}$

$$R : \left| \begin{array}{l} \overbrace{F(X, X, 1)}^{\tau_0(X,Y,S,F,G)}, \text{ where} \\ \left.\begin{array}{l} F(X, Y, S) = \text{if } Y = 0 \text{ then } S \\ \qquad\qquad \text{else } F(X, Y-1, G(X, S, 0)) \end{array}\right\} \tau_1(X,Y,S,F,G) \\ \left.\begin{array}{l} G(X, Y, S) = \text{if } X = 0 \text{ then } S \\ \qquad\qquad \text{else } G(X-1, Y, Y+S) \end{array}\right\} \tau_2(X,Y,S,F,G) \end{array}\right.$$

Докажете, че $(\forall a)[!D_v(R)(a) \to D_v(R)(a) \simeq a^a]$

$$\frac{P(\bot) \& P(a) \to P(f(a))}{P(f)}$$

$f: A \to A$ е непрекъсната

a_f е непрекъснато свойство акка:

$\{a_i\}$ – моном. растяща редица в A

$\forall_i\ P(a_i) \to P(\cup a_i)$

Решение: $D_v R(a) \cong \tau_0(a.a, \varphi_1, \varphi_2) \cong \varphi_1\ a.a.1$

φ_1, φ_2 – Най-малките неподвижни точки относно двата терма

$$\Gamma_1(f,g)(x,y,s) \simeq \begin{cases} s & , y = 0 \\ f(x, y-1, g(\cancel{x}, s, 0)) & , y > 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f,g)(x,y,s) \cong \begin{cases} s & , x = 0 \\ g(x-1, y, y+s & , x > 0 \end{cases}$$

$\Delta(f,g) = \Gamma_1(f,g), \Gamma_2(f,g)$

Нека (φ_1, φ_2) е НМНТ на Δ

$P_1(f,g) \rightleftharpoons (\forall x, \forall y, \forall s)[!f(x,y,s) \to f(x,y,s) \cong x^y . s]$

тук f е фиктивен за P_2, но се пише защото $P = P_1 \wedge P_2$

$P_2(f,g) \rightleftharpoons (\forall x\ \forall y\ \forall s)[!g(x,y,s) \to g(x,y,s) \cong x \cdot y + s]$

Трудно е веднага да се види какво правят f и g, затова ги разписваме

P_1, P_2 – непрекъснати свойства.

$P(f,g) = P_1(f,g) \wedge P_2(f,g)$

$A = \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_3$ защото $F(x,y,s)$ и $G(x,y,s)$ имат по 3 параметъра

$P(\perp) = (\emptyset^{(3)}, \emptyset^{(3)})$ ✓ изпълнено

$P(\perp) \& P(f,g) \xrightarrow{?} P(\Delta(f,g))$

Ще докажем, че $P_2(\Delta(f,g))$

Допускаме че $!\,\Delta(f,g)(x,y,s)$

Ще докажем, че $\Delta(f,g)(x,y,s) \cong x \cdot y + s$

1сл: $x = 0$: $\Delta(f,g)(0,y,s) \cong s = 0 \cdot y + s$

2сл $x > 0$: $\Delta(f,g)(x,y,s) \cong g(x-1, y, y+s) \overset{\text{инд. п.}}{\cong} (x-1)\cdot y + y + s$

$\cong x \cdot y + s$ ✓

Нека $!\,\Delta(f,g)(x,y,s)$

Ще докажем, че $(f,g)(x,y,s) = x^y \cdot s$

1сл: $y = 0$: $\Delta(f,g)(x,y,s) \cong s = x^0 \cdot s$

2сл: $y > 0$: $\Delta(f,g)(x,y,s) \cong f(x, y-1, g(x,s,0))$

$\overset{\text{инд. пред } P_2}{\cong} f(x, y-1, x \cdot s) \overset{\text{и.п. } P_1}{\cong} x^{y-1} \cdot x \cdot s = x^y \cdot s$ ✓

Доказахме, че $P(\varphi_1, \varphi_2)$

Заместваме (x, y, s) с $(x, x, 1)$:

$P(\varphi_1, \varphi_2) \to \forall a\ \varphi_1(a, a, 1) \simeq a^a$

$\boxed{27.05.2013}$

Примерна втора задача за голямото контролно:

$\boxed{\text{зад}}$

R:

$$
\begin{aligned}
& F(x), \text{ where} \\
& \left.\begin{aligned} F(x) = {} & \text{if } x \leq 1 \text{ then } 3^x \\ & \text{else } G(2 * F(x-1), 3 * F(x-2)) \end{aligned}\right\} \Gamma_1 \\
& \left.\begin{aligned} G(x, y) = {} & \text{if } y = 0 \text{ then } x \\ & \text{else } G(x, y-1) + 1 \end{aligned}\right\} \Gamma_2
\end{aligned}
$$

Докажете, че $(\forall a)[\,!D_v(R)(a) \to D_v(R)(a) \simeq 3^a]$

$$\Gamma_1(f, g)(x, y) = \begin{cases} 3^x &, x \leq 1 \\ g(2f(x-1), 3 * f(x-2)) &, x > 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f, g)(x, y) = \begin{cases} x &, y = 0 \\ g(x, y-1) + 1 &, y > 0 \end{cases}$$

$\Delta(f, g) \rightleftharpoons (\Gamma_1(f, g), \Gamma_2(f, g))$ $\Delta : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ – ~~не~~ пре-къснат оператор.

Нека (φ_1, φ_2) е НМНТ на Δ

$P_1(f,g) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!f(x,y) \to f(x,y) \simeq 3^a]$

$P_2(f,g) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!g(x,y) \to g(x,y) \simeq x+y]$

$P(f,g) = P_1(f,g) \wedge P_2(f,g)$

Трябва да докажем, че за НМНТ на Δ е изпълнено свойството P.

Ще използваме индукционно правило на Скот.

1) $P(\emptyset^{(1)}, \emptyset^{(2)}) \,\&\, P(f,g) \xrightarrow{?} P(\Delta(f,g))$

Ще докажем, че $P_2(\Delta(f,g))$

Нека $!\Gamma_2(f,g)(x,y)$

<u>1 сл.</u> $y=0 \Rightarrow \Gamma_2(f,g) = x = x+y$ ✓

<u>2 сл.</u> $y>0: \Gamma_2(f,g)(x,y) = g(x,y-1)+1 \overset{и.п}{\simeq} x+y-1+1 = x+y$

Ще док. че $P_1(\Delta(f,g))$

Нека $!\Gamma_1(f,g)(x,y)$

<u>1 сл.</u> $x \le 1 \Rightarrow \Gamma_1(f,g) = 3^x = 3^a$

<u>2 сл.</u> $x > 1 \Rightarrow \Gamma_1 = g(2\cdot f(x-1), 3\cdot f(x-2)) \simeq$

От и.п. $\simeq g(2\cdot 3^{x-1}, 3\cdot 3^{x-2}) = g(2\cdot 3^{x-1}, 3^{x-1})$

От. и.п $\Rightarrow 2\cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} \simeq 3\cdot 3^{x-1} = 3^x$ ✓

$D_v(R)(x) \simeq \tau_0(\bar{x}, \bar{y})$

$\tau_0(x)(f, g) = f(x)$

$\Rightarrow D_v(R)(f, g) \simeq \varphi_1(x) \quad P(\varphi_1, \varphi_2)$

$\boxed{\text{зад}}$ $F(x, 0)$, where
$F(x, y) =$ if $x = 0$ then y
else if $x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ then $G(F(x-1, 2), y)$
else $F(\frac{x}{2}, F(\frac{x}{2}, y))$
$G(x, y) =$ if $x = 0$ then y
else $G(x-1, y) + 1$

$P_1 \rightleftharpoons (\forall x \forall y)(!f(x, y) \Rightarrow f(x, y) \simeq 2x + y)$

$P_2 \rightleftharpoons (\forall x \forall y)(!g(x, y) \Rightarrow g(x, y) \simeq x + y)$

$P(f, g) \rightleftharpoons P_1(f, g) \wedge P_2(f, g)$

$$\Gamma_1(f, g) \simeq \begin{cases} y & , x = 0 \\ g(f(x-1, 2), y) & , 2 \nmid x \\ f(x/2, f(x/2, y)) & , 2 \mid x \ \& \ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f, g) \simeq \begin{cases} y & , x = 0 \\ g(x-1, y) + 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$\Delta(f, g) = (\Gamma_1(f, g), \Gamma_2(f, g))$

$P(\phi^{(2)}, \phi^{(2)}) \ \& \ P(f, g) \xrightarrow{?} P(\Delta(f, g))$

$P_2(\Delta(f, g))$: —"—

$P_1(D(f,g))$:

Нека $!\Gamma_1(f,g)(x,y)$

<u>1 сл</u> $x=0: \Gamma_1(f,g)(x,y) \cong 2x+y$

<u>2 сл:</u> $2 \nmid x: \Gamma_1(f,g)(x,y) \cong g(f(x-1,2),y) \overset{\text{и.п}}{\cong}$

$\overset{\text{и.п}P_1}{\cong} g(2(x-1)+2,y) \overset{\text{и.п.}P_2}{\cong} 2(x-1)+2+y = x+y$

$2 \mid x: \Gamma_1(f,g)(x,y) \cong f(x/2, f(x/2,y))$

От и.п $f(\frac{x}{2},(x+y)) = 2x+y$

$\Rightarrow P(\varphi_1,\varphi_2)$

$D_V(R)(x) = \tau_0(x,\varphi_1\varphi_2) \cong \varphi_1(x,0) \overset{P_1}{=} 2x+0 = 2x$ ✓

$\boxed{D_N(R)}$

Даден е терм: $\tau(X,F)$

Търсим стойност на $\tau(\bar{x},\bar{f}), \bar{x} \in D^n_\perp$ (т.е работим в плоската област на Скот)

$\varphi_1 \in F^\perp_{m_1}, \dots, \varphi_k \in F^\perp_{m_k}$

$F^\perp_{m_i} = \{f \mid f: D^{m_i}_\perp \to D_\perp\}$

(Тук функциите са тотални, за разлика от $D_V(R)$ - където са частични)

Стойността $\tau(x_1,\dots,x_n,\varphi^1,\dots,\varphi^k)$ на терма τ се определя със следната индуктивна деф:

1) ако τ е константа c, то $\tau(\bar{x},\bar{\varphi}) = c$;
2) ако $\tau = X_i$, то $\tau(\bar{x},\bar{\varphi}) = x_i$
3) ако $\tau = f(\tau_1,\dots,\tau_l)$ за някоя l-местна основна операция f, то

$$\tau(\bar{x},\varphi) = f^*(\tau_1(\bar{x},\bar{\varphi}),\dots,\tau_l(\bar{x},\bar{\varphi})),$$ където f^* е точното продължение на f;

(Тук навсякъде се пише $=$, не $\cong$, заради тоталността на функциите)

$$f^*(\bar{x}) = \begin{cases} h(\bar{x}), & \perp \notin \{x_1,\dots,x_l\} \ \&\ !f(\bar{x}) \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

4) ако $\tau =$ if p then τ_1 else τ_2, то

$$\tau(\bar{x},\bar{\varphi}) = \begin{cases} \tau_1(\bar{x},\bar{\varphi}), & \text{ако } p(\bar{x},\bar{\varphi}) = \text{true}; \\ \tau_2(\bar{x},\bar{\varphi}), & \text{ако } p(\bar{x},\bar{\varphi}) = \text{false}; \\ \perp, & \text{ако } p(\bar{x},\bar{\varphi}) = \perp; \end{cases}$$

5) Ако $\tau = F_i^{m_i}(\tau_1,\dots,\tau_{m_i})$, то
$$\tau(\bar{x},\bar{\varphi}) = \varphi^i(\tau_1(\bar{x},\bar{\varphi}),\dots,\tau_{m_i}(\bar{x},\bar{\varphi}))$$

За всеки терм τ:
$$\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) = \tau(\bar{x},f)$$

$$\Gamma_\tau : \mathcal{F}^{\perp}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}^{\perp}_{m_k} \to \mathcal{F}^{\perp}_n \quad \text{О.С}$$
непрекъснато изобр.

Тук имаме само области на Скот и съответно непрекъснати изображения.

$$\left.\begin{array}{l} D_V(R) : D^n \xrightarrow{\circ} D \\ D_N(R) : D^n \xrightarrow{\circ} D \end{array}\right\} \text{ в общия случай}$$

$$R : \left| \begin{array}{l} F(\bar{x}, \bar{F}), \text{ where} \\ F_1(\bar{x}) = \tau_1(\bar{x}, \bar{f}) \\ \dots \\ F_k(\bar{x}) = \tau_k(\bar{x}, \bar{f}) \end{array} \right\} \Rightarrow (*)$$

$$(*) \left| \begin{array}{l} \Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(x) = \tau_1(\bar{x}, \bar{f}) \\ \dots \\ \Gamma_{\tau_k}(\bar{f})(x) = \tau_k(\bar{x}, \bar{f}) \end{array} \right.$$

$$\Delta(\bar{f}) = (\Gamma_{\tau_1}(\bar{f}), \dots, \Gamma_{\tau_n}(\bar{f}))$$

Нека $\bar{\varphi}$ е НМНТ на Δ

$$D_N(R)(\bar{x}) \simeq \begin{cases} \tau_0(\bar{x}, \bar{\varphi}), & \tau_0(\bar{x}, \bar{\varphi}) \neq \bot \rightarrow \text{е деф.} \\ \neg!, & \tau_0(\bar{x}, \bar{\varphi}) = \bot \rightarrow \text{не е деф.} \end{cases}$$

$\boxed{D_V(R) \subseteq D_N(R)}$!!

Примерна зад. за изпит.

$\boxed{\text{зад}}$ Дадена е програмата R. Да се докаже, че $D_V(R) \neq D_N(R)$

$$D_V(R) \neq D_N(R) \longleftrightarrow D_V(R) \subsetneq D_N(R)$$

$F(x,y)$, where
$F(x,y) = $ if $3|x$ then $\frac{x+y}{3}$
else $F(xy, F(x, y+1))$

Реш:

$$\Gamma(f)(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{3}, & 3|x \\ f(xy, f(x,y+1)), & 3\nmid x, \end{cases}$$

За $D_V(R)$:
$\Gamma : F_2 \to F_2$

$$\Delta f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{3}, & 3|x \\ f(xy, f(x,y+1)), & 3\nmid x \\ \perp & , x = \perp \end{cases}$$

За $D_N(R)$:
$\Delta : F_2^{\perp} \to F_2^{\perp}$

$$\boxed{D_V(R)(x,y) \cong \tau_0(x,y,\varphi_\Gamma) \cong \varphi_\Gamma(x,y)}$$

$$\boxed{D_N(R)(x,y) = \begin{cases} \varphi_\Delta(x,y) & \varphi_\Delta(x,y) \neq \perp \\ ¬! & \varphi_\Delta(x,y) = \perp \end{cases}}$$

За да докажем разликата м/у $D_V(R)$ и $D_N(R)$ трябва да докажем разликата м/у φ_Γ и φ_Δ

Ще използваме Кнастер-Тарски за търсене на НМНТ

(1) $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots : \bigcup f_n = f_\Gamma$ (за $D_V(R)$)

Разглеждаме $f_0 = \emptyset^{(2)}$ $f_1(x,y) \cong \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \cong \begin{cases} \frac{x+y}{3} & 3|x \\ ¬! & 3\nmid x \end{cases}$

$$f_2(x,y) \cong \Gamma(f_1)(x,y) \cong \begin{cases} \frac{x+y}{3} & 3 \mid x \\ f_1(xy, \underbrace{f_1(x,y+1)}_{=z}) & 3 \nmid x \end{cases}$$

За да е дефиниран и z трябва да е дефиниран, но z е дефиниран само ако $3 \mid x$, но x не се променя.

$$\Rightarrow f_2(x,y) \cong \begin{cases} \frac{x+y}{3} & , \cancel{3 \nmid x}\ 3 \mid x \\ \neg ! & , 3 \nmid x \end{cases}$$

$\Rightarrow f_1 = f_2 \rightarrow \varphi_\Gamma = f_\Gamma$

Ако два члена на редицата са равни, то цялата редица се стабилизира.

(2) За $D_N(R)$

$g_0 \leq g_1 \leq \ldots \sqcup g_n = \varphi_\Delta$

$f \leq g \leftrightarrow (\forall a \in \emptyset_i^n)[f(\bar{a}) \leq g(\bar{a})]$

$g_0 = \Omega^{(2)}$

$$g_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{3} & , 3 \mid x \\ \bot & , 3 \nmid x \end{cases}$$

$$g_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{3} & 3 \mid x \\ g_1(xy, g_1(x,y+1)) & , 3 \nmid x \end{cases}$$

$= \bot$, защото $3 \nmid x$

$$\Rightarrow g_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x+9}{3}, & 3|x \\ g_1(x\,y,\bot) & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример: $g_2(1,3) = g_1(3,\bot) = \frac{3+9}{3} = 1+3 = 4$

За $D_N(R)$ получихме: $g_1 \lneq g_2$

$D_N(R)(1,3) = \varphi_\Delta(1,3)$

$g_2(1,3) \neq \bot \Rightarrow \varphi_\Delta(1,3) = g_2(1,3) = 4$

$D_V(R)(1,3) = \varphi_\Gamma(1,3) \cong f_1(1,3) \cong ?!$

3.06.2013 г.

Зад 144/1

R:
F(X, Y), where
F(X, Y) = if $2|x$ then $x/2$
else $F\left(\frac{x+1}{2} + y, F(x-1, y+1)\right)$

(*) Да се докаже, че: $(\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N})[!D_N(R)(a,b) \to D_N(R)(a,b) \leq a+b]$

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} x \backslash 2, & 2|x \\ f\left(\frac{x+1}{2} + y, f(x-1, y+1)\right), & 2 \nmid x \\ \bot, & x = \bot \end{cases}$$

$\Delta\ F_\bot^2 \to F_\bot^2$

На всеки терм може да съпоставим изображение така, че стойността на терма е равна на стойността на изображението.

Всяко изображение от този тип е непрекъснато
$(\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \simeq \tau(\bar{x}, \bar{f}))$

Точно продължение на частична функция:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad f(x, y) = \frac{x}{y}$

$$f^*(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & , \perp \notin \{x_1, \dots, x_n\} \ \& \ !f(\bar{x}) \\ \perp & , \perp \in \{x_1, \dots, x_n\} \vee \neg! f(\bar{x}) \end{cases}$$

Операции със $*$:

$$x \stackrel{*}{-} y = \begin{cases} x - y, & x, y \neq \perp \ \& \ !(x - y) \\ \perp & , \text{иначе} \end{cases}$$

$P_1(f) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}_\perp \wedge 2 | x \wedge f(x, y) \neq \perp \to$

$\to f(x, y) = \frac{x}{2}]$

($x \in \mathbb{N}$, защото x участва в if —"—

$y \in \mathbb{N}_\perp$, защото y не участва в if —"—)

$P_2(f) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge 2 \nmid x \wedge f(x, y) \neq \perp \to$

$\to f(x, y) \leq x + y$

(тук $y \in \mathbb{N}$ (без $\perp$) защото, ако $y = \perp$ $f(x, y) \leq x + y$ няма смисъл.)

$P_3(f) \rightleftharpoons (\forall y)[y \in \mathbb{N}_\perp \to f(\perp, y) = \perp]$

Трябва ни P_4 при което $2 \nmid x$ и $y = \perp$, за да се обхванат абсолютно всички варианти и да може да се използва инд. пр. на Скот.

$P_4(f) \rightleftharpoons (\forall x)[x \in \mathbb{N} \wedge 2 \nmid x \to f(x, \perp) = \perp]$

(Ако $2 \nmid x$ и $y = \perp \Rightarrow f(\overbrace{\frac{x+1}{2} + y}^{\text{ест. число} + \perp = \perp}, f(x-1, y+1)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\perp, \text{нещо})$, тогава попадаме в $P_3 \Rightarrow f = \perp$)

На контролното не трябва да се доказва, че P_1, P_2, P_3, P_4 са непрекъснати.

За да използваме инд. пр. на Скот трябва да докажем, че P_1, P_2, P_3, P_4 са непрекъснати.

1сл

$P(f) \rightleftharpoons (\forall \bar{x})[I(\bar{x}) \wedge f(\bar{x}) \neq \perp \to O(\bar{x}, f(\bar{x}))]$ е непрекъс.

$f \in F^n_\perp$ $\quad \{f_n\}$ монот. растяща

$(\forall n)[P(f_n)] \to P(\bigcup_a f_n)$?

Нека $I(\bar{x}) \wedge \overbrace{(\bigcup_n f_n)(\bar{x})}^{=a} \neq \perp$

Важно!

$(\bigcup_n f_n)(\bar{x})$

$f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \ldots$

Дефиниция за точна горна граница в плоска О.С.

$$(*)\quad f \sqsubseteq g \iff (\forall \bar{x})[f(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{x})]$$

$$\left(\bigcup_n f_n\right)(\bar{x}) \stackrel{def}{=} \bigcup_n \underbrace{\{f_n(\bar{x})\}}_{\text{е в плоска О.С Напр. } \mathbb{N}_\perp}$$

Това е вярно и в общия случай, не само в пл. О.С.

Нека $a_n = f_n(\bar{x})$

$\{a_n\}$ е монотонно растяща (от $(*)$) в плоска О.С.

Тази редица има точно два различни члена ($\perp$ и друг)

$f_n \sqsubseteq f_{n+1} \quad a_n \sqsubseteq a_{n+1} \quad a_n = \perp \vee a_n = a_{n+1}$

$$\left(\bigcup_n f_n\right)(\bar{x}) = a \neq \perp \iff (\exists n)[\underbrace{f_n(\bar{x})}_{a_n} = a]$$

$$\parallel\ \bigcup_n a_n = a \neq \perp$$

$$P(f_n) \Rightarrow \frac{O(\bar{x}, f_n(\bar{x}))^{\sqsubseteq a}}{O(\bar{x}, \underbrace{\bigcup_n f_n(\bar{x})}_{=a})}$$

<u>2 сл.</u> $Q(f) \rightleftharpoons (\forall \bar{x})[I(\bar{x}) \to f(\bar{x}) = \perp]$

$$Q(f_n) \text{ за } \forall n \xrightarrow{?} Q\left(\bigcup_n f_n\right)$$

Нека е вярно $Q(f_n)$ за всяко n

Следва $(\forall n)[\underbrace{f_n(\bar{x})}_{=a_n} = \perp]$

$$\left(\bigcup f_n\right)(\bar{x}) = \bigcup a_n = \perp$$

Като доказ. $P(f)$ и $Q(f)$ то следва, че:

От $P(f)$ P_1, P_2 - непрекъснати

От $Q(f)$ P_3, P_4 - непрекъснати

$P = P_1 \& P_2 \& P_3 \& P_4$

Ще използваме инд. пр. на Скот за Δ и P

$P(f_\Delta) \to P_1(f_\Delta) \& P_2(f_\Delta) \to \circledast$

$D_N(R): N^2 \xrightarrow{o} \mathbb{N}$

$$D_N(R) \overset{def}{\simeq} \begin{cases} \tau_0(\bar{x}, \bar{\varphi}), & \tau_0(\bar{x}, \bar{\varphi}) \neq \bot \\ \neg!, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\bar{\varphi}$ е НМНТ на сист. от изображения

$P(\Omega^{(2)})$ - това е очевидно вярно

Нека $P(f) \xrightarrow{?} P(\Delta(f))$

① Нека $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}_\bot$, $2 \mid x$, $(**)$ $\Delta(f)(x, y) \neq \bot$

От деф на Δ, $\Delta(f)(x, y) = \frac{x}{2}$ сл. $P_1(\Delta(f))$

② Нека $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $2 \nmid x$, $\Delta(f)(x, y) \neq \bot$

От деф. на $\Delta(f)(x, y) = f\left(\frac{x+1}{2} + y, f(x-1, y+1)\right)$

Нека $f(\underbrace{x-1}_{2|x}, \underbrace{y+1}_{\in \mathbb{N}}) = u \quad f\left(\frac{x+1}{2} + y, u\right) = z$

Искаме да докажем, че $z \leq x + y$

Използваме индукц. предположение за P_1

$$\underbrace{f(x-1, y+1) = u}_{u = \frac{x-1}{2}}$$

<u>1 сл.</u> $u \neq \bot \xrightarrow{P_1(f)} u = \frac{x-1}{2}$

<u>2 сл</u> $u = \bot \xrightarrow{P_4(f)} u = \bot \Rightarrow f\left(\frac{x+1}{2} + y, \bot\right)$

$f\left(\frac{x+1}{2} + y, \bot\right) = \bot = \Delta(f)(x,y)$ - това е противоречие с $(**)$

Следователно не може да се попадне в <u>2 сл.</u>

След. само <u>1 сл</u> е възможен

Сл. $\Delta(f)(x,y) = z = f\left(\frac{x+1}{2} + y, \overset{\in \mathbb{N}}{\boxed{\frac{x-1}{2}}}\right)$

<u>1 сл.</u> $\frac{x+1}{2} + y$ е четно & $f\left(\frac{x+1}{2}, u\right) \xrightarrow{P_1}$

$\xrightarrow{P_1} f\left(\frac{x+1}{2} + y, \frac{x-1}{2}\right) = \dfrac{\frac{x+1}{2} + y}{2} \leq x + y$

<u>2 сл</u> $\frac{x+1}{2} + y$ е нечетно & $f\left(\frac{x+1}{2} + y, u\right) \neq \bot \xrightarrow{P_2}$

$\xrightarrow{P_2} f\left(\frac{x+1}{2} + y, \frac{x-1}{2}\right) \leq \frac{x+1}{2} + y + \frac{x-1}{2} = x + y$ ✓

Следователно: $P_2(\Delta(f))$

(3) Нека $y \in \mathbb{N}_\perp$ & $x = \perp \to \Delta(f)(\perp, y) = \perp$

Следователно $P_3(\Delta(f))$

(4) Нека $y = \perp$ & $x \in \mathbb{N}$ & $2 \nmid \cancel{x}$

$$\Delta(f)(x, \perp) = f\left(\frac{x+1}{2} + \perp, f(x-1, \perp+1)\right)$$

$$= f(\perp, \underbrace{f(x-1, \perp)}_{\in \mathbb{N}_\perp})$$

От $P_3(f) \to f(\perp, f(x-1, \perp)) = \perp$

Следователно $P_4(\Delta(f))$

$$P(f_\Delta) \to (\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[f_\Delta(x,y) \neq \perp \to f_\Delta(x,y) \leq x+y]$$

$$D_N(R)(x,y) \simeq \begin{cases} f_\Delta(x,y), & x, y \in \mathbb{N} \text{ \& } f_\Delta(x,y) \neq \perp \\ \neg!, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\tau_0(x, y, f_\Delta) \stackrel{def}{=} f_\Delta(x,y)$$

$\mathcal{D}_p$

```
F(x,1), where
    F(x,y) = if x ≤ 1 then 1
         else G(x, F(x-2) F(x,Y))
           if x = 0 then 0
             else G(x-1, Y) + Y
```

Док. че: $(\forall a \in \mathbb{N})[!D_N(R)(a) \to D_N(R)(a) \simeq a!!]$

$$a!! = \begin{cases} 1, & a = 0 \vee a = 1 \\ a \cdot (a-2)!!, & a \geq 2 \end{cases}$$

8.06.2013 Консултация
контр. 09.06.2009

1 зад

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} x+1 & , x \leq 1 \\ 2f(x-1)+3f(x-2) & , x>1 \end{cases}$$

Да се докаже, че за НМНТ на Γ е изпълнено:

$$(\forall x)[!f_\Gamma(x) \& !f_\Gamma(x+1) \Rightarrow f(x)+f(x+1) = 3^{x+1}]$$

Реш: Приемаме, че Γ е компактен ⇒ f_Γ съществува.

Нека $P_1(f) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x)[!f(x) \& !f(x+1) \Rightarrow f(x)+f(x+1) = 3^{x+1}]$

$P_2(f) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x=0 \& !f(0) \Rightarrow f(0)=1]$

1) $P_1(\emptyset^{(1)})$: $\underbrace{(\forall x)[\underbrace{!\emptyset(x) \& !\emptyset(x+1)}_{false} \Rightarrow \emptyset(x) + \emptyset f(x+1) = 3^{x+1}]}_{true}$

$P_2(\emptyset^{(1)})$: очевидно

Инд. хип: Нека $P_1(f)$ и $P_2(f)$ е изпълнено и Нека $!\Gamma(f)(x)$ $!\Gamma(f)(x+1)$

Ще док. че $P(\Gamma(f))$. Нека $x \in \mathbb{N}$ - произв.

$\boxed{1 сл}$ $x=0$ $\Gamma(f)(x)+\Gamma(f)(x+1) = \Gamma(f)(0)+\Gamma(f)(1) \overset{def}{=} 3^1 \xrightarrow{за\ x=0} 3^{x+1}$ ✓

$\boxed{2 сл}$ $x=1$ $\underbrace{\Gamma(f)(x)+\Gamma(f)(x+1)}_{дефинирани\ по\ и.хип.} = \Gamma(f)(1)+\Gamma(f)(2) \overset{и.п}{=}$

$\overset{и.п}{=} 2+2\cdot\underbrace{(f(1)+f(0))}_{=3^1}+\underbrace{f(0)}_{1} = 2+2\cdot 3^1+1 = 9 = 3^2 = 3^{x+1}$ ✓

$\boxed{3 сл}$ $x>1$ $\Gamma(f)(x)+\Gamma(f)(x+1) = 2\cdot f(x-1)+2f(x)+3f(x-1)$

$= 2(f(x-1)+f(x)) + 3(f(x-2)+f(x+1)) =$

$\stackrel{\text{и.п.}}{=} 2 \cdot 3^{(x-1)+1} + 3 f^{(x-1)+1} = 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{x-1} = 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x$
$= 3^{x+1}$ ✓

За $P_2(\Gamma(f))$: $\Gamma(f)(0) = 1$

$\Rightarrow \Gamma(f)(0) \stackrel{def}{=} 1$

$\boxed{\text{2 зад}}$ $\Gamma: \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$ е определена по следния начин:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0 & , y=0 \\ f(1, y-1)+1 & , x=0, \ y>0 \\ f(f(x-1, y), x-1)+1 & , x>0, \ y>0 \end{cases}$$

Докажете, че за f_Γ е изпълнено условието:

$(\forall x \forall y)[!f_\Gamma(x,y) \Rightarrow f_\Gamma(x,y) \geq \min(x,y))$

Реш: Нека P: $(\forall x \forall y)[!f(x,y) \Rightarrow f(x,y) \geq \min(x,y)]$

① $P(\emptyset^{(2)})$: изпълнено

③ : P е непрекъснато : ясно

② Нека $P(f)$ е вярно. Ще док. че $P(\Gamma(f))$

Нека $x, y \in \mathbb{N}$ - произв. и нека $!\Gamma(f)(x,y)$

1сл. $y=0$: $\Gamma(f)(x,y) = 0 \Rightarrow f \geq \min(x,y)$

2сл. $y>0, x=0$: $\Gamma(f)(x,y) = f(1, y-1)+1 \stackrel{?}{\geq} \min(0,y)$

$\Rightarrow f(1, y-1)+1 \geq \min(x,y)$ ✓

③ш) $x > 0$ & $y > 0$:

$$\Gamma(f)(x,y) = f(f(x-1,y), x-1) + 1 \overset{\text{и.п.}}{\geq} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{и.п.}}{\Rightarrow} f(f(x-1,y), x-1) \overset{\text{и.п.}}{\geq} \min(f(x-1,y), x-1) + 1$$

$$\overset{\text{и.п.}}{\geq} \min(\min(x-1,y), x-1) + 1 = \min(x-1,y) + 1 \geq$$

$$\geq \min(x, y+1) \geq \min(x,y)$$

писмен 23.06.2009

3 зад Нека R е следната програма над $\mathbb{Z}$:

$F_0(X,X)$, where
$F(X,Y) =$ if $X = Y$ then $G(X,Y)$
else $F(X+1, Y) - 1$
$G(X,Y) =$ if $X = 0$ then Y
else $G(X-1, Y) + 1$

Да се док. че:

ⓐ $\forall x \in \mathbb{Z}\ (!D_v(R)(x) \Rightarrow D_v(R)(x) = 2x)$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{Z}\ (x < 0 \Rightarrow \neg !D_v(R)(x))$

Реш:

$$\Gamma_1(f,g)(x,y) \cong \begin{cases} g(x,y) & , x = y \\ f(x+1, y) - 1 & x \neq y \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f,g)(x,y) \cong \begin{cases} y & , x = 0 \\ g(x-1, y) + 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Нека $P_2(f,g)(x,y) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!g(x,y) \Rightarrow g(x,y) = x+y]$

Нека $P_1(f,g)(x,y) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[x \leq y \,\&\, !f(x,y) \Rightarrow f(x,y) = 2y + x - y = x+y$

$P_1(f,g)(x,y) \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[x \leq y \& !f(x,y) \Rightarrow f(x,y) = x+y]$

$P(f,g) = (P_1(f,g) \wedge P_2(f,g))$

1) $P(\emptyset) = (\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})$ - изпълнено $P_1(\emptyset^{(2)})$ $P_2(\emptyset^{(2)})$

2) $P(f,g) \Rightarrow P(\Gamma(f,g))$ т.е (Γ_1, Γ_2)

$P_1(f,g)$ и $P_2(f,g) \Rightarrow P_1(\Gamma_1(f,g)$ и $P_2(\Gamma_2(f,g))$

3) P е непр. в $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$, защото P_1, P_2 - непр(като свойства от тип част. кор.) и конюнкция на непр. св-ва = непр. св-во.

Инд. хип: Нека $P_1(f,g)$ и $P_2(f,g)$ и нека $!\Gamma_1(f,g)(x,y)$ $!\Gamma_2(f,g)(x,y)$, като $(x,y) \in \mathbb{Z}$ - произв.

За P_1:

(1сл) $x=y$: $\underbrace{\Gamma_1(f,g)(x,y)}_{\text{деф}} \stackrel{def}{=} g(x,y) \stackrel{\text{и.п.}P_2}{=} x+y$

(2сл) $x \neq y$: $\Gamma_1(f,g)(x,y) \simeq f(x+1,y) - 1 \stackrel{\text{и.п.}P_1}{=} x+1+y-1 = x+y$ ✓

За P_2:

(1сл) $x = 0$: $\Gamma_2(f,g)(x,y) \stackrel{def}{=} g\ell\ y = x+y$ при $x=0$

(2сл) $x \neq 0$: $\underbrace{\Gamma_2(f,g)(x,y)}_{\text{деф.}} \simeq \underbrace{g(x-1,y)}_{\text{деф.}} + 1 \stackrel{\text{и.п.}2}{=} x - \cancel{1} + y + 1 = x+y$ ✓

$\Rightarrow P(f_\Gamma, g_\Gamma)$, в частност $P_1(f)$

$D_V(R)(x) \overset{def}{\simeq} f_\Gamma(x,x) \overset{P_1(f,g)}{=} x+y = 2x$

(б) Да се док. че: $(\forall x \in \mathbb{Z})[x<0 \Rightarrow \neg! D_V(R)(x)]$

Нека $P(g): (\forall x<0\ \forall y)[\neg! g(x,y)]$

Ако P е изп, то $D_V(R)(x) \overset{def}{=} f_\Gamma(x,x) = g_\Gamma(x,x) \overset{\text{U.П.Р}}{=} \neg!$

① $P(\emptyset^{(2)})$ - очевидно

③ Очевидно

② Допускаме, че $P(g)$ е изпълнено и $!\Gamma_2(f,g)(x,y)$

Нека $x<0$, $y\in\mathbb{Z}$

Защо $\neg! \Gamma(g)(x,y)$?

$\Gamma_2(f,g)(x,y) \overset{def}{=} \Gamma_2(f,g)(x-1,y)+1$ Но $x-1<0$

$\Rightarrow$ От U.П. Γ_2 $\neg! + 1 = \neg!$

$\boxed{\text{Зад}}$ F(X,Y), where
F(X,Y) = if X = Y then X
else if X < Y then F(X, G(Y,X))
else F(Y,X)
G(X,Y) = if X = Y then 0
else G(X,Y+1)+1

Док. че:
$(\forall a\forall b)[!D_V(R)(a,b) \Rightarrow D_V(R)(a,b) = \text{НОД}(a,b)]$

Реш:

$$\Gamma_1(f,g) \simeq \begin{cases} x & , x = y \\ f(x, g(y,x)) & , x < y \\ f(y,x) & , x > y \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f,g) \simeq \begin{cases} 0 \\ g(x, y+1)+1 & , x \neq y \end{cases}$$

$P_2 \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!g(x,y) \Rightarrow g(x,y) = x - y]$

$P_1 \rightleftharpoons (\forall x \forall y)[!f(x,y) \Rightarrow f(x,y) = HOD(x,y)]$

$P(f,g) \rightleftharpoons P_1(f,g) \wedge P_2(f,g)$

$\Delta(f,g) = (\Gamma_1(f,g), \Gamma_2(f,g))$

P е непрекъснато, защото P_1 и P_2 са непрекъснати

Нека $P_2(f,g)$. Нека $!\Gamma_2(f,g)$. Ще док. $P_2(\Gamma_2(f,g))$

1сл $x = y$: $\Gamma_2(f,g)(x,y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$ ✓

2сл $x \neq y$: $\Gamma_2(f,g)(x,y) = g(x, y+1)+1 \overset{\text{И.П.}P_2}{\simeq} x - (y+1)+1 = x - y$ ✓

Нека $P_1(f,g)$. Нека $!\Gamma_1(f,g)$

1сл $x = y$ $\quad x = HOD(x,y)$

2сл $x < y$ $\quad f(x, g(y,x)) \overset{\text{И.П.}P_2}{=} f(x, y-x) \overset{\text{И.П.}P_1}{=} HOD(x, y-x)$
$= HOD(x,y)$

3сл $x > y$: $\Gamma_1(f,g)(x,y) = HOD(y,x) = HOD(y,x)$

$\Rightarrow P$ е в сила за НМНТ за $\Delta(f,g) \Rightarrow$

$(\forall a \forall b)[!D_v(R)(a,b) \to D_v(R)(a,b) = Hop(a,b)]$

$\boxed{\text{зад}}$ $F(X,Y)$, where
$F(X,Y) = $ if X е точен квадрат then 0
else $F(X+3, F(X, Y+3)) + 3$

Докажете, че
$D_v(R) \neq D_N(R)$

$$\Gamma(f)(x,y) = \begin{cases} 0, & x = k^2, \text{ за някое } k \\ f(x+3, f(x,y+3))+3, & x \neq k^2, \text{ за} \end{cases}$$

За $D_v(R)$:
$\Gamma: \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = k^2, \text{ за някое } k \\ f(x+3, f(x,y+3))+3 & , x \neq k^2 \\ \perp & , x = \perp \end{cases}$$

$f_0 \leq f_1 \leq \dots \leq f(n) = f_\Gamma$ (за $D_v(R)$)

$f_0 = \emptyset^{(2)}$ $f_1(x,y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & x \cancel{\neq} k^2, \text{ за някое } k \\ ?!, & x \neq k^2 \end{cases}$

$$f_2(x,y) \simeq \Gamma(f_1)(x,y) \simeq \begin{cases} 0 & , x = k^2, \text{ за н.к. } k \\ f_1(x+3, \underbrace{f(x,y+3)}_{\text{не е деф.}})+3, & x \neq k^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_2(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & x = k^2, \text{ за някоя } k \\ ?!, & x \neq k^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_1 = f_2$

$D_v(R)(x,y) \simeq \tau_0(x,y,f_{\Gamma_1}) \simeq f_{\Gamma_1}(x,y)$ $D_v(R) = f_{\Gamma_1}$

② За $D_N(R)$:

$$g_0 \sqsubseteq g_1 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq g_n = \varphi_\Delta$$

$$g_0 = \Omega^{(2)}$$

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 0 \\ g_0(x+3, g_0(x,y+3))+3 = \begin{cases} 0, & x+3=k^2, \text{ за някое } k \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases} \\ \perp, \quad x=\perp \end{cases}$$

$$g_2(x,y) = \begin{cases} 0 \\ g_1(x+3, \underbrace{f_1(x,y+3)}_{=\perp, \text{ защото } x \neq k^2})+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_2(x,y) = \begin{cases} 0, & x = k^2, \text{ за някое } k \\ 3, & x+3=k^2, \text{ за някое } k \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

$g_2(13,0) = 3 \qquad D_N(R)(13,0)=3$

$f_2(13,0) = ?!$

$\boxed{\text{Зад}}$ F(x,y) where
F(x,y) = if x = 0 then 0
else F(x ∸ y, F(x,y)) + x

Док. че $D_V(R) \neq D_N(R)$ $\qquad x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0 \\ f(x \dot{-} y, f(x,y)) + x, & x > 0 \end{cases}$$

$$f_0 = \emptyset^{(2)}$$

$f_1(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & x=0 \\ ?!, & x>0 \end{cases}$ $f_2 \begin{cases} 0, & x=0 \\ ?!, & x>0 \end{cases}$

<u>Хипотеза:</u> $f_n(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & x=0 \\ ?!, & x>0 \end{cases}$

$f_{n+1}(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & x=0 \\ ?!, & x>0 \end{cases}$

$x, y \in \mathbb{N}_\perp$

$$\Delta(\varphi)(x,y) = \begin{cases} \perp, & x=1 \\ 0, & x=0 \\ \varphi(x \dot{-} y) \varphi(x,y)) + x \end{cases}$$

$\varphi_0 \le \varphi_1 \le \dots \le \varphi_n \le \dots$

$\varphi_0 = \Omega^{(2)}, \Omega^{(2)}(x,y) = \perp$

$$\varphi_1(x,y) = \begin{cases} \perp, & x=\perp \\ 0, & x=0 \\ \varphi_0(x \dot{-}^* y, \varphi_0(x,y)) +^* x, & >0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \perp & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x,y) = \begin{cases} \perp, & x=\perp \\ 0, & x=0 \\ \varphi_1(x \dot{-}^* y, \varphi_1(x,y)) +^* x & x \in \mathbb{N}, x>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \perp, & x=\perp \\ x, & x \le y \quad x, y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{в ост. сл.} \end{cases}$$

$\varphi_2(1,2) = 1 \Rightarrow \forall n \; \varphi_n(1,2) = 1$

$\Rightarrow \varphi \bigcup \varphi_i, \; \varphi(1,2) = 1$