6.10.08. Лекция

проф. К. Чакърян

1. Детерминанти

Числово поле F ($F \leq C$, $|F| \geq 2$): $\forall a, b \in F \Rightarrow a+b, a-b, a\cdot b, \frac{a}{b} (b \neq 0) \in F$

пр. Q, R, C, Z - не е поле

Всяко числово поле F съдържа полето Q на рационалните числа:

нека $a \in F, a \neq 0$; $a - a \in F$ т.е. $0 \in F$; $\frac{a}{a} \in F$, т.е. $1 \in F$

ако n е естествено число, то $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n} \in F$ т.е $n \in F$, т.е $0 - n \in F$,

т.е. $-n \in F$ така $n \in F$ за $\forall n \in Z$

нека $r \in Q$ $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in Z$, $n \neq 0$. $m, n \in F$ и $\Rightarrow \frac{m}{n} \in F$, т.е. $r \in F$ за

$\forall r \in Q$. Така $Q \leq F$

Матрица A с m реда и n стълба ($m, n \in N$): $A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ a_{m1}, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$,

където $a_{ij} \in F$ - числово поле

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ (от тип $m \times n$)

i - оказва реда

j - оказва стълба

$F_{m \times n}$: множеството на всички матрици с m и n от дадено поле.

Матрица $(a_{11})_{1\times1}$ отъждествяване с числата a_{11}

ако за една матрица m и n са равни ⇒ A е квадратна матрица (от ред n).

$A \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{n1}, a_{n2} \dots a_{nm} \end{pmatrix}$

a_{11} $a_{22} \dots a_{nn}$

(главен диагонал на A)

a_{1n} $\vdots$ $a_{2,n-1}$ $\vdots$ a_{n1}

(втори диагонал на A)

Цел: на всяка матрица $A \in F_{n\times m}$ да се съпостави едно число $\det A \in F$ - детерминанта на матрицата A (или детерминанта от n-ти ред)
$A = (a_{ij})_{n\times m} \in F_{n\times n}$.
нека $n=2$
$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}$

① $\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ \cdot(-a_{12}) \end{array} \right\}+ \quad \left| \begin{array}{l} \cdot(-a_{21}) \\ \cdot a_{11} \end{array} \right\}+$

① $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$ и $(a_{11}a_{22} - a_{11}a_{21})x_2 = -b_1a_{21} + b_2a_{11}$
означ. $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$
$\Delta_2 = -b_1a_{21} + b_2a_{11}$
② $\Delta x_1 = \Delta_1$ и $\Delta x_2 = \Delta_2$
Δ - детерминанта на матрицата A, означ. $\Delta = \det A$ или $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} =$
$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Напр. $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -3.2 - (-5).4 = -6 + 20 = 14$
Тогава: $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \Delta_1 =$ и $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \Delta_2$
Сега ② $\Delta . x_1 = \Delta_1$ и $\Delta x_2 = \Delta_2$
Нека $\Delta \neq 0$ Тогава от ② $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ - това е

единственото решение на ①
Разгл. $n = 3$ $A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} & a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$

① $\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \cdot(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ \cdot(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) \\ \cdot(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{array} \right\} +$

② $(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}).x_1=$
$=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}$

означ. с Δ = целия коеф. пред x_1

означ. дясната стр. на ② с Δ_1. Тогава $\Delta x_1=\Delta_1$

Също $\Delta x_2=\Delta_2$ и $\Delta x_3=\Delta_3$, където Δ_2, Δ_3 са някакви изрази

② $\Delta x_1=\Delta_1$; $\Delta x_2=\Delta_2$, $\Delta x_3=\Delta_3$

Δ: детерминанта на матрицата от 3-ти ред A, означ. за детерм. са:

$$\det A \text{ или } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}- -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Правило на Сарус

пр. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2.3.(-2)+1.1.4+(-1).5.0-0.3.4-1(-1)(-2)-5.1.2= =-12+4+0-0-2-10=-20$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1, & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{32} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Нека $\Delta \neq 0$. Тогава от ② може да разреши на 2

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$

проверка и това е единственото реш. на с-мата ①

$n=2$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ (сумата от всички събираеми от вида a_{1i_1}, a_{2i_2}, където i_1, i_2 е пермутация на числата 1,2

$$n=3 \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

Детерм. от 3-ти ред е сумата от всички събир. от вида $a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}$, където i_1, i_2, i_3 е пермутация на числ. 1,2,3

За $A \in F_{n \times m}$ би трябвало да деф. det A $\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31}, a_{32} \dots a_{3n} \end{vmatrix}$ като

сумата от всички събираеми $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$, където $i_1, i_2 \dots i_n$ е пермутация на чис. $1, 2 \dots n$

Нека $n \in N$. Пермутации $i_1, i_2 \dots i_n$ на числата $1, 2, \dots n$

Броят на всички пермутации от 1 до n е $= n! \, (= 1.2 \dots (n-1).n)$

$\sigma = i_1, i_2 \dots i_k \dots i_s \dots i_n$

В дадена пермутация σ числата i_k и i_s образуват инверсия ако: $k < s$, но $i_k > i_s$

Означ. с $[i_1, i_2 \dots i_n]$ бр. на всички инверсии в тази пермутация

Пермутацията е четна (нечетна) ако бр. на инверсиите в нея е четно (нечетно) число.

Пр. $n = 5$ $[2, 5, 3, 4, 1] = 1 + 3 + 1 + 1 = 6$ - четна пермут.

$1, 2 \dots n$ - главна пермутация $[1, 2 \dots n] = 0$ - четна перм.

$$[n \; n-1 \dots 2 \; 1] = n-1 + n-2 \dots + 1 = \frac{(n-1).n}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = i_1 \dots i_k \dots i_s \dots i_n \\ \tau = i_1 \dots i_s \dots i_k \dots i_n \end{array}\right\}$$ транспозиция - разменяне на местата само на 2 числа.

$i_k \leftrightarrow i_s$

Лема: Всяка транспозиция променя четността на дадена пермутация.

Нека σ е $A \, i \, k_1 \dots k_t \, j \, B$, където A - всички числа преди i, B - множеството на всички числа в перм. след j

Извършваме $i \leftrightarrow j$ и получаваме пермут. $\tau = A \, j \, k_1 \dots k_t \, i \, B$

Нека първо $t = 0$. Очевидно ако $i < j$ $[\tau] = [\sigma] + 1$, а ако $i > j$, то $[\tau] = [\sigma] - 1$, така доказахме, че бр. на инверсиите в τ и σ са с $\neq$ четност.

Общ случай: $t \geq 1$ Правим: $i \leftrightarrow k_1$, $i \leftrightarrow k_2$, ..., $i \leftrightarrow k_t$ (съседни транспозиции) и получ. перм. $A = k_t \, i \, j \, B$

Правим i↔j и получ. $A = x_i \dots x_t\, j\, i\, B$. Правим още t на бр. съседни транспозиции $j \leftrightarrow x_t, \dots j \leftrightarrow x_i$ (t трансп.) и получаваме $A\, j\, x_i \dots x_t\, i\, B = \tau$

Така τ се получава от σ чрез 2t + 1 (неч. число) съседни трансп. Тогава четността на σ е променена нечетен бр. пъти. Така σ и τ са пермут. с различна четност.

Следствие: за всяко N бр. на четните пермут. на числата от 1 до n е = на бр. на нечетните перм. на числата от 1 до n и $= \frac{1}{2} n!$ (при $n \geq 2$)

Нека k - бр. четни пермут., l - бр. нечетни перм. $(k + l = n!)$

В/у всяка четна перм. правим транспозиция на 1↔2 и получаваме k на бр. ≠ нечетни пермут. $\Rightarrow l \geq k$.

Аналогично получаваме $k \geq l \Rightarrow k = l$

В детерм. от ред n събираемото $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ би трябвало да участва със знак $(-1)^{[i_1, i_2 \dots i_n]}$

7.10.08.

Упражнение

Комплексни числа

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \underbrace{\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}_{\text{числово поле - } F}$$

$\forall a, b \in F$:

$a + b,\ ab \in F$

$$\left.\begin{array}{l} \forall a, b, c \in F: (a+b)+c = a+(b+c) \\ (ab)c = a(bc) \end{array}\right\} \text{асоциативен закон}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall a, b \in F: a+b = b+a \\ \qquad a.b = b.a \end{array}\right\} \text{комутативен закон}$$

$\exists 0 \in F: a + 0 = 0 + a = a,\ \forall a \in F$

нулев ел. ∃ - съществува

$\exists 1 \in F: a1 = 1a = a,\ \forall a \in F$

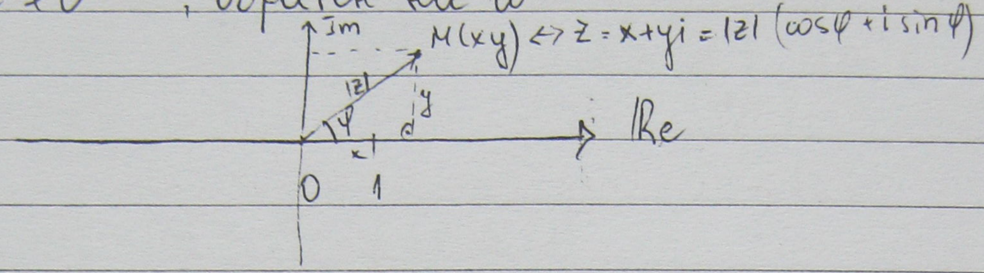
единичен ел.

$\forall a \in F, \exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$

противоположен на a

$\forall a \in F, \exists a^{-1} \in F : a a^{-1} = a^{-1} a = 1$

$a \neq 0$, обратен на a



$M(xy) \leftrightarrow z = x + yi = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Гаусова равнина

$\mathbb{C} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ числово поле на комплексните ($\mathbb{C}$) числа

$(x, y) + (a, b) := (x + a, y + b) \in \mathbb{C}$

$(x, y)(a, b) \overset{def}{=} (xa - yb, xb + ya) \in \mathbb{C}$

$z_1 = (x, y) = (a, b) = z_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array} \right.$

$:$, def - дефиниция

$\mathbb{R} = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \in \mathbb{C}$

$(0, 1).(0, 1) = (-1, 0)$

$(0, 1) = i$, $\boxed{i^2 = -1}$, i- имагинерна единица

$z = (x, y) = x.1 + y.\, i$

$z = x + yi$ - алгебричен вид на $\mathbb{C}$ числа

$x = x + 0i$

$0 + yi = yi$ - имагинерно число

$x = \operatorname{Re} z, \; y = \operatorname{Im} z$

$z_1 + z_2 = (x + yi) + (a + bi) := (x + a) + (y + b)i$

$z_1 z_2 = (x + yi)(a + bi) = (xa - yb) + (xb + y)i$

$z = (x, y) = x + yi$

$z_1 - z_2 = (x + yi) - (a + bi) = (x + yi) + ((-a) + (-b)i)$

$z^n = \underbrace{z.z \dots z}_{n\text{-пъти}}$

$n \in N$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x+yi}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}:=\frac{1}{a^2+b^2}\left[(x+yi)(a-bi)\right].$$

$z=a+bi,\ \overline{z}=a+(-b)i$

$\downarrow$ комплексно спрегнато на z

$z.\overline{z}=a^2+b^2\geq 0$

$\mathbb{R}e$

$=0 \Leftrightarrow a=b=0$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\boxed{z.\overline{z}=|z|^2}$

$|\overline{z}|=\sqrt{a^2+(-b^2)}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$

$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ с-во на Δ-ка

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x+yi}{a+bi}=\frac{xa+yb}{a^2+b^2}+\frac{ya-xb}{a^2+b^2}i \quad !$$

$\{\sqrt[n]{z}\}$

$n\in N$

$\sqrt{-2}=\sqrt{2.i^{+2}}=\pm\sqrt{2}.i$

Зад. $x,y\in\mathbb{R}$

? 1) $2x+(1-i)(x+y)=3-i \Rightarrow (3x+y)-(x+y)i=3-i \Rightarrow \left|\begin{array}{l}3x+y=3\\x+y=1\end{array}\right.$

2) $(1-2i)^3=1-6i-12+8i=-11+2i$

? 3) $\dfrac{(2+i)^2-(1-2i)^3}{(1+2i)^3+(4-i)^2}=\dfrac{14+2i}{4-10i}=\dfrac{7+i}{2-5i}\cdot\dfrac{2+5i}{2+5i}=\dfrac{1}{4+25}\left[9+37i\right]=\dfrac{9}{29}+\dfrac{37}{29}i$

4)

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$

$i^2 = -1$

$i^4 = 1$

$$(a+b)^n = \sum^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b^n$$

нютонов
бином

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot i^{n-k} = \left(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \dots \right) + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} \dots \right) i$$

ад.

$$\frac{1+ia}{1-\frac{i}{a}} = \frac{(1+ia)\left(1+\frac{i}{a}\right)}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)i}{\frac{a^2+1}{a^2}} = \frac{(a^2+1)a^2}{(a^2+1)a} i = ia$$

$a \neq 0, a \in \mathbb{R}$

$$\frac{(1+2ia)(1+5ia)\left(1-\frac{a}{7}i\right)}{(1+7ia)\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{a}{5}\right)} = \frac{2i \cdot 5i}{7i} = \frac{10}{7} i$$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z_1 = x + yi = a + bi = z_2$

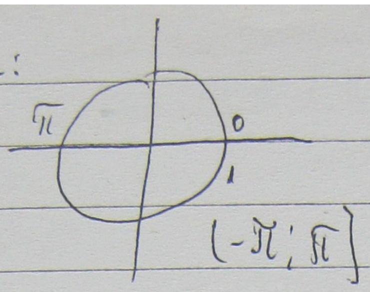
$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\qquad \varphi = \arg z$

$z_2 = |z_2|(\cos\psi + i\sin\psi)$ $\qquad \varphi_0 = \operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi_0 = \psi_0 \end{cases}$$

Задачи:



$$z_1+z_2:=\left[|z_1|\cos\varphi+|z_2|\cos\psi\right]+\left[|z_1|\sin\varphi+|z_2|\sin\psi\right\}$$

$$z_1z_2:=|z_1||z_2|\left[\underbrace{(\cos\varphi.\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)}_{\cos(\varphi+\psi)}+\underbrace{(\cos\varphi\sin\psi+\cos\psi\sin\varphi)}_{\sin(\varphi+\psi)}i\right]$$

$z^n=|z|^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ - ф-ла на моавър

$n\in\mathbb{N}$

$$(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt[n]{2}.\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

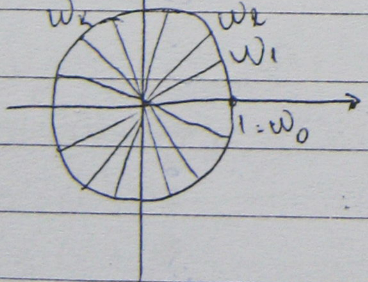
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{|z_2|(\cos\psi+i\sin\psi)}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\underbrace{\left[(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\psi)\right]}_{\left[\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)\right]}$$

$z^n=1$

$?\ z\in\mathbb{C}$

$$\left\{\sqrt[n]{1}\right\}=\left\{\omega_k\right\}_{k=0}^{n-1}=\left\{\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=\underset{0,..n-1}{\overline{0,n-1}}\right\}$$

n-ти корен на $1^{-ца}$



ω_1 - примитивен n-ти корен на $1^{-ца}$

$\omega_k=\omega_1^k$

n-ти корени на $1^{-ца}$ са n-те върхове на правилен многоъг.

$1=\cos0+i\sin0$

$$\omega_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

0.08. $A = (a_{ij}) \in F_{m \times n}$. Дефиниране: det $A = \sum (-1)^{[i_1, i_2 \dots i_n]}$ $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$, където сумата е по всички пермутации $i_1, i_2 \dots i_n$ на 1, 2, … n (det $A \in F$, сумата има n! събираеми половината са със знак + и половината със знак −) При $n = 1$: $A = (a_{11})_{1 \times 1}$ и det $A = a_{11}$ (Развитие на det)

Нека $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ трих. детерминанта т.е. $a_{ij} = 0$, $\forall i,j$ с $j > i$ тогава $\Delta = a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$

Разгл. развитието на Δ. Ако за някое k $(1 \le k \le n)$ е изп. $i_k > k$, то $a_{ki_k} = 0$ и $a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n} = 0$. Остава: $i_k \le k$ $\forall k = 1, 2 \dots n$, т.е. $i_1 = 1, i_2 = 2 \dots i_n = n$. Така $\Delta = a_{11}, a_{22} \dots a_{nn} (-1) =$
$= a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$

пример:

$n = 4$ $a_{41} a_{32} a_{11} a_{24} = a_{11} a_{24} a_{32} a_{41}$ – не участва в Δ; $a_{43} a_{32} a_{11} a_{24} = a_{11} a_{24} a_{32} a_{43}$ – участва в Δ със знак $(-1)^{[1423]} = (-1)^2 = +1$

Твърдение: Ако $j_1 j_2 \dots j_n$ и $k_1, k_2 \dots k_n$ са две пермутации на 1, 2 … n, то $a_{j_1k_1}, a_{j_2k_2} \dots a_{j_nk_n}$ участват в развитието на det със знак $(-1)^{[j_1 \dots j_n] + [k_1 \dots k_n]}$

Правим краен брой транспозиции $a_{j_pk_p} \leftrightarrow a_{j_qk_q}$ докато $a_{j_1k_1}, a_{j_2k_2} \dots a_{j_nk_n} = a_{1i_1}, a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ ($i_1, i_2 \dots i_n$ - перм. на 1, 2 … n) Това събираемо участва в det A със знак $(-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]}$

При всяка транспозиция на множител се извършва транспозиция $j_p \leftrightarrow j_q$ и трансп. $k_p \leftrightarrow k_q$. Съгласно лемата $j_1 j_2 \dots j_n$ и $k_1 \dots k_n$ променя четността си и следователно числото $[j_1 \dots j_n] + [k_1 \dots k_n]$ запазва четността си. Следователно $(-1)^{[j_1 \dots j_n] + [k_1 \dots k_n]} =$
$= (-1)^{[1 \dots n] + [i_1 \dots i_n]} = (-1)^{[i_1 \dots i_n]}$

Така $a_{j_1k_1} \dots a_{j_nk_n}$ участва в det A със знак
$(-1)^{[j_1 \dots j_n] + [k_1 \dots k_n]}$

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$ озн. $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{m2} \\ \dots & & \\ a_{1n} & a_{2n} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{n}$

A^t: транспониране на A $\left((A^t)^t = A \right)$

Теорема: За всяка квадратна матрица A е в сила равенството $\det A^t = \det A$

$A = (a_{ij}) \in F_{n\times n}$, $A^t = (a_{ji}) \in F_{n\times n}$

Всеки член от развитието на $\det A$ има вида $a_{j_1k_1}\dots a_{j_nk_n}$ и той участва и в развитието на $\det A^t$ и обратно.

Този член участва във всяка от двете детерминанти със знак $(-1)^{[j_1 j_n + k_1 k_n]}$. Развитието на $\det A$ и $\det A^t$ съвпадат т.е. равенство на двете детерминанти. $\det A^t = \det A$

<u>Основни с-ва на детерминантите</u>: С-вата, които следват 1-8 са валидни и за стълбове т.е. det не си променя стойността ($\det A^t = \det A$)

$\Delta = |a_{ij}|,\ i,j = 1\dots n$

1) Ако за някое p ($1 \leq p \leq n$) е изпълнено $a_{p1} = a_{p2} \dots = a_{pn} = 0$, то $\Delta = 0$.

$$\Delta = \sum (-1)^{[i_1\dots i_p \dots i_n]} a_{1i_1}\dots \underbrace{a_{pi_p}}_{0}\dots a_{ni_n}$$

и $\Rightarrow \Delta = 0$

2) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a'_{p1} + a''_{p1} & a'_{p2} + a''_{p2} & \dots & a'_{pn} + a''_{pn} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a'_{p1} & a'_{p2} \dots & a'_{pn} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta'} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a''_{p1} & a''_{p2} \dots & a''_{pn} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta''}$$

Означаваме Δ', Δ''

$$\Delta = \sum (-1)^{[i_1\dots i_p \dots i_n]} a_{1i_1}\dots a_{pi_p}\dots a_{ni_n} = \sum (-1)^{[i_1\dots i_p\dots i_n]} a_{1i_1}\dots (a'_{pi_p} + a''_{pi_p})\dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum (-1)^{[i_1\dots i_p\dots i_n]} a_{1i_1}\dots a'_{pi_p}\dots a_{ni_n} + \sum (-1)^{[i_1\dots i_p \dots i_n]} a_{1i_1}\dots a''_{pi_p}\dots a_{ni_n}$$

$= \Delta' + \Delta''$

3) $$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ \lambda a_{p1} \dots \lambda a_{pn} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{p1} \dots a_{pn} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (= \lambda \cdot \Delta)\ (\lambda \text{ - число от } F)$$

д-во: $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{p1} & \cdots & \lambda a_{pn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{[i_1 \ldots i_p \ldots i_n]} a_{1i_1} \ldots (\lambda a_{pi_p}) \ldots a_{ni_n} =$

$= \lambda \sum(-1)^{[i_1 \ldots i_p \ldots i_n]} a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} \ldots a_{ni_n} = \lambda . \Delta$

4) Ако в Δ имаме $a_{p1} = a_{q1}, a_{p2} = a_{q2} \cdots a_{pn} = a_{qn}$ за някои p и q ($1 \leqq p \leqq n$, $1 \leqq q \leqq n$), $p \neq q$, то $\Delta = 0$ (тук $n \geqq 2$)

д-во: разгл. един произволен член от развитието на Δ: (1) $a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} \ldots a_{qi_q} \ldots a_{ni_n}$ (при $p < q$). (1) участва със знак $(-1)^{[i_1 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_n]}$

Като друг член на Δ участва: (2) $a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} \ldots a_{qi_p} \ldots a_{ni_n}$. (2) участва със знак $(-1)^{[i_1 \ldots i_q \ldots i_p \ldots i_n]}$

Съгласно лемата тези знаци са противоположни. Но (2) = $a_{1i_1} \ldots a_{qi_q} \ldots a_{pi_p} \ldots a_{ni_n} = a_{1i_1} \ldots a_{pi_p} \ldots a_{qi_q} \ldots a_{ni_n} = (1)$

Извод: В развитието на Δ събираемите две по две се взаимно унищожават. $\Rightarrow \Delta = 0$

5) Ако за някои p и q ($1 \leqq p \leqq n$, $1 \leqq q \leqq n$), $p \neq q$ в Δ имаме $a_{p1} = \lambda a_{q1}, a_{p2} = \lambda a_{q2}, \ldots, a_{pn} = \lambda a_{qn}$ ($\lambda \in F$), то $\Delta = 0$

д-во: $\begin{array}{r} \\ p \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{q1} & \lambda a_{q2} & \cdots & \lambda a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \lambda \begin{array}{r} \\ \\ p \rightarrow \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \overset{4)}{=} \lambda . 0 = 0$

6) $\begin{array}{r} \\ p \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} + \lambda a_{q1} & \cdots & a_{pn} + \lambda a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \Delta$

д-во:

$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} + \lambda a_{q1} & \cdots & a_{pn} + \lambda a_{qn} \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{q1} & \cdots & \lambda a_{qn} \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \overset{5)}{=}$

$= \Delta + 0 = \Delta$

7) $p \neq q, (1 \leq p \leq 1 \leq q \leq n)$

$$\begin{array}{l} \\ p \to \\ q \to \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1}, & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}, & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = -\Delta$$

Д-во:

$$\begin{array}{l} \\ p \to \\ q \to \end{array}\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{vmatrix} \overset{6)}{=}$$ към $p^{ти}$ ред добавям $q^{ти}$ ред

$$= \begin{array}{l} p \to \\ q \to \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{p1}+a_{q1} & a_{p2}+a_{q2} & \cdots & a_{pn}+a_{qn} \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \overset{6)}{=} \begin{array}{l} p \to \\ q \to \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{p1}+a_{q1} & a_{p2}+a_{q2} & \cdots & a_{pn}+a_{qn} \\ -a_{q1} & -a_{q2} & \cdots & -a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$\overset{6)}{=} \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ -a_{q1} & -a_{q2} & \cdots & -a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \overset{3)}{=} - \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = -\Delta$$

8) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,q} & \cdots & a_{p-1,n} \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} \\ a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,q} & \cdots & a_{p+1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Нека за някое фиксиране $p\ (1 \leq p \leq r)$ имаме $a_{pq} = \lambda_1 a_{1q} + \dots + \lambda_{p-1} a_{p-1 q} + \lambda_{p+1} a_{p+1 q} \dots + \lambda_n a_{nq}$ което е изп. за $\forall q = 1, 2 .. n$ с някакви числа от λ_1 до $\lambda_n \in F$

т.е. p-тия ред на Δ е получен от първи ... (p-1)ви, (p+1)-ви ... n-ти ред с умножаване $\lambda_1 .. \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1} .. \lambda_n$ и събиране p-тия ред в Δ е линейна комбинация на останалите редове.

Тогава $\Delta = 0$

От с-во 2) Δ = сума на $(n-1)$ det, всяка от които има 2 пропорционални реда => съгласно с-во 5) всяка от тези $(n-1)$ детерминанти $= 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Зад. Да се пресметне следната детерминанта от $n^{ти}$ ред

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} =$$

към първия ред добавяме всички останали редове

$$= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

към всеки ред от 2-я до последния прибавяме 1-ви ред $x(-b)$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

$$\Delta = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

14.10.08г.

Упражнение

$z = (x, y) = x + yi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$i: i^2 = -1$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = 1$, $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$

n-ти корен на единицата

ω_1 - примитивен n-ти корен на 1-ца

$\omega_k = \omega_1^k$, $(\omega_k)^n = 1$

$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$

$5i = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

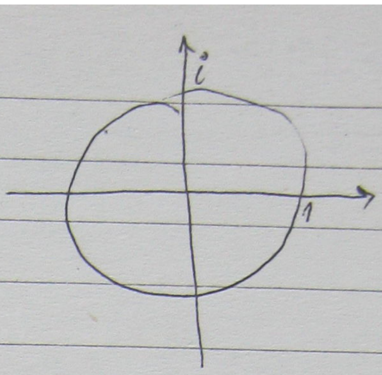
$-7i = 7(\cos -\frac{\pi}{2} + i\sin -\frac{\pi}{2})$

$1+\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$-1-i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4})$

$-\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$1-i = \sqrt{2}(\cos-\frac{\pi}{4}\ \ i\sin-\frac{\pi}{4})$



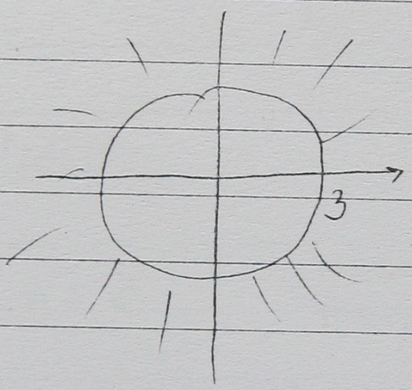
$-2 = -2+0i = \sqrt{(-2)^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$

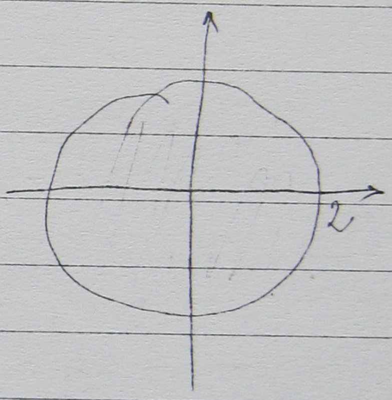
$1+\sqrt{3}i = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$

$|z| \leq 2$

$|z| > 3$

$\arg z = \frac{\pi}{2}$





$|z-1-i| = 1$

$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

$(a,b)\ ;\ r$

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

$d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = \sqrt{r}$

$|\underset{x+yi}{\overset{\shortparallel}{z}}-1-i| = 1$ – окр. с център i и радиус 1

$|(x-1)+(y-1)i| = 1$

$(1+\sqrt{3}i)^{17}(-1+i)^7 = 2^{17}(\cos\frac{17\pi}{3} + i\sin\frac{17\pi}{3})\cdot(\sqrt{2})^7(\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}) = 2^{17+\frac{7}{2}}(\cos(\frac{17\pi}{3}+\frac{21\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4})) =$

$\frac{(1-\sqrt{3}i)^{11}}{(-1-i)^{19}} = \frac{2^{11}(\cos-\frac{11\pi}{3} + i\sin-\frac{11\pi}{3})}{(\sqrt{2})^{19}(\cos-\frac{57\pi}{4} + i\sin-\frac{57\pi}{4})} = 2^{11-\frac{19}{2}}(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})) =$

$= 2^{\frac{4}{2}}(\cos\frac{11\pi}{2} + i\sin\frac{11\pi}{12}$

$\frac{\pi}{3}\quad \frac{\pi}{3}$

$-\pi/4 \quad -\pi/4$

$=$

$$\frac{(1-i)^7(1-i)^5}{(\sqrt{3}+i)^{13}}=\frac{(\sqrt{2})^7\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\sqrt{2}^9\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}^{13}\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)}=$$

$$=2^{-5}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\left(\underbrace{1+\cos\varphi}_{x}+i\underbrace{\sin\varphi}_{y}\right)^n=\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}+i\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n=$$

$$=\left(\underbrace{2\cos\frac{\varphi}{2}}_{\overset{\|}{|z|}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)^n=2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)$$

0.10 зад.

$m \in \mathbb{Z}$

$$w_0^m+w_1^m+w_2^m+\ldots+w_{n-1}^m=\begin{cases} n, & \text{ако } n \text{ дели } m \\ 0, & \text{ако } n \text{ не дели } m \end{cases}$$

Ако n дели $m \Rightarrow m = n\cdot l$

$w_k^m=(w_k^n)^l=1^l=1$

Ако n не дели $m \Rightarrow w_k^m \neq 1$, $w_1^m \neq 1$

$$1+w_1^m+w_1^{2m}+\ldots+w_1^{(n-1)m}=1\,\frac{w_1^{nm}-1}{w_1^m-1}=0$$

$\therefore\ a_1=1$, $q=w_1^m\neq 1$

$$\left\{\sqrt[n]{z}\right\}=\left\{\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=\overline{0,n-1}\right.$$

ф-ла на Моавър

$$\left\{\sqrt[17]{\frac{(\sqrt{3}+i)^7(-1+i)^9}{(1-\sqrt{3}i)^{13}}}\right\}=\left\{\sqrt[17]{2^{-3/2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=2^{-\frac{3}{34}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{17}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{17}\right)_{k=0,16}\right.$$

0.12 зад

а) $A=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

б) $B=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n\cdot x}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$x \neq 2k\pi$

$$Z = A + Bi = \underbrace{(\cos x + i\sin x)}_{z} + \underbrace{(\cos 2x + i\sin 2x)}_{z^2} + \dots + \underbrace{(\cos nx + i\sin nx)}_{z^n} = z(1 + z + \dots + z^{n-1}) =$$

$$= z\frac{z^n - 1}{z - 1} = z\frac{\overset{-2\sin^2\frac{nx}{2}}{\overset{\shortparallel}{(\cos nx - 1)}} + i\overset{2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\overset{\shortparallel}{\sin nx}}}{\underbrace{(\cos x - 1)}_{-2\sin^2\frac{x}{2}} + i\underbrace{\sin x}_{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}} = z\frac{-2\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2} - i\cos\frac{nx}{2}\right)}{-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)}\Bigg|\frac{i}{i} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} z \frac{\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\cos x + i\sin x)\left(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\sin\frac{(n-1)x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2} + i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)$$

$\cos^2 x = \frac{(1 + \cos 2x)}{2}$ $\quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

0.13 зад. $\quad z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$

$$z^n + \frac{1}{z^n} \overset{?}{=} 2\cos n\varphi, \; n \in \mathbb{Z}$$

$z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi \iff z^2 - 2\cos\varphi . z + 1 = 0$

$D = \cos^2\varphi - 1 = -\sin^2\varphi = i^2\sin^2\varphi = (i\sin\varphi)^2$

$z_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$

$z^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$

$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi} = \cos n\varphi \mp i\sin n\varphi$

$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$

0.11 зад.

$(x \in \mathbb{C})$

1) $x^5 = \sqrt{3} + i \iff \{\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}\} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right)$ $k = 0,4$

2) $x^6 = -27 \iff \{\sqrt[6]{27}\} = \sqrt[6]{27}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)$, $k = 0,5$

3) $x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow D = -2 = 2i^2 \pm (\sqrt{2}i)^2 \Rightarrow x_{12} = -1 \pm i\sqrt{2}$

4) $x^2 - (3+7i)x - 10 + 11i = 0$

5) $(3+i)x^2 + (1-i)x - 6i = 0$

6) $|x| + (i-i)x = 4 + 7i$

7) $|x| + 3x = 14 - 12i$

$D = m + ni = (a+ib)^2$

4) $D = (3+7i)^2 - 4(-10+11i) = 9 - 49 + 40 + 42i + 44i = -2i = (a+ib)^2$

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} a^2 = b^2 \\ ab = -1 \end{array}$ $\begin{array}{l} 1-i \\ -1+i \end{array}$

$x_{1,2} = \dfrac{3+7i \pm (1-i)}{2}$ $\begin{array}{l} \rightarrow 2+3i \\ \searrow 1+4i \end{array}$

5) $D = (1-i)^2 - 4(3+i)(-6i) = 1 - 2i + i^2 - 4(-18i - 6i^2) = 1 - 2i - 1 + 72i + 24i^2 =$

$= -24 + 70i = (a+ib)^2 = (5+7i)^2$

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ $= -2i + 72i - 24 =$

$= 70i - 24$

$\left|\begin{array}{l} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = 70 \end{array}\right.$

$ab = 35$

$x_{1,2} = \dfrac{-(1-i) \pm (5+7i)}{2(3+i)}$

$x_1 = \dfrac{4+8i}{2(3+i)} = \dfrac{(2+7i)(3-i)}{10} = \dfrac{10+10i}{10} = 1+i$

$x_2 = \dfrac{-1+i-5-7i}{2(3+i)} = \dfrac{-3-3i}{3+i} = \dfrac{(-3-3i)(3-i)}{10} = \dfrac{-12-12i}{10}$

6) $x = a + bi$ $\sqrt{a^2+b^2} + (1-i)(a+bi) = 4+7i$

$\left|\begin{array}{l} \sqrt{a^2+b^2} + a + b = 4 \\ -a + b = 7 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \Rightarrow \sqrt{a^2+(7+a)^2} + a + 7 + a = 4 \\ \Rightarrow b = 7 + a \quad \sqrt{a^2+49+14a+a^2} + 2a + 7 = 4 \end{array}$

$\sqrt{2a^2+14a+49} = 4 - 7 - 2a$

$\sqrt{2a^2+14a+49} = -3-2a$ - - - - -

$\boxed{x = a+bi = -4+3i}$

7/

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad , a_i \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ (p,q) = 1$

1) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

2) $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$

3) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6 = 0$

	1	-2	-13	38	-24
1	1	-1	-14	24	0
-4	1	-5	6	0	

$(x-1)(x^3-x^2-14x+24) = 0$

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

$f(x+1) = (x+1)^4 + a(x+1)^3 - 8(x+1)^2 + a(x+1) + 2$

	1	4	-2	-12	9
-1	1	3	-5	7	2
-1	1	2	-7	0	
-1	1	1	-8		
-1	1	0			
-1	1				

20.10.08.

Лекция

Адюнгирани количества и поддетерминанти.

Разгл. детерм. Δ от ред n: $\Delta = |a_{ij}|$, $i,j = 1,2,\dots,n$

$\Delta = \sum (-1)^{[i_1, i_2 \dots i_n]} a_{1i_1}, a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ фиксираме p и q, $(1 \leq p \leq n,\ 1 \leq q \leq n)$ a_{pq}

От всички членове на Δ, съдържащи a_{pq}, изваждаме a_{pq} пред скоби. В скобите: A_{pq} (адюж. колич. на a_{pq})

Един член от Δ съдържа a_{pq}, когато $i_p = q$, а $i_1 \dots i_{p-1}, i_{p+1} \dots i_n$ е пермутация на $1 \dots q-1, q+1 \dots n$. Следователно (*) $A_{pq} = \sum (-1)^{[i_1 \dots i_{p-1}, q, i_{p+1} \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1, i_{p-1}} a_{p+1, i_{p+1}} \dots a_{ni_n}$ (сумата съдържа $(n-1)!$ събираеми)

A_{pq} не съдържа елементи от p-тия ред и от q-тия стълб на Δ. $a_{pq} A_{pq}$ изчерпва всички членове на Δ, съдържащи a_{pq}.

Тогава за всяко p $(1 \leq p \leq n)$ $a_{p1} A_{p1} + a_{p2} A_{p2} + \dots + a_{pn} A_{pn} = \Delta$ или $\sum_{k=1}^{n} a_{pk} A_{pk} = \Delta$ (развитие на дет. Δ по адюнг. колич. на ел. от p-тия даден ред)

Също за всяко q $(1 \leq q \leq n)$ $a_{1q} A_{1q} + a_{2q} A_{2q} + \dots + a_{nq} A_{nq} = \Delta$ или $\sum_{k=1} a_{kq} A_{kq} = \Delta$ (развитие на дет. Δ по адюнг. колич. на q-тия стълб)

Фиксираме p и q $(1 \leq p \leq n,\ 1 \leq q \leq n)$. В Δ зачертаваме p-тия ред и q-тия стълб и получаваме дет. от ред n−1:

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,q-1} & a_{1,q+1} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{p-1,1} \dots a_{p-1,q-1} & a_{p-1,q+1} \dots a_{p-1,n} \\ a_{p+1,1} \dots a_{p+1,q-1} & a_{p+1,q+1} \dots a_{p+1,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n,q-1} & a_{n,q+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Δ_{pq} − поддетерминанта на ел. a_{pq}.

Развитието на Δ_{pq} е:

(**) $\Delta_{pq} = \sum (-1)^{[i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{ni_n}$

сумата по всички пермутации $i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_n$ на числата

$1, \dots q-1\ q+1 \dots n$; има $(n-1)!$ събираеми)

поддет. Δ_{pq} не съдържа ел., както от p-тия ред, така и от q-тия стълб на Δ.

$$n=3 \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

Нека $p=2,\ q=3$; a_{23}; $\underset{\text{адюнг.}}{A_{23}} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$ и $\underset{\text{поддет.}}{\Delta_{23}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$ (и $A_{23} = -\Delta_{23}$)

Т: За всички p и q от 1 до n е в сила равенството: $A_{pq} = \Delta_{pq} \cdot$

Д-во: A_{pq} и Δ_{pq} се състоят от всички събираеми $(***)$ $a_{1i_1} \dots a_{p-1}$ $a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{ni_n}$, където $i_1\ i_{p-1}\ i_{p+1} \dots i_n$ е произволна пермутация на числата от 1 до n без q, $(1, \dots q-1, q+1 \dots n)$

$(***)$ участва в Δ_{pq} със знак $(-1)^{[\sigma]}$, където $\sigma = i_1 \dots i_{p-1}, i_{p+1} \dots i_n$

$(***)$ участва в A_{pq} със знак $(-1)^{[\tau]}$, където $\tau = i_1 \dots i_{p-1}\ q\ i_{p+1} \dots i_n$

Всяка инверсия в σ е инверсия и в τ; с колко бр. на инверсиите в τ е по-голям от този в σ?

Нека измежду $i_1, \dots i_{p-1}$ m на бр. са $> q$, $(0 \leq m \leq p-1)$ и те образуват m инверсии с q (в τ)

Тогава от $i_1 \dots i_{p-1}$ $p-1-m$ са $< q$: естествените числа $< q$ са $q-1$ на бр. и от тях $p-1-m$ са пред q, сл. $(q-1)-(p-1-m)$ $= q-p+m$ от тях са след q, и сл. те образуват $q-p+m$ инверсии с q: Така $[\tau] = [\sigma] + m + q - p + m$, т.е. $[\tau] = [\sigma] + q - p + 2m$, $[\tau] = [\sigma] + p + q + 2(m-p) \Rightarrow (-1)^{[\tau]} = (-1)^{[\tau]}(-1)^{p+q}$

Така: A_{pq} и Δ_{pq} се състоят от едни и същи събираеми $***$ като знаците на тези събираеми в A_{pq} и Δ_{pq} се различават с $(-1)^{p+q}$ $\Rightarrow A_{pq} = \Delta_{pq}(-1)^{p+q}$ е изпълнено дори „поиенно"

$(1 \leqq p \leqq n)$ От $a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{q2} \dots + a_{pn}A_{qn} = \Delta$ и

$A_{p1} = (-1)^{p+1}\Delta_{p1}, A_{p2} = (-1)^{p+2}\Delta_{p2} \dots, A_{pn} \overset{!}{=} (-1)^{p+n}\Delta_{pn}$ (от Т)

$\Rightarrow (-1)^{p+1}a_{p1}\Delta_{p1} + (-1)^{p+2}a_{p2}\Delta_{p2} + \dots + (-1)^{p+n}a_{pn}\Delta_{pn} = \Delta$

или $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{p+k}a_{pk}\Delta_{pk} = \Delta$ (развитие на дет. Δ по поддет. на ел. от p-тия ред). Също $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+q}a_{kq}\Delta_{kq} = \Delta$ - (развитие на Δ по поддет. на ел. q-тия стълб)

Да се пресметне:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & \textcircled{1} & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \overset{\cdot(-3) \quad 4 \text{ стълб } \cdot 2}{=} \begin{vmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & -3 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{\overset{\text{ред стълб}}{1+2}} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -1 \\ -4 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= - \overset{\cdot(-5) + 1 \text{ стълб} \quad \cdot 7 + 3 \text{ стълб}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -21 & 5 & 34 \\ 11 & -3 & -11 \end{vmatrix}} = -(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} -21 & 34 \\ 11 & -11 \end{vmatrix} = -231 - 374 =$$

$$=$$

Твърдение: В сила е: $a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \dots + a_{pn}A_{qn} = \begin{cases} \Delta, & \text{ако } p = q \\ 0, & \text{ако } p \neq q \end{cases}$

Символ на Кронекер: за $p, q \in \mathbb{N}$ деф. $\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{ако } p = q \\ 0, & \text{ако } p \neq q \end{cases}$

Така $\sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{qk} = \delta_{pq} \cdot \Delta$

Аналогично: $\sum_{k=1}^{n} a_{kp}A_{kq} = \delta_{pq} \cdot \Delta$

Разгл. дет. от ред n:

$$\Delta_1 = \begin{array}{r|llll} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & & & \dots \\ p \to & a_{p1} & \dots & & a_{pn} \\ & \dots & & & \dots \\ q \to & a_{p1} & \dots & & a_{pn} \\ & \dots & & & \dots \\ & a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{array} \Rightarrow \Delta_1 = 0 \text{ (има 2 = реда)}$$

Развиваме Δ_1 по адюнг. колич. на q-тия ред.

Тези адюнг. колич. са същите като адюнг колич. на q-тия ред в Δ, т.е. $A_{q1}, A_{q2} \cdots A_{qn}$. Следователно $\Delta_1 = a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \dots a_{pn}A_{qn}$, но

$\Delta_1 = 0$ и сл. $a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} \dots a_{pn}A_{qn} = 0$

Разглеждаме произв. с-ма от n лин. у-я с n неизвестни ($n \in \mathbb{N}$):

$$(1) \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad | \cdot A_{1k} \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad | \cdot A_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{nk}x_n + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad | \cdot A_{nk} \end{array} \right.$$

a_{ij} и $b_1, \dots b_n \in F$-поле. Означ. $\Delta = |a_{ij}|$ $i,j = 1,2 \dots n$

фиксираме k, $1 \leqq k \leqq n$; $A_{1k}, A_{2k} \dots A_{nk}$ са адюнг. колич. на ел от k-тия стълб на Δ

$$x_1(\underbrace{a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \dots + a_{n1}A_{nk}}_{=0(\text{Т6})}) + \dots + x_k(\underbrace{a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}}_{=\Delta(\text{Т6})}) \dots + x_n(\underbrace{a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} + \dots + a_{nn}A_{nk}}_{=0(\text{Т6})}) = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}$$

$\Rightarrow \Delta x_k = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}$

Разгл. дет. $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} \dots b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots b_2 \dots a_{2n} \\ \vdots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}$

Развиваме по адюнг. колич. на k-тия стълб: тези адюнг. колич. са същите като адюнг. колич. на k-тия стълб в Δ, т.е. $A_{1k}, A_{2k} \dots A_{nk}$. Тогава развитието на $\Delta_k = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}$. Така $\Delta x_k = \Delta_k$. Така следствие от (1) са (2) $\Delta x_k = \Delta_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, където Δ е осн. дет. на с-мата ($\Delta = |a_{ij}|$), а Δ_k се получава от Δ като заменим k-тия стълб на Δ със стълба от свободните членове на с-мата ($b_1, b_2 \dots b_n$)

Нека $\Delta \neq 0$. Тогава от (2) $\Rightarrow x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$

(Това са ф-ли на Крамер)

Проверка в (1): i-тото у-е на с-мата (1), $(i = 1, 2 .. n)$ с

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ или $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$

Тук заместваме $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left| b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk} \right|$ или

$$x_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} b_j A_{jk}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim\sim\sim}{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} b_j A_{jk}\right) = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}}_{\delta_{ij} \cdot \Delta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_{ij} \Delta = \frac{1}{\Delta} \cdot b_i \cdot 1 \cdot \Delta = \underset{\sim\sim}{b_i}$$

Това е $\forall i = 1, 2, \dots n$ т.е. $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \dots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ удовлетворяват

всички у-я на с-мата (1) $\Rightarrow$ те — единственото реш. на (1).

Нека в с-мата (1) $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ (хомогенна с-ма). При $\Delta \neq 0$ с-мата има единствено реш. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (вярно и обратното)

14.10 1) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

2) $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$

$4x^2(3x+1) - (3x+1) = 0$

$(3x+1)(4x^2-1) = 0$

$3x + 1 = 0$ $\qquad$ $4x^2 - 1 = 0$

$3x = -1$ $\qquad$ $(2x-1)(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = 1,\ 2x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2},\quad x = -\frac{1}{2}$

.08.

Упражнение

Метод на Гаус за решаване на с-ми линейни у-я (СЛУ)

(1) $\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$

$x_1, x_2 .. x_n$ - неизвестни

a_{ij} - коеф. на (1)

b_j - своб. коеф на (1)

m - бр. у-я

матрица на (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

разширена матрица на с-мата (1) $\to \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$

Можем да разменяме редове; можем да умножим ред по число ≠0 и (число ≠0) ред от $\bar{A}$ + др. ред на $\bar{A}$

$0.x_1 + 0.x_2 + \dots + 0.x_n = 5$ - несъвместима реш. (няма реш.)

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & \textcircled{*} & b_1 \\ & a_{22} & & b_2 \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & a_{nn} & b_n \\ \hline 0 \; 0 & & 0 & 0 \end{array} \right)$ съвместима и определена $(x_1, x_2 .. x_n)$ (има 1 реш)

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & & b_1 \\ & a_{22} & & b_2 \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & a_{rr} & b_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$ съвместима и неопределена (има безброй много реш)

да се реши с метод
на Гаус

Зад.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 7x_1 - 15x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -15 & 11 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} (-7) \\ (-3) \end{matrix} \sim$$

$L'_2 = L_2 + (-3)L_1$

$L'_3 = L_3 - 3L_1$

$L'_4 = L_4 - 7L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 13 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & -8 & -5 & 12 \\ 0 & 13 & -3 & -4 & 25 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 13 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 13 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -29 & 58 \end{array}\right)$$

$L'_3 = L_3 - L_2$

$L'_4 = L_4 - L_2$

$L'_4 = L_4 + 4L_3$

съвместна и опр.

$-29x_4 = 58 \Rightarrow x_4 = -2$

$-x_3 - 6(-2) = 9 \Rightarrow x_3 = 3$

$\Rightarrow -1, 2, 3, -2$

Зад.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\bar{A} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{2} & -1 & -1 & 3 & 1 \\ \textcircled{4} & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ н.р.}$$

несъвместна

5 10.17

д) $$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3+2x_4=6 \\ -x_1+x_2+4x_3-3x_4=-2 \\ x_2+3x_3+x_4=5 \\ x_1+5x_2+5x_3 \quad =14 \end{array}\right.$$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & -2 & 8 \end{array}\right) \overset{2}{\curvearrowleft} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\frac{1}{3}\right) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \uparrow \end{array}$$

$L_3'=2L_3-L_2$

$L_4'=L_4-4L_3$

$L_4'=L_4-2L_3$ ∞ реш.

$\boxed{x_4=p}$

$\boxed{x_3=2-p}$, $x_2+3x_2+x_4=5$, x, =

$x_2+6-3p+p=5$

$\boxed{x_2=2p-1}$

$x_1+x_2-x_3+2x_4=6$

с-мата е съвместима и неопределена

$$\left|\begin{array}{l} x_1-x_2-x_3-x_4+2x_5=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3+x_4+6x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-7x_3-4x_4+9x_5=0 \end{array}\right.$$

Хомогенната с-ма е винаги съвместима.

$$A=\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -7 & -4 & 9 \end{array}\right)^{\cdot(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{p}{4x_3}+\underset{q}{4x_4}-x_5=0$$

$(\quad , \quad , p, q, 4p+4q)$

0.18б) $$\begin{cases} 2x_1+3x_2-7x_3+5x_4+2x_5=0 \\ 6x_1+3x_2-19x_3+7x_4+8x_5=0 \\ 10x_1+22x_2-36x_3+33x_4+23x_5=0 \\ 6x_1+8x_2-18x_3+11x_4+37x_5=0 \\ 2x_1+13x_2-9x_3+17x_4+14x_5=0 \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 3 & -7 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & -19 & 7 & 8 \\ 10 & 22 & -36 & 33 & 23 \\ 6 & 8 & -18 & 11 & 37 \\ 2 & 13 & -9 & 17 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ (-5) \\ (-3) \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 8 & 13 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 31 \\ 0 & 5 & -1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 31 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & -92 \\ 0 & 0 & 20 & -20 & 230 \\ 0 & 0 & 14 & -14 & 151 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 31 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = p$

$x_4 = q$

$2p - 2q + 23x_5 = 0$

$x_5 = 2q - 2p$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 + (\alpha+6)x_4 = 0 \end{cases} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 8 & \alpha+6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$L'_3 = L_3 + 2L_2$

I сл. $\alpha+2 \neq 0 \Rightarrow x_4 = 0$

$x_3 = -12$

$x_2 = -5$

$x_1 =$

II сл. $\alpha + 2 = 0$ - неопр.

$x_4 = p$

$x_3 = -12 - 5p$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + (\alpha-\beta+9)x_4 + 3x_5 = 13 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 + \beta x_5 = \beta + 5 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 4_{(-1)} \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & (\alpha-\beta+9) & 3 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 6 & \beta & \beta+5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & \beta-1 & \beta+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & \beta+1 & \beta+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+1 & \beta+1 \end{array}\right)$$

$(\beta+1)x_5 = \beta+1$

I сл. $\beta+1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x_5 = 1}$

II сл. $\beta+1=0$ ∞ реш

$(\alpha-\beta)x_4 = 1$

III сл. $\alpha-\beta=0$ н.р.

$\alpha = \beta$

IV $\alpha \neq \beta$ $\boxed{x_4 = \frac{1}{\alpha-\beta}}$

I 1) $\alpha - \beta = 0$

с-мата е несъвместима

I 2) $\alpha - \beta \neq 0 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{\alpha - \beta} = x_3$

$x_5 = 1 = x_2$

съвместима и опр.

II сл. $\beta + 1 = 0$

$\alpha \neq \beta$

$x_2 = x_5 = p$

$x_3 = x_4 = \frac{1}{\alpha - \beta}$

0.19 в) $$\left| \begin{array}{l} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} - \\ \\ - \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{array}\right)$$

I сл. $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ съвм. и неопр. $(1-p-q, p, q)$

II сл. $\lambda \neq 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \end{array}\right)$$

$(3-\lambda)x_3 = 1$

II 1) $3 - \lambda = 0$ несъвм. с-ма

II 2) $3 - \lambda \neq 0$

$x_3 = \frac{1}{3-\lambda}$ $\quad x_2 = -1 + x_3 = \frac{-3+\lambda+1}{3-3}$ $\quad x_1 = 1$

съвм. и опр.

0.20. а) $x_n + x_{n+1} = b_1$

$x_{n-1} \dots + x_{n+1} = b_2$

$x_1 \dots + x_{n+1} = b_n$

$ax_1 + ax_2 + \dots ax_n - x_{n+1} = 0$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\ 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & b_1 \\ a & a & a & \dots & a & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_1 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & & & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ & & & & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & -1-na & -a\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \end{array}\right)$$

I сл. $a = 0$

$x_{n+1} = 0$ $\quad x_2 = b_{n-1}$

$x_n = b_1$ $\quad x_1 = b_n$

$x_{n-1} = b_2$

$$\boxed{(b_n, b_{n-1}, \dots b_2, b_1, 0)}$$

II сл. $a \neq 0$

$L'_{n+1} = L_{n+1} - a(L_1 + L_2 + \dots + L_n)$

$(-1-na) x_{n+1} = -a \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

II 1) $-1-na = 0$ $\quad a = -\frac{1}{n}$ $\quad 0\, x_{n+1} = -\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

II 1а) $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \neq 0$ несъвм.

II 1б) $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 0$

$x_{n+1} = p$ $\quad x_{n-1} = b_2 - p$

$x_n = b_1 - p$ $\quad x_1 = b_n - p$

II 2) $-1-na \neq 0$

$$x_{n+1} = \frac{a \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{1+na} = A$$

$x_n = b_1 - A$

$x_{n-1} = b_2 - A$

Лекция

Умножение на детерминанти

Лема: Нека
$$\Delta = \begin{array}{r} \\ \\ n\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ m\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \end{array} \left| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{i2} & \dots & a_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mm} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ * & * & \dots & * & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{4em}}_{n}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{4em}}_{m}} \end{array} \right| \quad \text{и } \Delta_1 =$$

(от ред $n+m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $*$ - произв. число)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

Тогава $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$

Озн. $\Delta = |c_{ij}|$, $i, j = 1, 2 \dots, n+m$

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } i \le n, j \le n \\ 0 & \text{при } i \le n, j > n \\ * & \text{при } i > n, j \le n \\ b_{i-n, j-n} & \text{при } i > n, j > n \end{cases}$$

$$\Delta = \sum (-1)^{[\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots \alpha_{n-m}]} . c_{1\alpha_1} \dots c_{n\alpha_n} c_{n+1\, \alpha_{n+1}} \dots c_{n+m, \alpha_{n+m}}$$

Ако за някое k, $1 \le k \le n$, е изпълнено $\alpha_k > n$, то $c_{k\alpha_k} = 0$ и цялото събираемо в Δ е $= 0$

Нека $\alpha_k \le n$ $\forall k = 1, \dots n$ т.е. $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ е пермутация на $1, 2 \dots n$. Тогава $\alpha_{n+1} \dots \alpha_{n+m}$ е пермутация на числата $n+1 \dots n+m$

Озн. $\beta_1 = \alpha_{n+1} - n$, $\beta_2 = \alpha_{n+2} - n, \dots$, $\beta_m = \alpha_{n+m} - n$

$\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m$ е пермутация на $1, 2 \dots m$

$$(-1)^{[\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\le n} \underbrace{\alpha_{n+1} \dots \alpha_{n+m}}_{> n}]} = (-1)^{[\alpha_1 \dots \alpha_n] + [\alpha_{n+1} \dots \alpha_{n+m}]} =$$

$$= (-1)^{[\alpha_1 \dots \alpha_n] + [\beta_1 \dots \beta_m]}$$

$c_{1\alpha_1} = a_{1\alpha_1}, \dots, c_{n\alpha_n} = a_{n\alpha_n}; \; c_{n+1,\alpha_{n+1}} = b_{1,\alpha_{n+1}-n} = b_{1\beta_1}, \dots, c_{n+m,\alpha_{n+m}} =$
$= b_{m,\alpha_{n+m}-n} = b_{m\beta_m}$

$$\Delta = \sum (-1)^{[\alpha_1 \dots \alpha_n]} \cdot (-1)^{[\beta_1 \dots \beta_m]} \cdot a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n} \cdot b_{1\beta_1} \dots b_{m\beta_m}$$, като сумирането е по всички пермутации $\alpha_1 \dots \alpha_n$ на $1, \dots n$ и по всички пермутации $\beta_1 \dots \beta_m$ на $1, \dots, m$

Сл. $\Delta = \sum (-1)^{[\alpha_1 \dots \alpha_n]} a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n} \cdot \sum (-1)^{[\beta_1 \dots \beta_m]} b_{1\beta_1} \dots b_{m\beta_m} =$
$= \Delta_1 \cdot \Delta_2$. Така доказахме твърд. на лемата $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$

Теорема: Нека $\Delta_1 = |a_{ij}|, i,j = 1, \dots, n$, $\Delta_2 = |b_{ij}|, i,j = 1 \dots n$ са две детерминанти от n-ти ред. Тогава $\Delta_1 \Delta_2 = \Delta$, където $\Delta = |c_{ij}|$ $i,j = 1 \dots n$ е също детерминанта от n-ти ред и
(1) $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$ $\forall i,j = 1,2 \dots n$ (правило „ред х стълб")

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \; \Delta_1 \Delta_2 = \Delta = \begin{vmatrix} -2.4 + 0.1 & (-2)(-1) + 0.5 \\ 1.4 + 3.1 & 1(-1) + 3.5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = 21$ и $\Delta = -112 - 14 = -126$
$\Rightarrow -6 \cdot 21 = -126$

Като запазим Δ_1 и транспонираме Δ_2, получаваме, че $\Delta_1 \Delta_2 = \Delta$, където $\Delta = |c_{ij}|$ $i,j = 1, \dots, n$ и (2) $c_{ij} = a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2} + \dots + a_{in} b_{jn}$ $\forall i,j = 1,2,\dots,n$ („ред по ред")

Аналогично (3) $c_{ij} = a_{1i} b_{1j} + a_{2i} b_{2j} + \dots + a_{ni} b_{nj}$ („стълб х стълб")

и (4) $c_{ij} = a_{1i} b_{j1} + a_{2i} b_{j2} + \dots + a_{ni} b_{jn}$ („стълб х ред")

Разгл. помощна дет. D от ред Δn:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Лема $\Rightarrow D = \Delta_1 \Delta_2$. За всяко $i = 1, 2 \dots n$ към i-тия ред на дет. D прибавям: $(n+1)$-ви ред $\times a_{i1}$, $(n+2)$-ри ред $\times a_{i2} \dots$ $(2n)$-ти ред $\times a_{in}$.

$$D = \begin{array}{c} \\ n \\ \\ \\ n \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{12} & \dots & & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{22} & \dots & & b_{2n} \\ \dots & & & & \dots & & & \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad -1}_{n} & & & & \underbrace{b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{nn}}_{n} & & & \end{vmatrix}$$

$i, j = 1, 2 \dots n$ имаме $d_{ij} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \dots + b_{nj}a_{in}$

т.е. $d_{ij} = c_{ij}$ $\forall i, j = 1 \dots n$

Сега разместваме $(n+1)$-вия стълб с 1-ви стълб, $(n+2)$-ри стълб с 2-ри стълб, ..., $(2n)$-тия стълб с (n)-тия стълб (променя се знакът)

$$D = (-1)^n \cdot \begin{array}{c} \\ n \\ \\ \\ n \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & & & \\ \underbrace{b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{nn}}_{n} & & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad -1}_{n} & & & \end{vmatrix} \quad \text{Лема} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix},$$

$D = (-1)^n \cdot \Delta \cdot (-1)^n$, т.е. $\underline{D = \Delta}$

От $D = \Delta_1 \Delta_2$ и $D = \Delta$ $\Rightarrow \Delta = \Delta_1 \Delta_2$

Действия с матрици

Разгл. $F_{m \times n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$, F - поле). Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$\lambda \in F$. Дефинираме $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$. $\lambda A \in F_{m\times n}$

Нека $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$. Деф. $A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$;

$A+B \in F_{m\times n}$

Деф. $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ (нулева матрица)

Означ. с $-A$: $(-1)A$ (противоположна на матр A); $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$

Означаваме с $A-B$: $A+(-B)$ (разлика на матр A и B); $A-B = (a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$

В $F_{m\times n}$ са изпълнени:

1) $A+B=B+A$ (комутативност)
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (асоциативност)
3) $A+O = A \quad \forall A \in F_{m\times n}$
4) $A+(-A) = O \quad \forall A \in F_{m\times n}$
5) $1.A = A \quad \forall A \in F_{m\times n}$
6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \quad (A \in F_{m\times n},\ \lambda, \mu \in F)$
7) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad (A, B \in F_{m\times n},\ \lambda$ - число $\in F)$
8) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \quad (A \in F_{m\times n},\ \lambda, \mu \in F)$

С-вата 1) - 8) характеризират понятието лин. пространство (на поле F)

Нека $A = (a_{ij}) \in F_{m\times s}$ и $B = (b_{ij})_{s\times n}$ $(m, n, s \in \mathbb{N})$. Дефинираме произведение AB по правилото „ред по стълб" т.е. деф. $AB = C$, където $C = (c_{ij})$ и $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj}$ $\forall i = 1, \dots m$, $\forall j = 1, \dots n$. $AB \in F_{m\times n}$

Може да съществува AB, но да не съществува BA, $\exists\ AB$ и $BA \Leftrightarrow A_{m\times n}, B_{n\times m}$, тогава $(AB)_{m\times m}$ и $(BA)_{n\times n}$, в частност $AB \neq BA$

Да разгледаме $F_{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$; $\forall A, B \in F_{n\times n}\ \exists\ A+B \in F_{n\times n}$ и $AB, BA \in F_{n\times n}$, но в общия случай $AB \neq BA$, умножението на матрици не е комутативно). Може $A \neq 0$, $B \neq 0$, но $AB = 0$ (A и B: делители на 0) напр $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

За $A \in F_{n\times n}$ дефинираме $A^2 = A.A$ ($\exists$ $n \in F_{n\times n}$); за $A, B \in F_{n\times n}$ напр. $(AB)^2 = AB.AB$ ($\neq A^2B^2$, ако $AB \neq BA$, ф)

! С-во: За всеки две матрици A, B от $F_{n\times n}$ е в сила: $\det(AB) = \det A . \det B$ $(= \det(BA))$:

Това следва от дефиницията за умножение на матрици и теоремата за умножение на детерминанти. (и двете са по правилото „ред по стълб")

За с-ва: Изпълнени са винаги когато $\exists$ сумата и произведението на участващите матрици например в $F_{n\times n}$, следните св-ва:

9) $(AB)C = A(BC)$ (асоциативност)

10) $(A+B).C = AC + BC$ и $C(A+B) = CA + CB$ (дистрибутивност)

11) $(\lambda A).B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ $(\lambda \in F)$

Д-во на 9): (за $A, B, C \in F_{n\times n}$): $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$

Означ. $AB = D$, $D = (d_{ij})$, където $d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, $i, j = 1, \dots n$ или $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Означ. $(AB).C = DC = F$, $F(f_{ij})$, където $f_{ij} = d_{i1}c_{1j} + d_{i2}c_{2j} + \dots + d_{in}c_{nj}$, т.е. $f_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} d_{il}c_{lj}$, или $f_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} (a_{ik}b_{kl}c_{lj})$

Означ. $BC = P$, $P = (p_{ij})$, $p_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} b_{il}c_{lj}$.

Означ. $A(BC) = AP = Q$, $Q = (q_{ij})$, $q_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kj} =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum\limits_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$

Така $f_{ij} = q_{ij}$ за $\forall\, i,j = 1, \dots, n$, т.е. $F = Q$ или $(AB)C = A(BC)$

0.19. в)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8 \\ 10x_1 + 2x_2 + 8x_4 = \lambda \end{cases}$$

$$\bar{A} \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 11 & 11 & 4 & 8 & 8 \\ 10 & 2 & 0 & 8 & \lambda \end{array}\right. \begin{array}{l} (-2) \\ (-11) \\ (-10) \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 33 & 15 & -3 & 30 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20+\lambda \end{array}\right. (-3) \quad \vec{A} = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \end{array}\right.$$

23.10.08.

Упражнение

Детерминанти

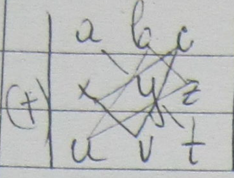
$A \in M_n(F) = F_{n \times n}$

$\det A$

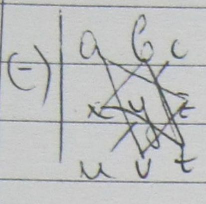
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} a_{2,n-1}, \dots, a_{n-1,2} a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$



$$(+)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ x & y \\ u & v \end{matrix} = ayt + bzu + cxv - (cyu + azv + bxt)$$



$$(-)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix}$$

Зад 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot(-3) + 2\cdot1\cdot(-2) + 2\cdot0(-1) - (0\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot-3 + (-1)\cdot3\cdot(-2) = -9 - 4 + 12 - 6 =$$

2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - (3\cdot5\cdot7 + 4\cdot2\cdot9 + 8\cdot6\cdot1) = 45 + 84 + 96 - (105 + 72 + 48) = 225 - 225 = 0$$

3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\|$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(-\lambda-1)^2$$

дом:

$$\begin{vmatrix} 2-i & 3+i & 7-i \\ 1+i & 1-2i & 3-i \\ 2+i & 1+3i & 2-3i \end{vmatrix}$$

I столб

II столб

Зад. дом

?

$$-\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot(-2) = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{по } S_1}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & \textcircled{2} & 1 & 3 \\ -1 & \textcircled{3} & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{по } S_2}{=} 2$$

$$L_3' = L_3 - 2L_1$$
$$L_4' = L_4 + L_1$$
$$L_5' = L_5 - L_1$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \Big| \quad \Big|$$

Зад.
дом.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Зад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \underset{\text{по } S_1}{=} x(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & y & & \\ & x & y & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & x & y \\ & & & x \end{vmatrix}_{\Delta_{n-1} = x^{n-1}} + y(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & x & \ddots & 0 \\ & & & \\ & & x & y \end{vmatrix}_{\Delta_{n-1} = y^{n-1}}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} \cdot y^n = x^n - (-y)^n$$

Зад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_k' = L_k - L_1 \\ k = 2 \ldots n \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

Зад.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 5 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 7 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & (n-1) \end{vmatrix} \underset{\substack{S_k' = S_k - kS_1 \\ k = 2..n}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

Зад.

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ & & & x_1 & 1 \\ & 1 & x_2 & & \vdots \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 & & \vdots \\ x_n & & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ & & & & x_1-1 \\ & 0 & & x_2-1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 \\ x_{n-1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1)$$

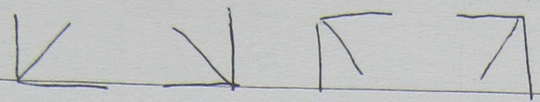
$$L_k' = L_k - L_1$$

Зад.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_i \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ - & - & - & - & - \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \dots & x_ny_n \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & \dots & y_n \\ x_1y_2-x_2y_1 & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ x_1y_n-x_ny_1 & & & & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{по } S_n \\ \text{(посл. стлб)}}}{=}$$

$$L_k' = L_k - x_kL_1$$

$$= x_1 y_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1y_2-x_2y_1 & & & 0 \\ & x_2y_3-x_3y_2 & & \\ & & x_3y_4-x_4y_3 & \\ * & & & \ddots \\ & & & x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} x_1 y_n \prod_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$



det

тип паси грак

1.3a)

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \circledast & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix} = \circledast \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i b_i}{a_i}\right)$$

$$S_1' = S_1' - c_n \frac{S_{n+1}}{a_n}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n \\ 6 & 2 & & & & \\ 9 & & 3 & & 0 & \\ 12 & & & 4 & & \\ \vdots & & 0 & & \ddots & \\ 3n & & & & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \circledast & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n \\ 0 & 2 & & & & \\ \vdots & & 3 & & & 0 \\ & & & 4 & & \\ \vdots & & 0 & & \ddots & \\ 0 & & & & & n \end{vmatrix}$$

$$S_1' = S_1 - 3S_n - 3S_{n-1} \dots - 3S_2$$

$$\circledast = 1 - 3(2n) - 3(2(n-1)) \dots - 3(2\cdot 2) =$$

$$= 1 - 6(n + n-1 \dots + 2) = 1 - \frac{6(n+2)(n-1)}{2} =$$

$$= -3n^2 - 3n + 7$$

$$S_1' = S_1 - c_n \frac{S_{n+1}}{a_n} - \frac{c_{n-1} S_n}{a_{n-1}} \dots \frac{c_1 S_2}{a_1}$$

$$\circledast = a_0 - \frac{c_n}{a_n} b_n - \frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} b_{n-1} \dots \frac{c_1}{a_1} b_1 = a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i b_i}{a_i}$$

Зад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & & x \\ x & a_2 & \dots & & x \\ & & \ddots & & x \\ & x & & a_{n-1} & x \\ x & \dots & & x & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & & x \\ x-a_1 & a_2 - x & & & \\ x-a_1 & & a_3 - x & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ x-a_1 & & & & a_n - x \end{vmatrix} =$$

$$L_k' = L_k - L_1'$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 & b & \cdot & 0 \\ x-a_1 & a_2-x & & & \\ x-a_1 & & a_3-x & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ x-a_1 & & & & a_n-x \end{vmatrix} = A\cdot\prod_{i=2}^{n}(a_i-x) = \left[\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\right]\left[1+x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_1-x}\right]$$

$$L_1' = L_1 - \frac{x}{a_2-x}L_2 - \frac{x}{a_3-x}L_3 \dots \frac{-x}{a_n-x}L_n$$

$$A = a_1 - \frac{x}{a_2-x}(x-a_1) - \frac{x}{a_3-x}(x-a_1) \dots \frac{-x}{a_n-x}(x-a_1) =$$

$$= a_1 + x(a_1-x)\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i-x} =$$

$$= (a_1-x) + x(a_1-x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-x} = (a_1-x)\left[1+x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-x}\right]$$

Зад.

$$\Delta_n \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 5 & & & -1 \\ & -1 & & \ddots & \\ -1 & & & & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & \dots & 1 \\ -6 & 6 & & & \\ \vdots & & 6 & & 0 \\ -6 & 0 & & \ddots & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-n & -1 & -1 & \dots & - \\ 0 & 6 & & & \\ \vdots & & 6 & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 6 \end{vmatrix}$$

$$S_1' = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

$$= 6^{n-1}(6-n)$$

Зад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ & & \ddots & b \\ b & & & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & \dots & b \\ & & a & b \\ & & b & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ & a-b \\ 0 & \end{vmatrix}$$

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$L_k = L_k - bL_1$$

$$k = 2..n$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

Зад. $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & \dots & a+(n-1)x \\ -a & a & & & \\ 0 & -a & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & a & \\ 0 & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} na+x\frac{(n+1)n}{2} & a+x & a+2x \\ 0 & a & \\ \vdots & -a & \\ 0 & & a \end{vmatrix}$

$s_1' = \sum_{i=1}^{n} s_i$

$= \left[na + \frac{n(n-1)x}{2}\right\}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & & \\ -a & a & 0 \\ 1 & -a & \ddots \\ & 0 & a \end{vmatrix} = a^{n-1}\left[na + \frac{n(n-1)x}{2}\right]$

1.5 a/ $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ - & - & - & - \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ - & - & - & - \\ a_n & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + b_1$

$n > 2$

$s_k' = s_k - s_1$

$\Delta_1 = a_1 + b_1$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)(a_2+b_2) - (a_1+b_2)(a_2+b_1)$

$\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & - & - & - \\ 1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_2 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ - & - & - & - & - \\ a_n & b_2 & b_3 & & b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 \\ 1 & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n \end{vmatrix} =$

$s_k = s_k - b_k s_1$

$= 0$

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Зад. $A_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + x_1$

$n > 2$

$l_k' = l_k - l_1$

$k = 2..n$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = x_2x_3 \dots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ - & - & - & - \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$L'_k = L_k - x_k L_1$

$k = 2 \dots n$

дом.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n+1 & \dots & & n \\ n+1 & \dots & & \\ & 2 & n+1 & \dots \\ 1 & & n+1 & \end{vmatrix}$$

3.11.08.

Лекция

Нека $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ или $E = \left(\delta_{ij}\right)_{n\times n}$; $\forall A \in F_{n\times n}$ е в сила

$AE = EA = A$

E: единична матрица от ред n.

12) $\lambda A = (\lambda E)A \ \forall A \in F_{n\times n}, \forall \lambda \in F$

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$; $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{n\times m}$

С-ва на транспонирането:

(i) $(A^t)^t = A \ \forall A$; (ii) $(\lambda A)^t = \lambda A^t \ \forall A, \forall \lambda \in F$; (iii) $(A+B)^t = A^t + B^t \ \forall A, B \in F_{m\times n}$; (iiii) $(AB)^t = B^t A^t \ \forall A \in F_{m\times s}, \forall B \in F_{s\times n}$ (Проверка: дом. при $m = s = n$)

Нека $A \in F_{n\times n}$. A е обратима матрица ако: $\exists A^{-1}$, такава че $AA^{-1} = A^{-1}A = E \in F_{n\times n}$ (ясно е, че $A^{-1} \in F_{n\times n}$)

Нека A е обратима: $AA^{-1} = E \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det E$,
$\det A . \det A^{-1} = 1$ и $\Rightarrow \det A \neq 0$ (т.е. A е неособена матрица)
Още $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Също: ако A е обратима, то A^{-1} е единствена:

нека $X \in F_{n\times n}$ и $AX = XA = E$. Тогава $X = XE = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$
т.е. $X = A^{-1}$

Теорема: Нека $A = (a_{ij}) \in F_{n\times n}$. A е обратима $\Leftrightarrow$ A е неособена.
Тогава обратната матрица A^{-1} на A е единствена и $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11}, A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \\ A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \end{vmatrix}$
където A_{ij} е адюнгираното количество на a_{ij} в A.
(Ако $A = (a_{ij})$, то $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ji})$)

Трябва да док., че за неособена матр. A е изпълнено $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, където A^{-1} е матр. от теоремата. Проверка на $AA^{-1} = E$. Означ. $AA^{-1} = C$

$C = (c_{ij}) \in F_{n\times n}$ $\Big\{$ i-тият ред на матр. A е: $a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}$
$\Delta = \det A$ $\quad$ j-тият стълб на A^{-1} е: $\frac{1}{\Delta}A_{j1}\ \frac{1}{\Delta}A_{j2} \dots \frac{1}{\Delta}A_{jn}$

$$c_{ij} = a_{i1}\frac{1}{\Delta}A_{j1} + a_{i2}\frac{1}{\Delta}A_{j2} + \dots + a_{in}\frac{1}{\Delta}A_{jn} = \frac{1}{\Delta}\underbrace{(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn})}_{= \delta_{ij}\Delta \text{ (от №3)}} =$$
$$= \frac{1}{\Delta}\delta_{ij}\Delta = \delta_{ij} \Rightarrow C = E, \text{ т.е. } AA^{-1} = E$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Нека $A, B \in F_{n\times n}$ – обратими. Тогава AB също е обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, т.е. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Нека $A \in F_{n\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$. Деф. $A^k = \underbrace{A.A\dots A}_{k}$, $A^k \in F_{n\times n}$.
$A^kA^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$ $\forall k, l \in \mathbb{N}$
Деф. $A^0 = E$. Нека $\det A = 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Деф. $A^{-k} = (A^k)^{-1}$ $(= (A^{-1})^k)$

В сила са: $A^k A^l = A^{k+l}$ и $(A^k)^l = A^{kl}$ при $\det A \neq 0$ и $k, l \in \mathbb{Z}$

6. Линейни пространства

Нека F е поле и V е множество $(V \neq \emptyset)$. Нека в V са дефинирани две операции: на $\forall$ два ел. $a, b \in V$ е съпоставен нов ел. $a+b \in V$ и на $\forall$ел. $a \in V$ и $\forall \lambda \in F$ е съпоставен ел. $\lambda a \in V$. Нека са изпълнени аксиомите: 1) $a+b = b+a$ $\forall a, b \in V$; 2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\forall a, b, c \in V$; 3) да $\exists$ ел. $o \in V$, такъв че $a + o = o + a = a$ за $\forall$ел. $a \in V$ (o-омикрон); 4) за $\forall$ ел $a \in V$ да $\exists$ ел $-a \in V$, такъв че $a + (-a) = o$; 5) $1.a = a$ $\forall a \in V$; 6) $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$ $\forall a \in V$, $\forall \lambda, \mu \in F$; 7) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$, $\forall a, b \in V$ $\forall \lambda \in F$; 8) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$, $\forall a \in V$ и $\forall \lambda, \mu \in F$.

V: линейно пространство над полето F
(векторно п-во)

$a, b, c, \dots \in V$: вектори; $\lambda, \mu, \nu \dots \in F$: скалари; o: нулев вектор;
$-a$: противоположен вектор на в-ра a

(Множеството V на свободните вектори в пространството от АГ)

Пример: (1) $V = F_{m \times n}$ – лин. пространство относно операциите: събиране на матрици и умножение на матр. с число

(2) F-поле, $n \in \mathbb{N}$ $V = F^n$ е множеството на всички наредени n-орки числа от F $((a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in F)$

Деф: за $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ от F^n $a+b = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$ и ако $\lambda \in F$, $\lambda a = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$. Изпълнени са аксиомите 1)-8) $o = (0, \dots, 0) \in F^n$ и $-a = (-a_1, \dots, -a_n) \in F^n$. Сл. F^n е лин. пространство над F.

(3) (F-поле) $F[x]$ - множеството на всички полиноми на една променлива x с коефициенти на полиномите от полето F. Относно операциите събиране на полиноми и умножение на полином с число $F[x]$ е лин. пространство над F.

Нека $n \in \mathbb{N}$. Озн. $F^{n+1}[x]$ - множеството на всички полиноми, които имат степен $\leq n$. $F^{n+1}[x]$ е лин. п-во над F $(F^{n+1}[x] \subset F[x])$
(подпространство)

Следствия от аксиомите:

a) единственост на θ: нека $\theta' \in V$ и $a+\theta' = a$ $\forall a \in V$; при $a=\theta$ $\Rightarrow \theta+\theta' = \theta$, но $\theta+\theta' = \theta'$ (от акс. 3) $\Rightarrow \theta' = \theta$

б) за $\forall$ вектор $a \in V$, в-рът a е единствен

c) $0.a = \theta$ $\forall a \in V$: $a + 0.a \overset{5)}{=} 1.a + 0.a \overset{6)}{=} (1+0)a = 1.a \overset{5)}{=} a$, т.е. $a + 0.a = a$, $-a + (a+0.a) = -a + a$, от 2) $\Rightarrow (-a+a) + 0.a = \theta$, $\theta + 0.a = \theta$, $0.a = \theta$

d) $\lambda.\theta = \theta$ $\forall \lambda \in F$: от акс. 8) при $\mu = 0 \Rightarrow \lambda(0.a) = (\lambda.0).a$, c) $\Rightarrow \lambda.\theta = 0.a$, $\lambda.\theta = \theta$

e) $(-1).a = -a$ $\forall a \in V$: дом.

f) Ако $a, b \in V$, то $\exists$ единствен в-р $x \in V$, такъв че $a + x = b$ и това е $x = b + (-a)$. Означ. $b + (-a)$ с $b - a$ (разлика на b и a)

g) $\lambda(a-b) = \lambda a - \lambda b$ $\forall a, b \in V$, $\forall \lambda \in F$.

h) Ако $a \in V$, $\lambda \in F$, то $\lambda a = \theta \Leftrightarrow$ или $\lambda = 0$, или $a = \theta$: ако $\lambda = 0$ – доказано; нека $\lambda \neq 0$, тогава $\frac{1}{\lambda}(\lambda a) = \frac{1}{\lambda}\theta \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right).a \overset{d)}{=} \theta$, $1.a = \theta$ $\overset{5)}{\Rightarrow} a = \theta$

V е лин. п-во над F поле. Нека $U \subseteq V$ (подмножество) ($U \neq 0$). U е подпространство на лин. п-во V ако: $\forall a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$ и $\forall a \in U$, $\forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda a \in U$ (еквивалентно: $a, b \in U$ и $\lambda, \mu \in F \Rightarrow \lambda a + \mu b \in U$)

Означение: $U \leq V$ (U е подпространство на V или $U < V$)

Нека $U \leq V$. $a \in U \Rightarrow a - a \in U$, т.е. $\theta \in U$; $\theta - a \in U$, т.е. $-a \in U$; акс. 1)–8) са изпълнени и в U. Така $U \leq V$ означава, и U е лин. п-во над F относно операциите в V. (Пример: $F^{n+1}[x] < F[x]$)

За $\forall$ п-во V имаме $V \leq V$ и $\{0\} \leq V$ (нулево подпространство)

Ако $V_1 \leq V$ и $V_2 \leq V$, то $V_1 \cap V_2$ (сечение) $\leq V$ (в общия случай $V_1 \cup V_2$ не е $\leq V$); по-общо, ако $V_i \leq V$ ($i \in I$) (произволна фамилия подпростр. на V) то $\bigcap_{i \in I} V_i \leq V$.

Нека $A \subseteq V$ (A е система вектори на V). Означаваме $\ell(A) = \bigcap_{U \leq V,\, U \supseteq A} U$ (! има такива U: напр. $U = V$) $\ell(A) \leq V$ и $\ell(A)$ е най-малкото подпростр. на V, съдържащо A: ако $W \leq V$ и $W \underset{\text{(съдържа)}}{\supseteq} A$, то $W \supseteq \ell(A)$.

$l(A)$: линейна обвивка на с-мата в-ри A. $l(A) = A \Leftrightarrow A \leq V$.

Твърдение: В сила е: $l(A) = \{\underbrace{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k}_{\text{лин. комбинац. на в-ри от множ. } A} \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in F\}$

(Напр. при $A = \{a\}$ имаме $l(a) = \{\lambda a \mid \lambda \in F\}$)

Д-во: означ. $M = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in F\}$. Понеже $a_1, \ldots, a_k \in A \Rightarrow \in l(A)$ и $l(A) \leq V$, то $l(A) \ni \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$, т.е. $M \subseteq l(A)$.

Но $M \leq V$ (директна проверка) и $M \supseteq A$, понеже $\forall a \in A$ имаме $a = 1.a \in M$.

Така $M \leq V$ и $M \geq A$. Сл. $M \supseteq$(съдържа) $l(A)$. Така $l(A) = M$.

4.11.08г.

1.6 а/зад.

Упражнение

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \overset{a_1+(x_1-a_1)}{\overset{\parallel}{x_1}} & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & a_n \\ a_1 & a_2 & & x_{n-1} & \\ a_1 & a_2 & & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & & a_n & a_n \\ 1 & x_2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & x_{n-1} & \\ \vdots & \vdots & & & a_n \\ 1 & a_2 & & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1-a_1 & a_2 & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x_2 & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & x_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix} =$$

$S_k = S_k - a_k S_1$ по S_1

$$= a_1 \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & x_2-a_2 & & 0 & \\ \vdots & & x_3-a_3 & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ 1 & & & x_{n-1}-a_{n-1} & x_n-a_n \end{vmatrix} + (x_1-a_1)(-1)^{1+1} \Delta_{n-1}(a_2 \ldots a_n x_2 \ldots x_n)$$

$\Delta_n(a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_n)$

$$\Delta_n(a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_n) = a_1 \prod_{i=2}^{n} (x_i - a_i) + (x_1 - a_1) \Delta_{n-1}(a_2 \ldots a_n, x_2 - x_n) =$$

$$= a_1 \prod_{i=2}^{n} (x_i - a_i) + (x_1 - a_1) \left[a_2 \prod_{i=3}^{n} (x_i - a_i) + (x_2 - a_2) \Delta_{n-2}(a_3 \ldots a_n, x_3 \ldots x_n) \right]$$

$$= a_1 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} (x_i - a_i) + a_2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} (x_i - a_i) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \Delta_{n-2}(a_3 \ldots a_n, x_3 \ldots x_n) =$$

$$= a_1 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}} (x_i - a_i) + a_2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} (x_i - a_i) \ldots + a_{n-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n-1}}^{n} (x_i - a_i) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \cdots (x_{n-1} - a_{n-1}) \cdot$$

$$\cdot [a_n + (x_n - a_n)] = \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (x_i - a_i) + \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_k - a_k} \right]$$

det на Вандермонд

1.8 зад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ - & - & - & - & - \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & & x_{n-1}-x_1 & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & & x_{n-1}(x_{n-1}-x_1) & x_n(x_n-1) \\ \vdots & & & & \\ \cancel{0} & \cancel{x_2^{n-3}(x_2-x_1)} & \dots & \cancel{x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_1)} & \cancel{x_n^{n-3}(x_n-x_1)} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_1) & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix} =$$

$L_k' = L_k - x_1 L_{k-1}$

$W(x_1, x_2 \dots x_n)$

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

$$W(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ - & - & - & - & - \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_{n-1}-x_1)\, W(x_2, x_3 \dots x_n) =$$

$$= (x_2-x_1)\dots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\dots(x_n-x_2)\, W(x_3 \dots x_n) = \dots =$$

$$= (x_2-x_1)\dots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\dots(x_n-x_2)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})\, W(x_{n-1}, x_n)$$

$$\boxed{W(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)}$$

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{1-1} \\ - & - & - & - \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \downarrow W(x_1 \dots x_n) = \prod_{i \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

от малко вадим голямо

зад.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1}b_1 & a_2^{n-1}b_2 & \dots & a_n^{n-1}b_n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} \\ a_1^{n-2}b_1^2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_n^{n-2}b_n^2 & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_1^{n-1} & a_2b_2^{n-1} & \dots & a_nb_n^{n-1} & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} \\ b_1^n & b_2^n & \dots & b_n^n & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \dots & \frac{b_n}{a_n} & \frac{b_{n+1}}{a_{n}} \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 & \left(\frac{b}{a}\right. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n & \dots & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^n & \left(\frac{b_n}{a}\right. \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \cdot W\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \dots \frac{b_n}{a_n}, \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = \left[\prod_{i=1}^{n+1} a_i^n\right] \cdot \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_j}{a_j}\right)$$

зад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1-1 & x_2-1 & \dots & x_n-1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \dots & x_n(x_n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2}(x_1-1) & x_2^{n-2}(x_2-1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1}\right) \cdot W(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1} \cdot \prod_{1 \leq k < j \leq r} (x_j$$

зад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & & 0 \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ 0 & & & c & a \end{vmatrix} \underset{\text{по } l_1}{=} a\Delta_{n-1} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} c & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & c & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & 0 & \ddots & c & a \\ 0 & & & & \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{по } s_1}{=} a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_1 = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2} \leftrightarrow$$

$$\Delta_n = p\Delta_{1-1} + q\Delta_{n-2}$$

$$q = 0 \quad \Delta_n = p\Delta_{n-1} - \dots - p^{n-1}\Delta_1 \div$$

$p, q \neq 0$

$x^2 - px - q = 0$

α, β

$\alpha + \beta = p \quad , \alpha\beta = -q$

$\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$

$\underbrace{\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1}}_{C_n} = \beta(\underbrace{\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2}}_{C_{n-1}}) = \dots = \beta^{n-2}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1)$

$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta^{n-2}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1)$ $\quad \left.\begin{matrix}\beta \\ \alpha\end{matrix}\right\} - \quad (\beta - \alpha)\Delta_n = \beta^{n-1}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1) - \alpha^{n-1}(\Delta_2 - \beta\Delta_1)$

$\Delta_n - \beta\Delta_{n-1} = \alpha^{n-2}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1)$

I сл. $\alpha \neq \beta$

$$\Delta_n = \frac{\beta^{n-1}(\Delta_2 - \alpha\Delta_1) - \alpha^{n-1}(\Delta_2 - \beta\Delta_1)}{\beta - \alpha} = \dots = \boxed{c_1\alpha^n + c_2\beta^n = \Delta_n}$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\Delta_1 = c_1\alpha + c_2\beta = a \\ \Delta_2 = c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 = a^2 - b;\end{matrix}\right\} c_1, c_2}$$

II сл. $\alpha = \beta$ $\quad \boxed{\Delta_n = (c_1 + nc_2)\alpha^n} \qquad \left.\begin{matrix}\Delta_1 = (c_1 + c_2)\alpha \\ \Delta_2 = (c_1 + 2c_2)\alpha^2\end{matrix}\right\} c_1, c_2$

$$\boxed{\Delta_n = (n+1)\alpha^n \quad , \alpha = \beta}$$

1.7 a/

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

$\qquad\qquad p \qquad q$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\alpha = \beta = 1$

$\Delta_{1,} = (n+1)$

дом. 1) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 6 & 9 & & \\ 1 & 6 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & 6 \; 3 \end{vmatrix}$ 2) $\Delta_n \begin{vmatrix} 2i & 1 & & \\ -1 & 2i & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 2i \end{vmatrix}$

Зад. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3\,2 & & & \\ 1 & 3\,2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 3 & 2 \\ & & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$

$\Delta_n = c_1 1^n + c_2 2^n = 2^{n+1} - 1$

$\Delta_1 = c_1 + c_2 . 2 = 3$ $\Big\} \; c_1 = -1, \; c_2 = 2$

$\Delta_2 = c_1 + c_2 \cdot 4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$

1.12 зад. $A_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & ⋰ & \\ & & a \; b & & \\ 0 & & b \; a & & 0 \\ & ⋰ & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix} \underset{\text{по } S_1}{=} a \underbrace{\begin{vmatrix} a & & & b & 0 \\ & a & & ⋰ & \\ & & \ddots & & \\ & ⋰ & & \ddots & \\ b & & & & a \\ 0 & & & & \end{vmatrix}}_{(2n-1)\times(2n-1)} + b(-1)^{2n+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & & b \\ a & 0 & ⋰ \\ & \ddots & \\ & ⋰ & \\ b & & a \end{vmatrix}}_{(2n-1)(2n-1)}$$

$$= a^2(-1)^{2n-1+2n-1}\Delta_{2(n-1)} - b^2(-1)^{1+2n+1} \cdot \Delta_{2(n-1)} = (a^2-b^2)\Delta_{2(n-1)} =$$

$$= (a^2-b^2)\Delta_{2(n-2)} = \dots = (a^2-b^2)^{n-1}\Delta_2 = (a^2-b^2)^n$$

1.13 а) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} \overset{x+(z-x)}{\overset{\shortparallel}{z}} & y & \cdots & y \\ x+0 & z & y & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ & x & \ddots & z \; z \\ & & x & \ddots \; x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & z & y & \cdots & y \\ \vdots & x & \ddots & & y \\ \vdots & \vdots & & \ddots & z \; y \\ 1 & x & & & x \; z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z-x & y & \cdots & \cdots & y \\ 0 & z & & & \vdots \\ \vdots & x & \ddots & y & \vdots \\ \vdots & \vdots & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & z & y \\ 0 & x & \cdots & x & z \end{vmatrix} =$$

Ако $x=y \to \Delta_n = \left(z+x(n-1)\right)\left(z-x\right)^{n-1}$

Ако $x \neq y$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & z-y & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & x-y & & \\ 1 & & & z-y \end{vmatrix} + (z-x)(-1)^{1+1}\Delta_{n-1} = x(z-y)^{n-1} + (z-x)\Delta_{n-1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_n = x(z-y)^{n-1} + (z-x)\Delta_{n-1} \quad /(z-y) \\ &\overset{+(\text{транспонирана})}{\Delta_n} = \Delta_n = y(z-x)^{n-1} + (z-y)\Delta_{n-1} \quad /(z-x) \end{aligned}\right\} \text{"–"}$$

$\Rightarrow \Delta_n(z-y-z+x) = x(z-y)^n - y(z-x)^n$

$$\Delta_n = \frac{x(z-y)^n - y(z-x)^n}{x-y}$$

1.14 зад.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & 3 & 3 \\ 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{по } s_1}{=} 3\Delta_{n-1} + 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \dots & 0 \\ & & 3 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 3 \\ 0 & & 1 & & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{по } L_1}{=}$$

$$= 3\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2} - 1(-1)^{1+2}\underset{\text{по } s_1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 3 \\ 0 & & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = 3\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2} + \Delta_{n-3}$$

$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2} + \Delta_{n-3}$

$\Delta_n - 2\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2} + \Delta_{n-3} =$

$$= \Delta_{n-2} - 2\Delta_{n-3} + \Delta_{n-4} = \dots = \Delta_3 - 2\Delta_2 + \Delta_1 = \underset{10}{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} - 2\underset{6}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} + 3 =$$

$= 10 - 12 + 3 = \underline{1}$

$\Delta_n - 2\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} = 1$

$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} + 1 = \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} + 2 \dots = \Delta_2 - \Delta_1 + n - 2 = n +$

$\Delta_n - \Delta_{n-1} = n + 1$

$\Delta_n = \Delta_{n-1} + n + 1 = \Delta_{n-2} + (n+1) + n = \Delta_{n-3} + (n+1) + n + (n-1) = \dots =$

$= \underset{\overset{\shortparallel}{3=1+2}}{\Delta_1} + (n+1) + n + (n-1) + \dots + 3 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

7.11.08.

Упражнение

$A, B \in M_n(F)$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 1 & x_n & & & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$n > 2$

$= 0$

1.11.3 $$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ - & - & - & - \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix} =$$

$\Delta_1 = \cos(\alpha_1 - \beta_1)$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) \end{vmatrix} = \backslash - /$$

$\cos(\alpha_i - \beta_j) = \cos\alpha_i \cos\beta_j + \sin\alpha_i \sin\beta_j$

$$= \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \dots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \dots & \sin\beta_n \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

8/

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ - & - & - & - \\ (a_{n-1}+b_0)^n & (a_{n-1}+b_1)^n & \dots & (a_{n-1}+b_n)^n \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix} =$$

$$(a_i+b_j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_i^k b_j^{n-k}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ - & - & - & - & - \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \binom{n}{0} b_0^n & \binom{n}{0} b_1^n & \dots & \binom{n}{0} b_n^n \\ \binom{n}{1} b_0^{n-1} & \binom{n}{1} b_1^{n-1} & \dots & \binom{n}{1} b_n^{n-1} \\ \binom{n}{2} b_0^{n-2} & \binom{n}{2} b_1^{n-2} & \dots & \binom{n}{2} b_n^{n-2} \\ - & - & - & - \\ \binom{n}{n-1} b_0 & \binom{n}{n-1} b_1 & \dots & \binom{n}{n-1} b_n \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} =$$

$w^t = w$

$\underline{w}$

$$= w(a_0 \dots a_n) \binom{n}{0}\binom{n}{1} \dots \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} \underline{w}(b_0 \dots b_n) =$$
$$= \binom{n}{0}\binom{n}{1} \dots \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$$
$$\prod (a_i - a_j)(b_j - b_i) \qquad 0 \leq j < i \leq n$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ - & - & - & - \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (0+1)^{n-1} & (0+2)^{n-1} & \dots & (0+n)^{n-1} \\ (1+1)^{n-1} & (1+2)^{n-1} & \dots & (1+n)^{n-1} \\ (2+1)^{n-1} & (2+2)^{n-1} & \dots & (2+n)^{n-1} \\ - & - & - & - \\ ((n-1)+1)^{n-1} & ((n-1)+2)^{n-1} & \dots & ((n-1)+n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \dots a_{n-1} = n-1 \\ b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_{n-1} = n \end{array}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0^2 & \dots & 0^{n-1} \\ \vdots & 1 & 1^2 & \vdots & 1^{n-1} \\ \vdots & 2 & 2^2 & \vdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \binom{n-1}{0} n^{n-1} & \binom{n-1}{0}(n-1)^{n-1} & \dots & \binom{n-1}{0} 1^{n-1} \\ \binom{n-1}{1} n^{n-2} & \binom{n-1}{1}(n-1)^{n-2} & \dots & \binom{n-1}{1} 1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-1}{n-2} n & \binom{n-1}{n-2}(n-1) & \dots & \binom{n-1}{n-2} 1 \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{n-1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \end{vmatrix}$$

$$w(0,1,2 \dots n) \binom{n-1}{0} \binom{n-1}{n-1} \underline{w}(1,2,\dots n)$$

$$= \binom{n-1}{1} \cdots \binom{n-1}{n-2} \prod_{0 \le j < i \le n-1} (i-j) \prod_{1 \le t < j \le n} (i-j)$$

Матрици

$F_{m \times n}$

$A = (a_{ij})_{m \times n}, \ a_{ij} \in F$

$A \pm B = (a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$

$A_{m \times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n} \times k} = C_{m \times k}$ $\qquad AB \neq BA$

$m \neq k \Rightarrow B \cdot A$ не съществува

$\lambda A = \lambda (a_{ij})_{m \times n} = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$

$f(x) = x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x - 3$ $\qquad E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ единична матрица

$f(A) \ , A \in M_n(F)$

$f(A) = A^4 + 5A^3 - 2A^2 + 7A - 3E$

$[A, B] = AB - BA$ $\qquad A, B \in M_n(F)$

комутатор на A, B

$[B, A] = -[A, B]$

Зад. $A \cdot B = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 15 & 9 \\ -1 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$1.3 + 2.(-1) + 3.0 = 1$

$1.2 + 2.2 + 3.3 = 15$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 13 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -6$$

$$-1.1 + 2.2 + (-3).3 = -6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{\textcircled{2}\times \underline{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times \textcircled{4}} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 17 & 7 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times \underline{4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{\underline{2}\times 3} \Rightarrow \nexists$$

ф-ла

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{71} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}^{71} = \begin{pmatrix} \cos\frac{71\pi}{3} & -\sin\frac{71\pi}{3} \\ \sin\frac{71\pi}{3} & \cos\frac{71\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix} \cdots$$

2.4 зад. $M_n(F)$

$$\underset{\text{ед. матр}}{E} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

матрични единици $E_{ij} = {}^{i}\begin{pmatrix} \cdots & \overset{j}{1} \\ & 0 \end{pmatrix}$

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{1n}E_{1n} + a_{21}E_{21} + \dots + a_{2n}E_{2n} + \dots + a_{nn}E_{nn}$$

$$E_{pq} E_{rs} = \delta_{qr} E_{ps} = \begin{cases} E_{ps}, & \text{ако } q = r \\ 0, & \text{ако } q \neq r \end{cases}$$

това е нулева матрица (0)

$$\begin{array}{c|c} & q \\ p & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & 1 & \\ 0 \dots & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & s \\ r & \begin{pmatrix} \dots & 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.5 зад. $M_n(F)$ квадратна матрица

Една матрица $C \in M_n(F)$ комутира с всяка матрица $A \in M_n(F$

$\Leftrightarrow C$ е скаларна $(C = \lambda E \;, \lambda \in F)$

$\Leftarrow) \; C = \lambda E, \quad CA = \lambda E . A = \lambda . A . E = A . \lambda E = A . C$, за $\forall A \in M_n(F)$

$$\Rightarrow) \; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ - & - & - & - \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij}) \;,\; CA = AC, \; \forall A \in M_n(F)$$

$A = E_{11}$

$$C = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} E_{ij} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ - & - & - & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ - & - & - & - \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ c_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$c_{12} = \dots c_{1n} = c_{21} = \dots c_{n1} = 0$

$E_{kk} \;, k = \overline{1,n}$

$c_{ij} = 0$
$i \neq j$

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ & c_{22} & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$ $E_{12}C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ & c_{22} & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 & c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & c_{22} & 0 \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} =$

$c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = \lambda \in F$ $\quad C = \lambda E$

$= CE_{12}$

2 б зад.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$

$\boxed{A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = 0}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$tr\,A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ - следа на матр. A

$\boxed{A^2 - tr\,A \cdot A + \det A \cdot E = 0}$

$A \in M_n(F)$, $A(ij)$

$\det A \neq 0 \rightarrow$ неособени матр.

A - обратима, ако $\exists\, A^{-1}$, такава че: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

A^{-1} - обратна на A

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

? $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} =$

$\underline{Ax = B}$

$A^{-1},\ \underbrace{A^{-1}A}_{E}x = A^{-1}B \Rightarrow x = A^{-1}B$

$\underline{AxB = C}$

$A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$\underline{XA = B}$

$A^{-1},\ XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow x = BA^{-1}$

<u>Матрици на елементарните (Гаусови) преобразования.</u>

$A_i(\lambda),\ B_{ij}(\lambda),\ C_{ij}$

$B_{ij}(\lambda) \rightarrow$ j-тия ред е умножен по λ и прибавен към i

C_{ij} - i и j са си сменили местата

2.10з. Елементарните Гаусови преобразования на редовете на матр. A съответстват на: умножението отляво с матр. на ел. преобр.

а) i-тия ред на $A \cdot \lambda \neq 0 \leftrightarrow A_i(\lambda).A$, където $A_i(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{ii}$

б) j-тия ред на $A \cdot \lambda$ прибавен към i-тия ред на $A \leftrightarrow B_{ij}(\lambda).A$, където $B_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij}$

в) смяната на местата на i-тия и j-тия ред на $A \leftrightarrow C_{ij} \cdot A$, където $C_{ij} = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 1 & 0 \\ & & \lambda_1 & \\ 0 & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

б) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & \dots & \lambda & \\ & 1 & & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{j} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 0 & \dots & 1 & \\ & 1 & \dots & 0 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

10.11.08.

Лекция

V е лин. простр. над поле F: $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ ($1 \le k < \infty$)
(крайна с-ма вектори)

Деф.: С-ма е лин. зависима (ЛЗ), ако: $\exists$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in F$, не всичките $= 0$, такива, че $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$ (нулев вектор)

В противен случай с-мата вектори се нарича ЛНЗ, т.е. ако от равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$ ($\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_k \in F$) следва, че $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_k = 0$.

$V = F^n$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots 0, 1)$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ са ЛНЗ: нека $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ и $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \theta$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$ и $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$V = F^{n+1}[x]$; $1, x, x^2, \dots, x^n \in F[x]$; $1, x, x^2 \dots x^n$ са ЛНЗ: ако $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in F$ и $\lambda_0 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n = 0$, то $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

С-ва: (за крайни с-ми)

(1) С-мата $\{a\}$ $(a \in V)$ е ЛЗ $\Leftrightarrow a = 0$: д-во: / ако $\lambda \in F$, то от 6) $\Rightarrow$ $\lambda . a = \theta \Leftrightarrow \lambda = 0$ или $a = \theta$. Сл. ако $\lambda \neq 0 \Rightarrow a = \theta$

(2) Подсистема на ЛНЗ с-ма също е ЛНЗ с-ма: д-во: / нека с-мата е $a_1, \dots, a_k$ и подсистемата е например $a_1, \dots, a_s$ $(1 \leq s < k)$. Да допуснем, че $a_1, \dots, a_s$ е ЛЗ, т.е. $\exists \lambda_1, \dots \lambda_s \in F$ не всички $= 0$, такива, че $\lambda_1 . a_1 + \dots + \lambda_s a_s = \theta$. Тогава $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s + 0 . a_{s+1} + \dots + 0 . a_k = \theta$, излиза, че $a_1, \dots a_s, a_{s+1}, \dots, a_k$ е ЛЗ - противоречие на усл. $\Rightarrow a_1, \dots a_s$ е ЛНЗ.

(3) С-ма вектори съдържаща θ или в-ри от вида д-во: / $\lambda a, \mu a$ $(a \in V, \lambda, \mu \in F)$ е ЛЗ: ако $\theta \in$ с-мата, то от (1) и (2) следва, че с-мат е ЛЗ. Нека с-мата съдържа $\lambda a, \mu a \in$ с-мата, можем да считаме, че $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$. $\mu \cdot \lambda a + (-\lambda)(\mu a) = \theta$ и $\Rightarrow \lambda a$ и μa са ЛЗ и от (2) с-мата е ЛЗ.

(4) С-ма в-ри е ЛЗ $\Leftrightarrow$ поне един от векторите е лин. комбинация на останалите в-ри: д-во: / $\Rightarrow$) нека с-мата $a_1, a_2, \dots, a_k$ е ЛЗ, т.е. $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots$ $\in F$, не всичките $= 0$, такива, че $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$. Напр. $\lambda_1 \neq 0$. Тогава $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} a_k$ и $\Rightarrow a_1$ е лин. комбинация на $a_2, \dots a_k$. $\Leftarrow$) нека напр. a_1 е лин. комбинация на останалите в-ри $a_2, \dots, a_k$, т.е. $a_1 = \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k$ $(\mu_2, \dots \mu_k \in F)$. Тогава $\underbrace{(-1)}_{\neq 0} a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k = \theta$, $\Rightarrow$ по деф $a_1, \dots, a_k$ е ЛЗ.

! (5) Нека $a_1, \dots, a_k \in V$ - ЛНЗ с-ма, $a \in V$ и $a \notin \overset{\text{лин. обвивка}}{l}(a_1, \dots, a_k)$. Тогава $a_1, \dots, a_k, a$ също е ЛНЗ с-ма: д-во: / Нека $\lambda_1, \dots \lambda_k, \lambda \in F$ и $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + \lambda a = \theta$. Ако $\lambda \neq 0$, то $a = -\frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda} a_k \in l(a_1, \dots, a_k)$ - противоречие.

Сл. $\lambda = 0$ и $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$. Но $a_1, \dots, a_k$ е ЛНЗ с-ма. и сл. $\lambda_1, \dots, \lambda_k = 0$. Така доказахме, че $a_1, \dots a_k, a$ е ЛНЗ с-ма.

Нека $A \underset{\text{подмнож.}}{\subseteq} V$ (A е с-ма в-ри, може да е безкрайна)

Деф: A е ЛНЗ с-ма ако: всяка крайна подс-ма на A е ЛНЗ.
A е ЛЗ с-ма ако: поне една крайна подс-ма на A е ЛЗ.

Пример: $V = F[x]$, с-мата в-ри $1, x, x^2, \dots, x^n \dots$ е ЛНЗ.

Осн. лема: Нека $a_1, \dots, a_n \in N$, $b_1, \dots, b_k \in V$ и $b_1, \dots b_k \in \ell(a_1, \dots a_n)$. Ако $k > n$, то $b_1, \dots, b_k$ е ЛЗ с-ма.

Д-во: Ако някои от в-рите $b_1, \dots, b_k$ е θ, то $b_1, \dots b_k$ е ЛЗ с-ма и тв. е доказано. Нека $b_1, \dots b_k \neq \theta$. Индукция по ⓝ. Осн. на индукцията: $n=1$ Тогава $k \geq 2$ и $b_1 = \lambda_1 a_1, \dots, b_k = \lambda_k a_1$ $(\lambda_1, \dots \lambda_k \in F)$. От (3) следва ($b_1 = \lambda_1 a_1$ и $b_k = \lambda_k a_1$), че $b_1, \dots, b_k$ е ЛЗ.

Индукционна стъпка: нека $n \geq 2$ и твърдението е вярно за числото $n-1$. Ще докажем, че тв. е вярно и за n.

$$b_1 = \lambda_{11} a_1 + \dots + \lambda_{1,n-1} a_{n-1} + \lambda_{1n} a_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_{k-1} - \lambda_{k-1,1} a_1 + \dots + \lambda_{k-1,n-1} a_{n-1} + \lambda_{k-1,n} a_n \qquad \Rightarrow$$

$$b_k = \lambda_{k1} a_1 + \dots + \lambda_{k1,n-1} a_{n-1} + \lambda_{kn} a_n$$

($\lambda_{ij} \in F$; поне едно от $\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{k,n-1}, \lambda_{kn}$ е $\neq 0$
($b_k \neq \theta$) и нека напр. $\lambda_{kn} \neq 0$

$$b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} b_k = \mu_{11} a_1 + \dots + \mu_{1,n-1} a_{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_2 - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} b_k = \mu_{21} a_1 + \dots + \mu_{2,n-1} a_{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1,n}}{\lambda_{kn}} \cdot b_k = \mu_{k-1,1} a_1 + \dots + \mu_{k-1,n-1} a_{n-1}$$

$$(\mu_{ij} \in F)$$

Означ. $c_1 = b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} b_k$, $c_2 = b_2 - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} b_k, \dots,$

$$c_{k-1} = b_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1,n}}{\lambda_{kn}} b_k$$

Разгл. с-мата в-ри: $a_1, \dots, a_{n-1}$ и $c_1, \dots c_{k-1}$. Имаме $c_1, \dots c_{k-1} \in l(a_1 \dots a_{n-1})$ и $k-1 > n-1$ (от $k > n$). Съгласно индукционното предполож. в-рите $c_1, c_2 \dots c_{k-1}$ са ЛЗ. ∃ числа $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_{k-1} \in F$, поне едно $\neq 0$, такива, че $\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \dots + \nu_{k-1} c_{k-1} = \theta$.

$$\nu_1\left(b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) + \nu_2\left(b_2 - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) + \dots + \nu_{k-1}\left(b_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1\,n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) = \theta,$$

$\nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \dots + \nu_{k-1} b_{k-1} + (*) b_k = \theta$ (* - някакво число)

Тук поне един коеф е $\neq 0$, т.е. $b_1, b_2, \dots b_{k-1}, b_k$ е ЛЗ с-ма.

7. Базис, размерност, координати: V е лин. простр. над поле F

Нека $B \subseteq V$ (с-ма в-ри). Деф: B е базис на лин. простр V ако: 1) B е ЛНЗ с-ма и 2) $l(B) = V$.

Пример1) $V = F^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots 0)$, …, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ - базис на N: (1) $e_1, e_2, \dots e_n$ - ЛНЗ с-ма. извес
(2): нека $a \in V$, $a = (a_1, a_2, \dots a_n)$. $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$, т.е. $l(e_1, e_2, \dots, e_n) = V$

Пр.2) $V = F^{n+1}[x]$ (цяло $n \geq 0$). $1, x, x^2, \dots, x^n$ е базис на V: (1) $1, x, x^2, \dots x^n$ е ЛНЗ с-ма - известно. (2) Нека $f(x) \in V$, $f(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ ($a_i \in F$) и следов. $l(1, x, x^2, \dots, x^n) = V$

Пр.3) $V = F[x]$. С-мата в-ри $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ е базис на V. (безкраен базис)

Деф: V е крайномерно простр ако: ∃ краен бр. в-ри $b_1, b_2, \dots b_k \in$ ($1 \leq k < \infty$) такива, че $l(b_1, b_2, \dots b_k) = V$. В противен случай V е безкрайномерно простр.

Пр. $V = F^n$ е крайномерно простр ($V = l(e_1, e_2, \dots, e_n)$); $V = F^{n+1}[x]$ е крайномерно ($l(1, x, x^2, \dots, x^n) = V$); $V = F[x]$ не е крайномерно, т то е безкрайномерно.

Очевидно: ако V има краен базис, то V е крайномерно.

Обратно:

Твърдение 1: Всяко ненулево крайномерно лин. простр. V има краен базис.

По-точно: ако има в-ри $b_1, \dots, b_k \in V$, такива, че $l(b_1, \dots, b_k) = V$, то има подс-ма $b_{i1}, \dots b_{in}$ на с-мата $b_1, \dots, b_k$ $(1 \le n \le k)$, която е базис на V:

$V \neq \{0\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ и $l(B) = V$. $\exists$ в-р от B, който е $\neq 0$ (иначе $V = \{0\}$). Нека $b_{i1} \neq 0$, b_{i1} е ЛНЗ в-р.

Ако $l(b_{i1}) = V$, то b_{i1} е базис на V и е док.

Нека $l(b_{i1}) \subsetneq V$ (не цялото простр.) Тогава има в-р b_{i2} от B, такъв, че $b_{i2} \notin l(b_{i1})$ (понеже $l(b_{i1}) \neq V$)

(5) от №6 $\Rightarrow$ b_{i1}, b_{i2} е ЛНЗ с-ма. Ако $l(b_{i1}, b_{i2}) = V$, то b_{i1}, b_{i2} е базис на V и е док.

Нека $l(b_{i1}, b_{i2}) \subsetneq V$. Тогава $\exists$ в-р b_{i3} от B, такъв че $b_{i3} \notin l(b_{i1}, b_{i2})$

(5) от №6 $\Rightarrow$ b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} са ЛНЗ.

Но $l(b_1, b_2, \dots, b_k) = V \Rightarrow$ след n стъпки $(n \le k)$ получаваме $b_{i1}, b_{i2}, \dots b_{in}$, които са ЛНЗ и $l(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}) = V$. Така $b_{i1}, b_{i2}, \dots b_{in}$ е базис на простр. V.

Следствие: Едно ненулево лин. простр. V е крайномерно $\Leftrightarrow$ V има краен базис.

Твърдение 2: Всеки два базиса на крайномерно простр. се състоят от едни и същи брой вектори.

V - крайномерно $\neq \{0\}$, V има поне един краен базис $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $(1 \le n < \infty)$. Нека B е произв. базис на V.

Да допуснем, че в B има $> n$ вектори и нека $b_1, \dots, b_n, b_{n+1} \in B$.

A е базис, сл. $b_1, \dots b_n, b_{n+1} \in l(a_1, \dots a_n)$

$n+1 > n$ и осн. лема от №6 $\Rightarrow$ $b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ са ЛЗ и тогава B е ЛЗ с-ма - противоречие защото с-мата B е базис $\Rightarrow$ B е ЛНЗ.

Сл. в B има краен бр. в-ри и броят им $v \le n$. Да допуснем, че $v < n$. $a_1, \dots, a_n \in l(b_1, \dots, b_v)$ $(B = \{b_1, \dots, b_v\})$; $n > v$ и осн. лема от №6 $\Rightarrow$ $a_1, \dots, a_n$ са ЛЗ - противоречие, защото са базис на V. Така получаваме $v = n$, т.е. $|B| = n = |A|$

Деф: Размерност на V на крайномерно ненулево V: броят на

в-рите в кой да е базис на V. Означаваме размерността на лин. простр. с $\dim V$ (dimension). Тогава $\dim V \in \mathbb{N}$. За $V=\{0\}$: дефинираме $\dim V = 0$. За безкрайномерно V: $\dim V = \infty$
(Размерност на V над F: означава се $\dim_F V$)

Пример:

$V = F^n$: $e_1, e_2, \dots e_n$ е базис на $F^n \Rightarrow \dim F^n = n$

$V = F^{n+1}[x]$: $1, x, x^2, \dots, x^n$ е базис на $F^{n+1}[x] \Rightarrow \dim F^{n+1}[x] = n+1$

$V = F[x]$: безкрайномерно лин. простр. $\Rightarrow \dim F[x] = \infty$

11.11.08.

? Упражнение

$AX = B \leftrightarrow (A|B) \sim \dots \sim (E|X = A^{-1}B)$

$XA = B \leftrightarrow A^t X^t = B^t \leftrightarrow (A^t|B^t) \sim \dots \sim (E|X^t) \Rightarrow X = (X^t)^t$

$(AB)^t = B^t . A^t$

$(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

$AXB = C \longrightarrow AX = Y,\ YB = C \to (B^t|C^t) \sim \dots \sim (E/Y^t) \Rightarrow Y = (Y^t)^t,\ \underline{AX = Y} \to (A|$
$\sim \dots \sim (E|X$

$\searrow XB = Y,\ AY = C \to (A/C) \sim \dots \sim (E|Y),\ XB = Y \Rightarrow$
$\to (B^t|Y^t) \sim \dots \sim (E|X^t) \to X = (X^t)^t$

$A^{-1} = ? \Rightarrow A.A^{-1} = A^{-1}.A = E \quad , \exists! A^{-1}$

$AX = E,\ (A|E) \sim (\dots \sim (E|A^{-1}))$

Зад.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad 1)\ \det A \neq 0$$

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$L_2' = L_2 - 2L_1,\ L_3' = L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & -5 & 3 & 3 & -2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -5 & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$\det A \neq 0$

$L_1' = L_1 + L_3$
$L_2' = L_2 - 2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim (E|X) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1' = L_1 - 2L_2$

Проб: $AX = B$

Зад. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -2 & 3 & -1 \\ 9 & 12 & 7 \end{pmatrix} \quad \det A \neq 0$$

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 9 & 8 & 7 \\ -1 & 3 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 9 & 12 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 5 & 2 & 9 & 12 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 9 & 8 & 7 \\ -1 & 3 & -2 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|} 0 & 5 & 2 \\ & & \\ & & \end{array}\right.$$

$$(A|B) \sim (E|X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Зад. $$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 13 \\ 5 & -2 & 7 \\ -3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & -6 & 7 & -11 & -12 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 8 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$(A^t|B^t) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 13 & 7 & 7 \end{array}\right) \overset{(-2)\,(-1)}{\sim} \ldots \sim (E|X^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & -6 & 7 & -11 & -12 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 37 & 37 & 0 & 74 \end{array}\right)$

$L_3' = L_3 + 6L_2$

Зад. $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Зад. $\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}} \underbrace{\times \overset{B}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}}_{y} = \overset{C}{\begin{pmatrix} 13 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & -9 \\ 1 & -44 & 59 \end{pmatrix}}$ $\quad XB = y$

$y\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & -9 \\ 1 & -44 & 59 \end{pmatrix} \sim y\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 13 & 12 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & -13 & -18 & 18 \\ 0 & -6 & -8 & -64 & -104 & 104 \end{array}\right) \sim$ $L_3' = L_3 - 3L_2$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 13 & 12 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -13 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & -5 & -25 & -50 & -50 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 13 & 12 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & -13 & -18 & 18 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$

отг. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & -20 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Зад.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \underset{L_3' = L_3 - L_1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\det A = 0$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_3 = p \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 - y_3 = 2 \\ -y_2 + 3y_3 = -1 \\ y_3 = q \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} z_1 + 2z_2 - z_3 = 2 \\ -z_2 + 3z_3 = 5 \\ z_3 = v \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} 3p-1 & 3q+1 & 3v-5 \\ p & q & v \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = ? \Leftrightarrow Ax = E$

Зад.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$L_3' = L_3 - 2L_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(E \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & +3 & 3 \end{pmatrix}\right.$$

Зад.
M

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$L_k' = L_k - L_1$
$k = 2, 3 \dots$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & +1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) + \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} ④ \\ ② \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & - \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & - \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&4&0&0&1&1&-1&-1\\ 0&0&4&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&4&1&-1&-1&1 \end{array}\right) \sim \left(E \,\middle|\, \frac{1}{4}A = A^{-1}\right)$$

Зад. $A = \begin{pmatrix} 1&1&\dots&1\\ &1&\ddots&\vdots\\ &0&\ddots&1\\ &&&1 \end{pmatrix}$ $(A|E) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1&1&1&\dots&1&1&0&\dots&0\\ &1&1&\dots&1&0&1&\dots&0\\ &&\ddots&&\vdots&&&\ddots&0\\ 0&&&1&1&&0&&\\ &&&&1&&&&1 \end{array}\right) \sim$

$$\left(E \,\middle|\, \begin{array}{cccc} 1&-1&&0\\ &\ddots&\ddots&\\ 0&&1&-1\\ &&&1 \end{array}\right)$$

2.16б| $A = \begin{pmatrix} 1&a&a^2&a^3&\dots&a^n\\ &1&a&a^2&&\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&a^2\\ &0&&&1&a\\ &&&&&1 \end{pmatrix}$ $(A|E) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1&a&a^2&\dots&a^n&1&0&\dots&0\\ &1&a&\dots&a^{n-1}&0&1&\dots&0\\ &&\ddots&&&&&\ddots&0\\ 0&&1&a&a^2&&&&\\ &&&1&a&&0&&\\ &&&&1&&&&1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(E \,\middle|\, \begin{array}{cccc} 1&-a&&\\ &1&-a&0\\ &&\ddots&\ddots\\ &0&&-a\\ &&&1 \end{array}\right)$$

2.16е| $A = \begin{pmatrix} (1+a)&1&\dots&1\\ 1&a+a&\dots&1\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ 1&\dots&(1+a)&1\\ 1&\dots&1&(1+a) \end{pmatrix}$ $(A|E) \sim \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1+a&1&1&\dots&1&1&1&&0\\ 1&1+a&1&\dots&1&1&&\ddots&\\ 1&1&1+a&\dots&1&1&0&&\\ 1&1&1&\dots&(1+a)&1&&&\\ 1&1&\dots&&1&1+a&&&1 \end{array}\right) \sim$

$$L_1' = \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)\frac{1}{n+a}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&1&1&\cdots&1&\frac{1}{n+a}&\frac{1}{n+a}&\cdots&\frac{1}{n+a}&\frac{1}{n+a}\\ &1+a&&&&&\ddots&&0&\\ &&1+a&&1&&&\ddots&&\\ &1&&1+a&&&0&&\ddots&\\ &&&&1+a&&&&&1\end{array}\right)\sim$$

$$L_x' = L_x - L_1$$
$$x = 0, 1 \ldots$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&\cdots&1&\frac{1}{n+a}&\frac{1}{n+a}&\cdots&\frac{1}{n+a}\\ &a&&0&-\frac{1}{n+a}&\frac{n+a-1}{n+a}&&-\frac{1}{n+a}\\ &&\ddots&&&&\ddots&\\ &0&&a&&&&\frac{n+a-1}{n+a}\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ /\cdot\frac{1}{a}\\ /\frac{1}{a}\\ \vdots\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&1&\cdots&1&\frac{1}{n+a}&\cdots&\frac{1}{n+a}\\ &1&&0&&\frac{n+a-1}{(n+a)a}&\\ &&\ddots&&-\frac{1}{(n+a)a}&&\ddots\\ &0&&1&&&\end{array}\right)$$

$$L_x' = L_k \cdot \frac{1}{a}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} &-\frac{1}{(n+a)a}&\cdots&-\frac{1}{(n+a)a}\\ E&\frac{(n+a-1)}{(n+a)a}&&-\frac{1}{(n+a)a}\\ &&\ddots&\\ &-\frac{1}{(n+a)a}&&\frac{(n+a-1)}{(n+a)a}\end{array}\right)$$

$$a_{12}\ldots a_{1n} = \frac{1}{n+a} + (n-2)\frac{1}{(n+a)a} - \frac{n+a-1}{(n+a)a} = \frac{a+n-2-n-a+1}{(n+a)a} = \frac{-1}{(n+a)a}$$

$$a_{11} = \frac{1}{n+a} + (n-1)\frac{1}{(n+a)a} = \frac{(a+n-1)}{(n+a)a}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{(n+a)a}\begin{pmatrix} 1-a-n&\cdots&1\\ \vdots&1-a-n&1\\ &\ddots&\\ 1&1\cdots&1-a-n\end{pmatrix}$$

ред × стълб

2.15и/

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2-d^2, & 2ab & 2ac, & 2ad \\ -2ab, & a^2-b^2-c^2-d^2, & -2ad, & 2ac \\ -2ac & 2ad, & a^2-b^2-c^2-d^2, & -2ab \\ -2ad, & -2ac, & 2ab, & a^2-b^2-c^2-d^2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \cdot A^t$$

.11.08.

Лекция

Твърдение 3: (i) (V е крайномерно и) $\dim V = n$ $(n \in \mathbb{N})$ $\Leftrightarrow$ в V има n ЛНЗ в-ри и всеки $n+1$ в-ра са ЛЗ (т.е. максималния бр. ЛНЗ в-ри в V е n).

(ii) $\dim V = \infty \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ в V има n ЛНЗ в-ри (т.е. в V има безбройно много ЛНЗ в-ри)

Д-во: (i) $\Rightarrow$) Нека $\dim V = n$. Нека $a_1, \dots, a_n$ е базис на V – n ЛНЗ в-ри. Нека $c_1, \dots, c_n, c_{n+1} \in V$. $c_1, \dots, c_n, c_{n+1} \in \ell(a_1, \dots, a_n)$ и $n+1 > n$. Осн. лема от №6 $\Rightarrow c_1, \dots, c_n, c_{n+1}$ са ЛЗ.

$\Leftarrow$) Нека V има n ЛНЗ в-ри $b_1, \dots, b_n$ и нека всеки $n+1$ в-ра са ЛЗ. Нека $x \in V$. Ако $x \notin \ell(b_1, \dots, b_n)$, то (5) от №6 $\Rightarrow b_1, \dots, b_n; x$ са ЛНЗ в-ри и са $n+1$ на бр. - противоречие на доп. Сл. $x \in \ell(b_1, \dots, b_n)$. Така $\ell(b_1, \dots, b_n) = V$. Сл. в-рите $b_1, \dots, b_n$ са базис на V и $\dim V = n$

Забележка: Ако $\dim V = n$, то всеки n ЛНЗ в-ри на V са базис

на V: Нека $\dim V = n$ и $b_1, \dots, b_n \in V$ са ЛНЗ в-ра.
Ако $x \in V$ и $x \notin \ell(b_1, \dots, b_n)$, то в-рите $b_1, \dots, b_n; x$ са ЛНЗ и са $n+1$ на бр. - противоречие на $\dim V = n$. Сл. $x \in \ell(b_1, \dots b_n)$ за $\forall$ в-р $x \in V$, т.е. $\ell(b_1, \dots, b_n) = V$. Така $b_1, \dots, b_n$ е базис на V.

__д-во (ii)__ следва от (i) чрез отрицание (сами)

__Твърдение 4:__ Нека $\dim V = n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $b_1, \dots, b_k \in V$ са ЛНЗ в-ри. $(1 \leq k \leq n)$. Тогава (при $k < n$) $\exists$ в-ри $b_{k+1}, \dots, b_n \in V$, такива, че $b_1, \dots, b_k; b_{k+1}, \dots, b_n$ е базис на пространството V.

__д-во:__ Ако $\ell(b_1, \dots, b_k) = V$, то $b_1, \dots, b_k$ е базис на V (и $k = n$). Нека $\ell(b_1, \dots, b_k) \subsetneq V$ (собствено подпростр. на V). Тогава $\exists$ в-р $b_{k+1} \in V$, такъв че $b_{k+1} \notin \ell(b_1, \dots, b_k)$. (5) от №6 $\Rightarrow b_1, \dots, b_k; b_{k+1}$ са ЛНЗ. Ако $\ell(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) = V$, то $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ са базис на V. Ако $\ell(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \subsetneq V$, избираме в-р $b_{k+2} \notin \ell(b_1, \dots, b_k, b_{k+1})$ и от (5) от №6 $\Rightarrow b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, b_{k+2}$ са ЛНЗ. След $n-k$ стъпки: има в-ри $b_1, \dots, b_k; b_{k+1}, \dots, b_n \in V$, които са ЛНЗ. Забележка $\Rightarrow b_1, \dots, b_k; b_{k+1}, \dots, b_n$ са базис на V

__Твърдение 5:__ (V е крайномерно простр.) Ако $\underset{\text{(подпростр)}}{U \leq V}$, то $\dim U \leq \dim V$. При това $\underset{\text{(размерност)}}{\dim} U = \dim V \Longleftrightarrow U = V$.

__д-во:__ Нека $\dim V = n$. В V има точно n ЛНЗ в-ри, сл. в U има $\leq n$ ЛНЗ в-ри и Тв. 3 $\Rightarrow \dim U \leq n$, т.е. $\dim U \leq \dim V$
Ако $U = V$, то $\dim U = \dim V$. Обратно, нека $U \leq V$ и $\dim U = \dim$ $= n$. Нека $u_1, \dots, u_n$ е базис на U. Това са n ЛНЗ в-ри в V и Забележка $\Rightarrow u_1, \dots, u_n$ е базис на V. Тогава $V = \ell(u_1, \dots, u_n)$, но $\ell(u_1, \dots, u_n) \subseteq U$. Сл. $V \subseteq U$, т.е. $U = V$.

Нека $\dim V = n$ и $e_1, \dots, e_n$ е базис на V. Нека $x \in V$. $\exists$ числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, такива че $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$. n-орката $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ е единствена: ако $\mu_1, \dots \mu_n \in F$ и $x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n$, то $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$; $(\lambda_1 - \mu_1) e_1 + (\lambda_2 - \mu_2) e_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) e_n$
Но $e_1, e_2, \dots, e_n$ са ЛНЗ. и сл. $\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$ и $\mu_1 = \lambda_1, \mu_2 = \lambda_2, \dots, \mu_n = \lambda_n$.

Деф. Числата $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ са координати на в-ра x спрямо базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

8. Сума на подпространства

V – лин. простр. над поле F и $V_1 \leq V$ и $V_2 \leq V$ ($V_1 \cap V_2 \leq V$, но в общия случай $V_1 \cup V_2$ не е $\leq V$)

Означ. с $V_1 + V_2 = \{ x \in V . \exists x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$, за които $x = x_1 + x_2 \}$ (сума на V_1 и V_2)

$V_1 + V_2$ е подпростр. на V, съдържа V_1 и V_2: $x, y \in V_1 + V_2$ и $\lambda, \mu \in F$: $x = x_1 + x_2$; $x_1 \in V_1$; $x_2 \in V_2$; $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$; $\lambda x + \mu y =$

$$= \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = \underbrace{(\lambda x_1 + \mu y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\lambda x_2 + \mu y_2)}_{\in V_2}$$ т.е. $\lambda x + \mu y \in V_1 + V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 + V_2 \leq V$

$\forall x \in V_1$, $x = x + 0$, но $x \in V_1$, $0 \in V_2 \Rightarrow x = x + \theta \in V_1 + V_2$, сл.

$V_1 \subseteq V_1 + V_2$, също $V_2 \subseteq V_1 + V_2$

Теорема: Нека V_1 и V_2 са крайномерни простр. Тогава $V_1 \cap V_2$ и $V_1 + V_2$ също са крайномерни простр. и $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Д-во: $\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = l$. $V_1 \cap V_2 \leq V_1$ и (№7) $V_1 \cap V_2$ е крайномерно; нека $\dim(V_1 \cap V_2) = r$. Избираме базис (1) $a_1, \dots, a_r$ на $V_1 \cap V_2$ (ако $V_1 \cap V_2 \neq \{\theta\}$). №7: $a_1, \dots, a_r$ са ЛНЗ в-ри в V_1 (и в V_2), сл. $\exists$ в-ри $b_{r+1}, \dots, b_k \in V_1$, такива че (2) $a_1, \dots, a_r ; b_{z+1}, \dots, b_k$ е базис на V_1 и $\exists$ в-ри $c_{r+1}, \dots, c_l \in V_2$, такива че (3) $a_1, \dots, a_r ; c_{r+1}, \dots, c_l$ е базис на V_2.

Разгл. в-рите (*) $a_1, \dots, a_r ; b_{r+1}, \dots, b_k ; c_{r+1}, \dots, c_l$

I. В-рите (*) са в $V_1 + V_2$ (всеки от тях $\in V_1 \cap V_2$, V_1 или V_2 и сл. $\in V_1 + V_2$)

II. $\ell(*) = V_1 + V_2$, т.е. $\forall$ в-р от $V_1 + V_2$ е лин. комбинация на в-рите (*): $\forall x \in V_1 + V_2$ има $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$; x_1 е лин. комб. на в-рите (2) и x_2 е лин. комб. на в-рите (3), сл. x е лин. комб. на в-рите (*).

III. В-рите (*) са ЛНЗ с-ма: доп., че ∃ $\underbrace{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r}_{a} + \underbrace{\mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_k b_k}_{b} + \underbrace{\nu_{r+1} c_{r+1} + \dots + \nu_l c_l}_{c} = \theta$ (с някакви коеф. $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in F$)

$a + b + c = \theta$, $\underset{\in V_1}{b} = \underset{\in V_1, V_2}{-a} \underset{\in V_2}{-c}$. Сл. $b \in V_1 \cap V_2$. Тогава b е лин. комб.

на в-рите (1), т.е. $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_r a_r$ (някакви коеф. $\alpha_i \in F$)

$\mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_k b_k = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r$; $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r - \mu_{r+1} b_{r+1} - \dots - \mu_k b_k =$

Това е лин. комб. на в-рите (2), които са базис на V_1, сл. ЛНЗ и $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ и $\mu_{r+1} = \dots = \mu_k = 0$. Тогава $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \nu_{r+1} c_{r+1} + \dots + \nu_l c_l =$

Това е лин. комб. на (3), които са базис на V_2, сл. че са ЛНЗ и $\underline{\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0}$ и $\underline{\nu_{r+1} = \dots = \nu_l = 0}$. Така док., че в-рите (*) са ЛНЗ

От I, II, III ⇒ и в-рите (*) са базис на $V_1 + V_2$ и ⇒ $\dim(V_1 + V_2) =$
$= $ бр. на в-рите (*) $= r + (k - r) + (l - r) = k + l - r = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap$

V; $V_1 \le V$ и $V_2 \le V$. Знаем какво е $V_1 + V_2$ $(\le V)$, в частност $V = V_1 + V_2$ означава, че ∀ в-р $x \in V$ ∃ в-ри $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$, такива, че $x = x_1 + x_2$

Деф: V е директна сума на V_1 и V_2 ако ∀ в-р $x \in V$ ∃ единствени в-ри $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$, такива че $x = x_1 + x_2$. Означението: $V = V_1 \oplus V_2$

(Ако $V = V_1 \oplus V_2$, то $V = V_1 + V_2$)

Твърдение 1: $V = V_1 \oplus V_2 \iff$ 1) $V = V_1 + V_2$ и 2) $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$

д-во: ⇒) Нека $V = V_1 \oplus V_2$. 1) е очевидно изпълнено. Нека $x \in V_1 \cap V_2$. $x = \underset{\in V_1}{x} + \underset{\in V_2}{\theta} = \underset{\in V_1}{\theta} + \underset{\in V_2}{x}$. От деф. за директна сума ⇒ $x = \theta$ и $\theta = x$, т.е. $x = \theta$. Така $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$ и 2) е изп.

⇐) Нека са изп. 1) и 2). Нека $x \in V$. 1) ⇒ ∃ $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$, такива, че $x = x_1 + x_2$. Нека $x_1' \in V_1$, $x_2' \in V_2$ и $x = x_1' + x_2'$

$x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$, $\underbrace{x_1 - x_1'}_{\in V_1} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in V_2} \Rightarrow x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in V_1 \cap V_2$, но 2) ⇒

$V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$, сл. $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 = \theta$, ⇒ $x_1' = x_1$ и $x_2' = x_2$. Така $\forall x \in$
∃! в-ри $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$ с $x = x_1 + x_2$, т.е. $V = V_1 \oplus V_2$

Твърдение 2: Нека $\dim V < \infty$ и $V = V_1 + V_2$. Тогава $V = V_1 \oplus V_2 \iff$

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$.

Д-во: Щом $V = V_1+V_2$, то Тв. 1 $\Rightarrow V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Така $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 0 \overset{T.}{\Leftrightarrow} \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1+V_2) = 0 \Leftrightarrow$ $\dim V_1 + \dim V_2 - \dim V = 0 \Leftrightarrow \dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$

Твърдение 3: Нека $\dim V < \infty$ и $U \leq V$. Тогава $\exists\, W \leq V$, такова че $V = U \oplus W$.

Д-во: Ако $U = \{0\}$, то $W = V$ - доказано. Ако $U = V$, то $W = \{0\}$ - доказ. Нека $U \neq \{0\}$, $U \neq V$. Означ. $\dim V = n$, $\dim U = k$ $(1 \leq k < n)$. Избираме $u_1, \dots, u_k$ - базис на U; №7 $\Rightarrow \exists$ в-ри $u_{k+1}, \dots, u_n \in V$, такива, че $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ е базис на V. Означ. с $W = \ell(u_{k+1}, \dots, u_n)$

$\forall x \in V \Rightarrow x = \underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k}_{\in U} + \underbrace{\lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n}_{\in W}$ $(\lambda_i \in F)$, т.е.

$x = x_1 + x_2$, $x_1 \in U$; $x_2 \in W$, $\Rightarrow V = U + W$ (1)

Нека $x \in U \cap W$, $x = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$ и $x = \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_n u_n$, сл. $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k - \mu_{k+1} u_{k+1} - \dots - \mu_n u_n = 0$. Но $u_1, \dots u_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_n = 0$. Сл. $x = 0$, т.е. $U \cap W = \{0\}$ - така от Тв 1 $\Rightarrow V = U \oplus W$

Задача: Ако $e_1, e_2, \dots, e_n$ е базис на V, то $V = \ell(e_1) \oplus \ell(e_2) \oplus \dots \oplus \ell(e_n)$ и $\dim \ell(e_i) = 1$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$

V; $V_1, V_2, \dots, V_s \leq V$ $(2 \leq s < \infty)$. **Деф:** $V_1 + V_2 + \dots + V_s = \{x_1 + x_2 + \dots + x_s,$ $x_i \in V_i, i = 1, 2, \dots s\}$

$V_1 + V_2 + \dots + V_s$ е подпростр. на V, съдържащо $V_1, V_2, \dots, V_s$. В частност $V = V_1 + V_2 + \dots + V_s$ означава, че $\forall$ в-р $x \in V$ $\exists$ в-ри $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2, \dots, x_s \in V_s$, такива, че $x = x_1 + x_2 + \dots + x_s$

Деф: Ако $\forall x \in V$ $\exists!\, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \dots, x_s \in V_s$, такива че $x = x_1 + x_2 + \dots + x_s$: V е директна сума на $V_1, V_2, \dots, V_s$

Озн. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$

Твърдение 1': $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s \Leftrightarrow$ 1) $V = V_1 + V_2 + \dots + V_s$ и 2) $V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_s) = \{0\}$ $\forall i = 1, 2, \dots s$

18.11.08.

Упражнение

Линейни пространства

V - лин. простр. над поле F

$a, b, c, \dots, \in V$ - вектори

$\lambda, \mu, \alpha, \beta, \dots, \in F$ - скалари

$a + b = c \in V \quad , \forall a, b \in V$

$\lambda . a = d \in V \quad , \forall a \in V \ , \forall \lambda \in F$

Аксиоми:

① асоциативен закон на $+$

$(a+b)+c = a+(b+c) \ , \ \forall a, b, c \in V$

② $\exists \underset{\text{нулев в-р}}{\theta} \in V : \theta + a = a + \theta = a \ , \forall a \in V$

③ $\forall a \in V \ , \exists \underset{\text{противопол. на a в-р}}{(-a)} \in V : a + (-a) = (-a) + a = \theta$

④ $\forall a, b \in V : \ a + b = b + a$

⑤ $1 \in F, \ 1.a = a \ , \forall a \in V$

⑥ $\forall a, b \in V, \forall \lambda \in F : \ \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

⑦ $\forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in F : \underbrace{\lambda a + \mu a}_{\in V} = \underbrace{(\lambda + \mu)}_{\in F} \underset{\in V}{a}$

⑧ $\forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in F : \lambda(\mu a) = \underset{\in F}{(\lambda \mu)} \underset{\in V}{a}$

$W \leq V$, ако: 1) $\forall a, b \in W \quad a + (-b) \in W$ и 2) $\forall \lambda \in F . \ \lambda a \in W$

$\forall a, b \in W$

$\forall \lambda, \mu \in F \quad , \lambda a + \mu b \in W \Rightarrow W \leq V$

$\{a_i\} \in V \ , \{\lambda_i\} \in F \quad \sum \lambda_i a_i$

$\{a_i\}_{i=1}^{n} \in V , \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \in F \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$

$\{a_i\}_1^n$ е ЛНЗ с-ма в-ри ако:

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \theta \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

$\{a_i\}_1^n$ е ЛЗ с-ма в-ри ако:

$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + \dots + \lambda_n a_n = \theta$; $\exists \lambda_k \neq 0$

$a_k = -\frac{1}{\lambda_k}\left(\lambda_1 a_1 + \dots \underset{\boxed{\lambda_k a_k}}{} + \lambda_n a_n\right)$

Лин. обвивка на съвкупност от в-ри

$A \subseteq V$, $\ell(A) = \{\forall$ лин. комб. на в-рите от $A\} \supseteq A$

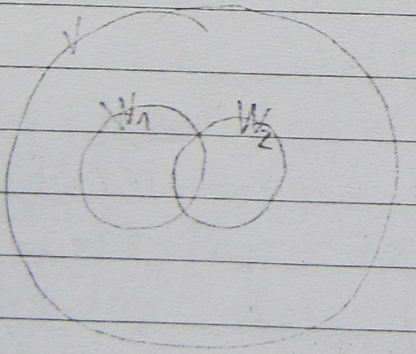
3.3 зад. а) $\{W_i\}_{i \in I}$, $W_i \leq V \Rightarrow U = \bigcap_{i \in I} W_i \leq V$?

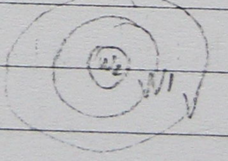
б) $W_1, W_2 \leq V \Rightarrow W_1 \cup W_2 \leq V \Leftrightarrow W_1 \leq W_2$ или $W_2 \leq W_1$

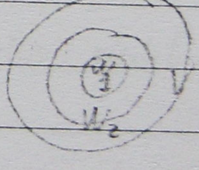
д-во а): $\left.\begin{array}{l}\forall a, b \in U \\ \forall \lambda, \mu \in F\end{array}\right\} \lambda a + \mu b \overset{?}{\in} U$

$\left.\begin{array}{l} a \in U \Rightarrow a \in W_1 \text{ , } W_i \leq V \Rightarrow \lambda a \in W_i, \forall i \in I \text{ , } W_i \leq V \\ b \in U \Rightarrow \underset{\forall i \in I}{b \in W_i}, W_i \leq V \Rightarrow \mu b \in W_i, \forall i \in I \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lambda a + \mu b \in W_i \Rightarrow \lambda a + \mu b \in \bigcap_{i \in I} W_i = U \Rightarrow$ кр $U \leq V$







Доп. че $W_1 \cup W_2$ е подпростр.

$\exists a \in W_1 \setminus W_2$

$\exists b \in W_2 \setminus W_1$

$v = a + b \in W_1 \cup W_2$

| $v \in W_1$ или $v \in W_2$

| $a \in W_1$ $\quad b \in W_2$

$W_1 \leq V \quad W_2 \leq V$

$b = v - a \in W_1 \quad a = v - b \in W_2$

$\overset{\circ}{\times} \quad \overset{\circ}{\times}$

$b \notin W_1 \quad a \notin W_2$

3.4 зад. $A \subseteq V,\ \ell(A)$

а) $\ell(A) \leq V$ $\quad \forall a, b \in \ell(A) \Rightarrow \lambda a + \mu b \in \ell(A) \Rightarrow \ell(A) \leq V$

$\forall \alpha, \beta \in F$

б) $\ell(A) = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq W_i \\ W_i \leq V}} W_i$

в) $\ell(A) = A \Leftrightarrow A \leq V$

3.6 зад. $V = \mathbb{R}^+$ лин. простр. над $F = \mathbb{R}$

$a \oplus b := ab \in V$ $\quad +, \cdot$

$\forall a, b \in V \quad a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$

$5 + 7$ (числа) $= 12$ $\quad 5 \oplus 7$ (вектори) $= 35$

$\forall \lambda \in F, \forall a \in V;\ \lambda \odot a = \underbrace{a^{\lambda} \in V}$

$\left.\begin{matrix} a > 0 \\ \forall \lambda \in F \end{matrix}\right\} a^{\lambda} > 0$

M

Аксиоми:

① асоциативен закон на $\oplus$

$\forall a, b, c \in V: (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

$(a \oplus b) \oplus c \overset{def}{=} (ab) \oplus c \overset{def}{=} (ab)c$)) асоц. закон на умнож. на в-ри.

$a \oplus (b \oplus c) \overset{def}{=} a \oplus (bc) \overset{def}{=} a(bc)$

② $\exists \theta := 1 \in V, \forall a \in V: a \oplus \theta = \theta \oplus a = a$

$x > 0: \quad ax = xa = a \Rightarrow x = 1 \in V$

$x \in V:$

③ $\forall a \in V, \exists (-a) := a^{-1} = \frac{1}{a} \in V \cdot a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = \theta$

$x > 0 \quad ax = xa = 1$

$-3 \odot 7 = 7^{-3}$ $\quad V$

$3 \odot (-7) = \left(\frac{1}{7}\right)^3$ $\quad V$ $\quad , 3 \cdot (-7) = -21$ $\quad F$

④ $a \oplus b = b \oplus a$ (ком. закон на $\oplus$)

$ab = ba$ в $F = \mathbb{R}$

⑤ $1 \in F, \forall a \in V: 1 \odot a = a^1 = a$

⑥ $\forall a, b \in V, \ \forall \lambda \in F : \lambda \odot (a \oplus b) = (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b)$

$\lambda \odot (a \oplus b) = \lambda \odot (ab) = (ab)^{\lambda}$

$(\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b) = a^{\lambda} \oplus b^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda}$)) F

⑦ $\forall \lambda, \mu \in F, \forall a \in V : (\lambda \odot a) \oplus (\mu \odot a) = (\lambda + \mu) \odot a$

$(\lambda \odot a) \oplus (\mu \odot a) = a^{\lambda} \oplus a^{\mu} = a^{\lambda} . a^{\mu}$

$(\lambda + \mu) \odot a = a^{\lambda + \mu}$

⑧ $\forall \lambda, \mu \in F, \forall a \in V : \lambda \odot (\mu \odot a) = (\lambda \mu) \odot a$

$\lambda \odot (\mu \odot a) = \lambda \odot (a^{\mu}) = (a^{\mu})^{\lambda} \underset{F}{=} a^{\mu \lambda} = \underset{F}{a}^{\lambda \mu}$

Пр: $V \Rightarrow -3 \odot 7 \oplus 2 \odot (-5) = 7^{-3} \oplus \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 7^{-3} . \frac{1}{25} = \dots$

$F \Rightarrow -3.7 + 2.(-5) = -31$

3.5 зад. X - множество, F - числ. поле

$V = F^{x} = \{ f : x \to F \}_{\forall x \in X}$ $\qquad$ $V = F^{x}$ - лин. простр. от ф-ии над поле F

$V \ni (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$V \ni (\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$

$\forall \lambda \in F, \ \forall f, g \in F^{x} = V$

$F^{n} = \{ a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F \}$

$a + b = (a_1, a_2 \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in F^{n}$

$\lambda a = \lambda (a_1, a_2, \dots a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots \lambda a_n)$

$F_{n \times n} = \{ A = (a_{ij})_{m \times n} \mid a_{ij} \in F \}$

$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$

$\{a_i\}$ - базис на V

1) $\{a_i\}$ ЛНЗ с-ма в-ри	1) $\{a_i\}$ ЛНЗ с-ма в-ри
2) $\ell(\{a_i\}) = V$	2) $\forall b \in V, \exists! \lambda_i \in F, b = \sum \lambda_i a_i$
	$n = \{a_1, \dots a_n\}$ - размерност
($\exists!$ - съществува единствено...)	$\dim V = \dim V$

F^n $a = (a_1, a_2 \dots a_n) = a_1(1, 0, \dots 0) + a_2(0, 1, 0 \dots 0) + a_3(0,0,1,0 \dots 0$

$+ \dots + a_n(0, \dots 0\,1) = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots a_ne_n$

$e_1 = (1, 0,0,0,0)$

$e_2 = (0,1,000)$

$e_3 = (0,0,1, \dots 0)$

$a_{n-1} = (0,0,0 \dots 1,0)$

$e_n = (0,0,0 \dots 0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{1n}E_{1n} + a_{21}E_{21} + \dots + a_{mn}E_{mn}$$

$(1,2,3,-1,-2,-3,4,5,6,-4,-5,-6,2,1,3,-2,-3,-1,5,7) \Rightarrow F^{20}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 & 6 & -4 \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} F_{4\times 5}$$

F^n - векторно простр.

$F^{n+1}[x] = \{ f = a_0x^n + ax^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \mid a_i \in F,\ n = \deg f \}$

$f + g = (d_0 + c_0)x^n + (d_1 + c_1)x^{n-1} + \dots + (d_n + c_n)$

$\lambda f = (\lambda a_0)x^n + (\lambda a_1)x^{n-1} + \dots + (\lambda a_{n-1})x + (\lambda a_n)$

$g = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m = \underset{c_0}{0} \cdot x^n + \underset{c_1}{0} \cdot x^{n-1} + \dots + \underset{c_n}{b_0} x^n,\quad m \le n$

$\{ \underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{x}, \underset{e_3}{x^2}, \dots, \underset{e_{n+1}}{x^n} \}$ - ст. базис

$\updownarrow$

$F^{n+1}\ (5,7,1,0,2,3) \to 5 \cdot 1 + 7 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^5 = f$

3.7 зад. $V = \{ (a_1, a_2, \dots a_k, \dots) \mid a_i \in F \}$

$(a_1, a_2, \dots a_k, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_k, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k, \dots)$

$\lambda(a_1, a_2, \dots a_k \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots \lambda a_k, \dots)$

$(1, 0, \dots 0, \dots)$

$(0, 1, \dots, 0 \dots)$

$(0, 0, 1, \dots 0, \dots)$

б) $W = \{\forall$ финитни редици$\} = \{(a_1, a_2, \dots a_k \dots)$: на краен бр. места може $a_j \neq 0\}$

$\forall\, a \in W$

$b \in W \quad \lambda a + \mu b = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots \lambda a_k, \lambda s \dots) + (\mu b_1, \mu b_2, \dots \mu b_k, \mu l) =$

$\forall\, \lambda, \mu \in F \quad = (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \dots, \lambda a_k + \mu b_k + \lambda a_1 + \mu b_s + 0 \dots 0)$

$s < l$

$U = \{\div a_i\} \neq \{(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots a_1 + (n-1)d, \dots)\}$

$(b_1, b_1 + s, b_1 + 2s, \dots, b_1 + (n-1)s, \dots)\}$

$\lambda a + \mu b = (\lambda a_1 + \mu b_1) + \lambda d + 2\mu s \Rightarrow U \leq W$

$3.8_3.$ $F = \mathbb{R}$, $[a,b]$

$V = \{f : [a,b] \to R\}$ лин. пр. над $\mathbb{R}$

$F^X \leftrightarrow \mathbb{R}^{[a,b]} = V$ над $\mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall\, x \in [a,b]$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \ \forall\, x \in [a,b] \quad \forall\, \lambda \in F$

$\forall\, f, g \in V$

$[a,b] \qquad W = \{f \in V \mid f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_k) = 0\} \leq V$

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ - фикс. точки от $[a,b]$, $[a,b] = [1, 15]$

$U = \{f \in V \mid f(13) = 0\} \leq V$

$\forall\, f, g \in W, \ (\lambda f + \mu g) \overset{?}{\in} W$

$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)(\alpha_1) + (\lambda f + \mu g)(\alpha_2) + \dots + (\lambda f + \mu g)(\alpha_k) =$$

$$= \lambda f(\alpha_1) + \mu g(\alpha_1) + (\lambda f(\alpha_2) + \mu g(\alpha_2)) + \dots + (\lambda f(\alpha_k) + \mu g(\alpha_k)) =$$

$$= \lambda \underbrace{(f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_k))}_{\overset{\shortparallel}{0} \ f \in W} + \mu \underbrace{(g(\alpha_1) + g(\alpha_2) + \dots + g(\alpha_k))}_{\overset{\shortparallel}{0} \ g \in W} = \lambda . 0 + \mu 0 = 0$$

$\lambda f + \mu g \in W \Rightarrow W \leq V$

21.11.08.

Упражнение

$F^{n+1}[x] \to 1, x, \dots x^n$

$F[x] = \{ f = a_0x^n + \dots + a_n \mid a_n \in F \quad , n \in \mathbb{N} \}$

$1, x, \dots, x^n, \dots$

3.13. $e_1, e_2, \dots e_n$ - базис на V

$$\begin{array}{l} a_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ a_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ - - - - - - - - - - \\ a_k = a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + \dots + a_{kn}e_n \end{array} \Rightarrow A = \left(\begin{array}{c} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ - - - - - \\ a_{k1}\ a_{k2} \dots a_{kn} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{кр. бр. ел} \\ \sim \\ \text{преобр.} \end{array}$$

$$B_{k\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ - & - & - & - \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 = b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \dots + b_{1n}e_n \\ b_2 = b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \dots + b_{2n}e_n \\ b_k = b_{k1}e_1 + b_{k2}e_2 + \dots + b_{kn}e_n \end{array}$$

$\ell(b_1, b_2, \dots b_k) = \ell(a_1, a_2, \dots, a_k)$

3.14. V - 2-мерно пр.

e_1, e_2 - базис на V

$a_1 = e_1 - e_2$

$a_2 = e_1 + e_2$

$V_e = e_1 - 5e_2$

Да се док. че a_1 и a_2 са базис на V и да се намери V спрямо базиса.

$V_a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = ? \ / \ a_1, a_2 = ?$

$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = \theta \iff \beta_1 = \beta_2 = 0 \overset{}{\underset{def.}{\Rightarrow}} a_1, a_2$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ б. на V

$\beta_1(e_1 - e_2) + \beta_2(e_1 + e_2) = \theta \Rightarrow (\beta_1 + \beta_2)e_1 + (\beta_2 - \beta_1)e_2 = \theta$

e_1, e_2 - базис $\Rightarrow$ ЛНЗ

$$\left| \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_2 - \beta_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$V_a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \alpha_1(e_1 - e_2) + \alpha_2(e_1 + e_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)e_2 =$
$= e_1 - 5e_2$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = -5 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = ?$$

базис → векторите се нареждат по стълбове

$$T_{e\to a}\begin{pmatrix} \overset{a_1}{1} & \overset{a_2}{1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow v = 3a_1 - 2a_2 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$$

$\{a_1, a_2\}$ ЛНЗ ⇒ базис

$$T_{e\to a}\underset{\overset{\shortparallel}{v_a}}{\boxed{X}} = v_e$$

3.15 з. e_1, e_2, e_3 - б. на V ? $\{a_i\}_1^3$ - базис на V

$v = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$ $\quad v_a = ?$

$a_1 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$

$a_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$

$a_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & v \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c}(-1)\\(-1)\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & +3 & 2 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right) \Rightarrow v_a = \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$$

3.16 з. $a_1 = (1, 2, -1, 3)$ Да се док. a_1, a_2 - ЛНЗ и доп. до базис на F^4

$a_2 = (-1, -2, 1, 1)$

$V = F^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} /4 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ a_1 \; a_2 \; e_3 \; e_4 \end{array}$$

3.17. $\lambda = ?$

$a_1 = (1, 2, 3, 4)$

$a_2 = (7, 14, 20, 27)$

$a_3 = (5, 10, 16, 19)$

$V = (2, \lambda, 5, 5)$

$\cdot \lambda = ?\ V \in (a_1, a_2, a_3)$

$V = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 14 & 10 & \lambda \\ 3 & 20 & 16 & 5 \\ 4 & 27 & 19 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ /-3 \\ /-4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda = 4$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad V = -17a_1 + 2a_2 + a_3$$

$V = V_1 + V_2 = \{ v = v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1 ; v_2 \in V_2 \}$

$V_1, V_2 \leq V$

$v \in V_1 \to v + 0$

$v \in V_2 \to 0 + v$

$v \in V_1 \cap V_2 \to \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} v,\ \frac{3}{4} v + \frac{1}{4} v$

$$V_1 \oplus V_2 = V \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} \end{cases}$$

3.18. $e_1, \dots e_n$ - б. на V, $\dim V = n < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$,

1) Ако $\left.\begin{array}{l} V_1 = l(e_1, \dots e_k) \\ V_2 = l(e_{k+1}, \dots e_n) \end{array}\right\} \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} \end{array}\right.$

2) Ако $\left.\begin{array}{l} V = V_1 \oplus V_2 \\ e_1, e_2, \dots e_k \text{ - базис на } V_1 \\ e_{k+1}, \dots e_n \text{ - базис на } V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow e_1, \dots e_n$ - б. на V

Сл. $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$

$V = V_1 \oplus V_2$

1) $\Rightarrow e_1, e_2, e_k, \dots e_n$ - б. на V

$V_1 = l(\{e_1, e_2, \dots e_k\})$

$V_2 = l(\{e_{k+1}, \dots e_n\})$

$\Rightarrow V \Rightarrow \underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k}_{v_1 \in V_1} + \underbrace{\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n}_{v_2 \in V_2} = V$

$\forall V = V_1 + V_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

$\Rightarrow V = V_1 + V_2$

Доп., че $v \in V_1 \cap V_2$

$\exists \beta_1, \dots \beta_k : \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_k e_k \overset{}{=} v$

$\exists \gamma_{k+1}, \dots \gamma_n : \gamma_{k+1} e_{k+1} + \dots + \gamma_n e_n = v$

$\beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k = \gamma_{k+1} e_{k+1} + \dots + \gamma_n e_n$

$\beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k - \gamma_{k+1} e_{k+1} + \dots + \gamma_n e_n = 0$

$\{e_i\}_1^n$ - б. на $V \Rightarrow$ ЛНЗ

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \quad \in V_1 \Rightarrow v = 0$

$\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_n = 0 \quad \in V_2 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\} \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$

2 $\Rightarrow$) $V_1 = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow \begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} \end{cases}$

$e_1, \dots, e_k$ - б. на V_1

$e_{k+1}, \dots e_n$ - б. на V_2

? $\{e_i\}_1^n$ - б. на V

ЛНЗ: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = 0$

? $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_i = 0$

$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k}_{v_1 \in V_1} = \underbrace{(-\alpha_{k+1}) e_{k+1} + \dots + (-\alpha_n) e_n}_{v_2 \in V_2}$

$v_1 = v_2 \Rightarrow v \in V_1 \cap V_2$

$V_1 \cap V_2 = \{\theta\} \Rightarrow v_1 = v_2 = v = 0$

$v_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$ - б. / ЛНЗ $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

$v_2 \in V_2 = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = 0$

б. на $V_2 \Rightarrow$ ЛНЗ $\Rightarrow \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$

$\dim V = n = k + (n-k)$

3.20. $V = \overset{V_1}{\ell(e_1)} \oplus \overset{V_2}{\ell(e_2)} \oplus \ell(e_3) \oplus \dots \oplus \overset{V_n}{\ell(e_n)}$

$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 + \dots + V_k \\ V_s \cap (V_1 + \dots + V_{s-1} + V_{s+1} + \dots + V_k) = \{\theta\} \end{cases}$$

$\bigcap_{s=1}^{k} V_s = \{\theta\}$

3.19. V, $\dim V = n$, $W \leq V$

? $\exists U \leq V : V = W \oplus U$

$W = V \Rightarrow V = W \oplus \{\theta\}$

$W < V$, $\dim W = k < n$

$e_1, \dots e_k$ - б. на W

$\underbrace{e_1, \dots e_k}_{W}, \underbrace{e_{k+1}, \dots e_n}_{U := \ell(e_{k+1}, \dots e_n)}$ - допълване до базис на V :

3.22. $e_1, e_2, \dots, e_n$ - б. на V

V_1, V_2

$V_1 = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0\}$

$V_2 = \{\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n \mid \beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_n = \beta\}$

$V_1 \leq V \qquad V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \{\theta\} \end{cases}$

$V_2 \leq V$

$\forall a, b \in V_1$, $\lambda a + \mu b \in V_1$? $\Rightarrow V_1 \leq V$

$\forall \lambda, \mu \in F$

$\lambda a + \mu b = \lambda(\underset{\alpha_1 + \dots \alpha_n = 0}{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n}) + \mu(\underset{\gamma_1 + \dots \gamma_n = 0}{\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n}) = (\lambda\alpha_1 + \mu\gamma_1)e_1 + \dots + (\lambda\alpha_n + \mu\gamma_n$

$\in V_1$

ако

$(\lambda\alpha_1+\mu\gamma_1)+\ldots+(\lambda\alpha_n+\mu\gamma_n)=\lambda(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)+\mu(\gamma_1+\ldots\gamma_n)=$

$=\underbrace{\lambda.0+\mu.0} \Rightarrow \lambda a+\mu b\in V_1 \rightarrow V_1\leq V$

$V_2\leq V$

$\lambda a+\mu b=\lambda(\underset{\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha}{\alpha_1e_1+\ldots\alpha_ne_n})+\mu(\underset{\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma}{\gamma_1e_1+\ldots\gamma_ne_n})=$

$=(\lambda\alpha_1+\mu\gamma_1)e_1+\ldots+(\lambda\alpha_n+\mu\gamma_n)e_n\in V_2$, ако

$\lambda\alpha_1+\mu\gamma_1=\lambda\alpha+\mu\gamma$ - - - -

$\forall v\in V: \alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n=v$

$\underbrace{(\alpha_1-\alpha)e_1+\ldots+(\alpha_n-\alpha)e_n)}_{v_1\in V_1}+\underbrace{\alpha e_1+\alpha e_2+\ldots+\alpha e_n}_{v_2\in V_2}=v$

$(\alpha_1-\alpha)+\ldots+(\alpha_n-\alpha)=0$

$\alpha=\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}$

$v=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n=\underbrace{(\alpha_1-\alpha)e_1+\ldots+(\alpha_n-\alpha)e_n}_{v_1\in V_1}+\underbrace{e_1+\ldots\alpha e_n}_{v_2\in V_2}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall v=v_1+v_2\\ v_1\in V_1\\ v_2\in V_2\end{array}\right\}\Rightarrow V=V_1+V_2$$

3.23. $M_n(F)=F_{n\times n}=V$

$S=\{A\in V\mid \underset{A^t=A}{A\text{-симетр.}}\}$

$T=\{A\in V\mid \underset{A^t=-A}{A\text{-антисиметр.}}$

$?\ S\leq V$

$?\ T\leq V$

$\underline{V=S\oplus T}$

$\forall A,B\in S$

$(\lambda A+\mu B)^t=\lambda A^t+\mu B^t=\lambda A+\mu B\Rightarrow\lambda A+\mu B\in S$

$\Rightarrow S\leq V$

$A^t = -A$ $\quad A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad \cdot \quad A^t = -A \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$A^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \\ a_{1n} & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} -a_{11} & & \\ & -a_{22} & \\ & & \ddots -a_{nn} \end{pmatrix}$

$\forall A, B \in T,\ \forall \lambda, \mu \in F$

$(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda(-A) + \mu(-B) = -(\lambda A + \mu B)$

$\begin{pmatrix} a_{11} & \enclose{circle}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ \enclose{circle}{a_{21}} & a_{22} & \dots & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \dfrac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ \\ \dfrac{a_{21}-a_{12}}{2} \end{matrix}$

$$\boxed{\forall A = \underset{\in S}{\frac{A+A^t}{2}} + \underset{\in T}{\frac{A-A^t}{2}}}$$

$A \in S \cap T$ $\qquad \{0\} = S \cap T$

$A = A^t = -A$ $\qquad V = S + T \Rightarrow S \oplus T = V$

$A = 0$

3.24. а) $V = F[x]$

$V_1 = \{ f(x) \in V \mid f$ - четен полином, $f(-x) = f(x) \}$

$V_2 = \{ f(x) \in V \mid f$ - нечетен п., $f(-x) = -f(x) \}$

$? \ V_1 \leq V$ $\qquad ? \ V = V_1 \oplus V_2$

$? \ V_2 \leq V$

а) $f = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n$

$f = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2(n+1)} + \dots + a_n$

$f = b_0 x^{2m} + b_1 x^{2(m-1)} + \dots + b_n$

$n > m$ $\qquad \alpha f + \beta g = \sum (\alpha a_i + \beta b_i) x^{2i+1}$

$f(x) = \underbrace{-f(x) = f(x)}_{f=0}$

б) $f(x) \neq 0$

def $f = n$

$f(x) F[x] = \{ h(x) = f(x) . g(x) \} \leq V$

$V = \underset{V_1}{F^n[x]} \oplus \underset{V_2}{f(x) F[x]}$

$V_2 \leq V ?$

$V_1 \oplus V_2 = V = F[x]$

$h(-x) = h(x)$

$(-x)^{2i} = x^{2i+1}$

$f = \underbrace{a_1 + a_2 x^2}_{\in V_1} + \underbrace{a_1 x + a_3 x^3}_{\in V_2}$

$V = V_1 + V_2$

.12.08.

Лекция

9. Ранг на система вектори. Ранг на матрица.

анг на с-ма в-ри

V-лин. простр; $c_1, c_2, \dots, c_k \in V$ (не всички $=0$). Ранг на с-мата: числото r, такова че в с-мата има r на бр. ЛНЗ в-ри и всеки $r+1$ в-ра в с-мата са ЛЗ. (т.е. r е максималния бр. ЛНЗ в-ри в с-мата); $1 \leqq r \leqq k$ ($r=k \Leftrightarrow$ с-мата е ЛНЗ). За с-мата 0: деф. ранг 0. Озн. $r(c_1, \dots, c_k)$.

<u>Твърдение:</u> В сила е равенството: $r(c_1, \dots, c_k) = \dim \ell(c_1, \dots c_k)$

<u>Д-во:</u> Нека $r(c_1, \dots c_k) = r$, $r=0$: тв. е очевидно

Нека $r \geqq 1$. Нека $c_1, \dots, c_r$ са ЛНЗ. c_i ($r+1 \leqq i \leqq k$, при $r<k$)

Ако $c_i \notin \ell(c_1, \dots c_r)$, то (5) от №6 $\Rightarrow c_1, \dots c_r, c_i$ са ЛНЗ, но те са $r+1$ - против. Сл. $c_{r+1}, \dots, c_k \in \ell(c_1, \dots, c_r)$. Следва, че $c_1, \dots c_r$ са базис на $\ell(c_1, \dots c_k)$ и тогава $\dim \ell(c_1, \dots, c_k) = r$, т.е. $\dim \ell(c_1, \dots c_k) =$
$= r(c_1, \dots c_k)$

нга матрица

Нека $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1}\ \alpha_{n2} \dots \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m \times n}$. Нека $k \in \mathbb{N}$, $k \leqq m$, $k \leqq n$.

Избираме k реда в A с номера $i_1, \dots i_k$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq m$ и k стълба в A с номера $j_1, \dots j_k$, $1 \leqq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqq n$.

Задраскваме ги и получаваме детерм. от ред k: минор от ред

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1} & \alpha_{i_1 j_2} & \dots & \alpha_{i_1 j_k} \\ \alpha_{i_2 j_1} & \alpha_{i_2 j_2} & \dots & \alpha_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_k j_1} & \alpha_{i_k j_2} & \dots & \alpha_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

k на матр. A. Нека $A \neq 0$. A има ранг числото r, ако: в A има минор от ред r, различен от 0 и всички минори в A от ред $r+1$ са $=0$. (Т.е. r е максималния ред на различен от 0 минор на A.) За $A=0$: деф. ранг 0.

Означението за ранг на матрица: $r(A)$. (За $A \neq 0$) $1 \leqq r(A) \leqq m, n$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

$1 \leqq r(A) \leqq 3$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Минорите от ред 3 са: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ (4 бр) и всичките са $=0$

Сл. ранга на $A = 2$.

Нека $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{2n} \\ - - - - - \\ \alpha_{m1} \alpha_{m2}, \dots \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$

$a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{1n})$, $a_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{2n}), \dots, a_m = (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots \alpha_{mn})$ - в-ри редове на A, това са m в-ри в лин. простр. F^m, $b_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots \alpha_{m1})$, $b_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{m2}), \dots, b_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots \alpha_{nn})$ - в-ри стълбове на A; това са n-на бр. в-ри в лин. простр. F^m.

Теорема за ранга: В сила е: $r(a_1, \dots, a_m) = r(b_1, \dots b_n) = r(A)$

С-ва на ранг на матрица:

1) $r(A^t) = r(A)$; 2) $r(A)$ не се променя при разместване на редове или стълбове на матр.

Д-во на теоремата:

Ще док., че $r(b_1, \dots b_n) = r(A)$. Тогава $r(a_1, \dots, a_m) = r(A)$ ще следва о $r(A^t) = r(A)$. Ако $A=0$: очевидно. Нека $r(A) = r \geq 1$. $(r \leq m, n)$.

Можем да считаме, че $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1r} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{2r} \\ - - - - - \\ \alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots \alpha_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ (чрез разместване на редове и стълбове на A)

Разгл. в-рите стълбове $b_1, \dots b_r, b_{r+1}, \dots b_n \in F^m$. I - $b_1, b_2, \dots b_r$ са Л ако не са ЛЗ, то и стълбовете на Δ са ЛЗ и от № 2 $\Rightarrow \Delta = 0$ - противоречие. II $b_{r+1}, \dots, b_n \in l(b_1, \dots b_r)$ (ако $r < n$): фикс. k, $r+1 \leq k \leq n$ и нека $i = 1, 2, \dots, m$. Разгл. помощна детерм. D_i от ред $r+1$: $D_i = \begin{vmatrix} \alpha_{11}. \alpha_{12}, \dots \alpha_{1r} & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{2r} & \alpha_{2k} \\ - - - - - & \\ \alpha_{r1} \alpha_{r2}, \dots \alpha_{rr} & \alpha_{rk} \\ \hline \alpha_{i1}. \alpha_{i2} \dots \alpha_{ir} & \alpha_{ik} \end{vmatrix}$

Ако $1 \leq i \leq r$, то последният ред на D_i съвпада с i-тия ред и с

$D_i = 0$

Ако $r-1 \leqq i \leqq m$, то Δ_i е минор от ред $r+1$ на матр. A (от редовете $1, 2, \dots r, i$ и стълбовете $1, 2, \dots r, k$) Но $r(A) = r$ и сл. $\Delta_i = 0$.
Така $\Delta_i = 0$ за $\forall i = 1, \dots, m$. Развиваме Δ_i по адюнгираните количества на последния ред: нека $A_1, A_2, \dots A_r$ са адюнг. к-ва на $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots \alpha_{ir}$; а адюнг. к-во на α_{ik} е $= (-1)^{r+1+r+1} \cdot \Delta = \Delta$.
Така $\alpha_{i1}A_1 + \alpha_{i2}A_2 + \dots + \alpha_{ir}A_r + \alpha_{ik}\Delta = \Delta_i = 0$
$A_1, A_2, \dots A_r$ не съдържат ел. от последния ред на Δ_i и сл. те не зависят от i. $\alpha_{ik} = -\frac{A_1}{\Delta}\alpha_{i1} - \frac{A_2}{\Delta}\alpha_{i2} - \dots - \frac{A_r}{\Delta}\alpha_{ir}$

Озн. $-\frac{A_i}{\Delta} = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, r$; $\alpha_{ik} = \lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \dots + \alpha_r\alpha_{ir}$ – това

е $\forall i = 1, 2, \dots m$ и числата $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ са едни и същи за $\forall i$.
Тези m равенства означават: $b_k = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_r b_r$
От I и II следва, че $b_1, b_2, \dots b_r$ е базис на $\ell(b_1, b_2, \dots b_n)$. Тогава $\dim \ell(b_1, \dots b_n) = r$, т.е. Тв. 1 $\Rightarrow r(b_1, \dots b_n) = r(A)$
Следствие: Нека $A \in F_{n \times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. $\det A = 0 \Leftrightarrow$ редовете (стълбовете) на A са ЛЗ.
$\Leftarrow$) известно от № 2
$\Rightarrow$) Нека $\det A = 0$. Това означава, че $r(A) < n$. Но от Т за ранга $\Rightarrow r(a_1, \dots, a_n) = r(A) \Rightarrow r(a_1, \dots a_n) < n$ т.е. $a_1, a_2, \dots a_n$ са ЛЗ.

10. Системи линейни уравнения.

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N};\ \alpha_{ij}, \beta_k \in F\text{-поле})$$

Решение на (1): n-орка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in F^n$ с:
$$(1)' \quad \begin{cases} \alpha_{11}x_1^0 + \alpha_{12}x_2^0 + \dots + \alpha_{1n}x_n^0 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1^0 + \alpha_{m2}x_2^0 + \dots + \alpha_{mn}x_n^0 = \beta_m \end{cases}$$

(1) е съвместима (несъвместима) ако: (1) има (няма) решение.

Озн. $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ и $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21}, & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & \dots & & \vdots \\ \alpha_{m1}, & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$ (разширена матр на с-ма (1))

Винаги $r(\bar{A}) = r(A)$ или $r(\bar{A}) = r(A)+1$

Теорема на Руше: С-мата(1) е съвместима $\iff r(\bar{A}) = r(A)$

Д-во: Озн. с $b_1, \dots, b_n$ - стълбовете на A и $b = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m)$.
$b_1, \dots b_n; b \in F^m$. $l(b_1, \dots b_n) \leq l(b_1, \dots, b_n, b)$ и $l(b_1, \dots b_n) = l(b_1, \dots, b$
$\iff b \in l(b_1, \dots b_n)$

(1) е съвместима $\iff$ съществуват числа: $x_1^0, \dots x_n^0$, удовлетворяващи (1') $\iff b \in l(b_1, \dots, b_n) \iff l(b_1, \dots b_n) = l(b_1, \dots b_n; b) \overset{1.5}{\iff} \dim l(b_1, \dots b_n) = \dim l(b_1, \dots b_n, b) \overset{13}{\iff} r(b_1, \dots b_n) = r(b_1, \dots b_n; b) \overset{\text{Т.ранг}}{\iff} r(A) = r(\bar{A})$. Така (1) е съвместима $\iff r(A) = r(\bar{A})$

Брой решения на (1): Ако $r(\bar{A}) \neq r(A)$: 0 реш. Нека $r(\bar{A}) = r(A)$.
Ако $r=0$: всяка n-орка $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$ е реш. на (1): ∞ реш.
Нека $r \geq 1$ ($r \leq m, n$) Можем да считаме, че в A различен от 0 е минорът:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}, \Delta \neq 0$$

Тогава $(r+1)$-вото, …, m-то у-е на (1) са лин. комбинации на първите r-у-я на (1). Сл. (1) е равносилна с (2):

$$(2) \left| \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \dots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r \end{array} \right.$$

Ако $r = n$, то по ф-лите на Крамер ((2) има детерм. $= \Delta \neq 0$), (2) има единствено реш. $\Rightarrow$ сл. и (1) има единствено реш. Нека $r < n$.

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1r}x_r = \beta_1 - \alpha_{1r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2r}x_r = \beta_2 - \alpha_{2r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{2n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{r1}x_1 + \dots + \alpha_{rr}x_r = \beta_r - \alpha_{rr+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{rn}x_n \end{array} \right.$$

Нека $x_{r+1}, \dots, x_n$ са произволни числа от полето F. (2) има дет. $\Delta \neq 0$ и я решаваме по Крамер спрямо неизвестните $x_1, \dots, x_r$ $\forall k = 1, 2, \dots, r$, $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, където Δ_k се получава от Δ като само

k-тия стълб на Δ се замени със стълба от свободните членове на с-мата (2) на Δ. Получаваме: (като развием Δ_k по k-тия стъл

$x_k = \mu_k + \lambda_{k1} x_{r+1} + \lambda_{k2} x_{r+2} + \dots + \lambda_{k,n-r} x_n$ ($\mu_k, \lambda_{k1}, \dots \lambda_{k,n-r}$ са някакви числа) (Ако $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$, то $\mu_k = 0$ за $\forall k = 1, \dots r$.
Това са всички реш. на с-мата (2) ⇒ и на с-мата (1): $x_{r+1}, \dots x_n$ са произволни и $\in F$, а $x_1, \dots x_r$ се изразяват $\overset{\text{еднозначно}}{}$ през $x_{r+1}, \dots, x_n$ от тези равенства.
$x_{r+1}, \dots x_n$ (на бр ≥ 1) се наричат свободни неизвестни (параметри).
Брой реш. на (1): ∞ (има ∞^{n-r})
Резюме: Броят на реш. на (1) е: <u>0</u>, ако $r(\bar{A}) \neq r(A)$; ако $r(A) = r(\bar{A}) = r$ и $r = n$: <u>1 реш.</u>; ако $r(A) = r(\bar{A}) = r$ и $r < n$: <u>∞ реш.</u> (включително и при $r = 0$)
Ако (1) е съвместима, записваме реш. й $x = (x_1, \dots x_r; \underbrace{x_{r+1}, \dots, x_n}_{\text{точка}}) \in F^n$. $x_{r+1}, \dots, x_n$ - произволни; $x_1, \dots x_r$ - се изразяват еднозначно през тях. Нека $y = (y_1, \dots, y_r; \underline{y_{r+1}, \dots, y_n}) \in F^n$ е също реш. на (1).
<u>Забележка:</u> Ако $x_{r+1} = y_{r+1}, \dots, x_n = y_n$, то $x = y$

.12.08.

Упражнение

$V = F^3, e_1, e_2, e_3$ $\qquad b_1 = -3e_1 + 2e_2 + 9e_3$

$a_1 = e_1 + e_2 + 4e_3$ $\qquad b_2 = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3$

$a_2 = -2e_1 + e_2$ $\qquad b_3 = -8e_1 + e_2 - 8e_3$

$a_3 = 3e_1 + e_2 - e_3$ $\qquad x_e = -4e_1 + 20e_2 + 25e_3$

? $\{a_i\}$ б. на V $\qquad$? $\Pi_{a \to b}$

? $\{b_i\}$ б. на V $\qquad$? x_a, x_b ?

$$T_{e \to a} = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \{a_i\} \to \text{базис на } V$$

$\det T \neq 0$

$$Q_{e \to b} = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & -8 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \{b_i\} \to \text{б. на } V$$

$T_{e \to a}$ $x_a = x_e$

$T_{e\to a}\, U_{a\to b} = Q_{e\to b}$

$Q_{e\to b}\, X_b = X_e$

$U_{a\to b} X_B = X_a$

$(T_{e\to a} | Q_{e\to b} | X_e) \sim \ldots \sim (E | U_{a\to b} | X_a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 & 2 & -8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 20 \\ 4 & 0 & -1 & 9 & 3 & -8 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 1 & -2 & 3 & -3 & 2 & -8 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 9 & 3 & -8 & 25 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$U_{a\to b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

? Ранг на с-ма в-ри. Ранг на матрица

$V = F^n, e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ - базис

$W = l(a_1, \ldots, a_k)$

ранг - броя на ЛНЗ с-ма в-ри. $r(\{a_i\})$

МЛНЗП - максимално лин. независима подсистема

$r(A) \to r\left\{\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{array}\right.$ - с-ма в-ри-редове на матр. A $\}$

4.3 зад.

$a_1 = (3, 5, -13, 11)$ $\quad r(a_1, \ldots a_n)$?

$a_2 = (3, -1, 3, -3)$ $\quad$ МЛНЗП?

$a_3 = (3, 2, -5, 4)$

$a_n = (3, 8, -21, 18)$

$$\begin{array}{c} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ a_n \end{array}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & 8 & -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a_2 \\ \\ a_3 \\ a_n \end{array}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -16 & 14 \\ 0 & 3 & -8 & 7 \\ 0 & 9 & -24 & 21 \end{pmatrix}$$

$r = 2$

една МЛНП е $\{a_2, a_3\}$

4.4 зад.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \qquad r(A) = ? = 2.$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\qquad \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 7 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad r = 4$$

4.5 зад.
1/

първи ред прибавяме към 2, 3, 4 редове

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$r = ?$ $\lambda = ?$

I сл. $\lambda = 2 \Rightarrow r = 1$ (ненулев ред е първия)

II сл. $\lambda \neq 2 \Rightarrow r = 3$ или 4

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II 1) $\lambda = -2 \Rightarrow r = 3$

II 2) $\lambda \neq -2 \Rightarrow r = 4$

Зад.

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \lambda & \\ 1 & & \lambda & & \ddots & \\ 1 & \lambda & & & & 0 \end{pmatrix} (-\lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & -\lambda & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ 1 & & & & -\lambda \end{pmatrix} \cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sim$$

I сл. $\lambda = 0 \Rightarrow r = 2$

II сл. $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ първи ред $\times(-\lambda)$ + др. ред

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{n-1}{\lambda} & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -\lambda & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ 1 & \dots & & & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} n \geq 2 \\ r = n \end{matrix}$$

4.6 зад.

$a_1 = (\lambda+1, \lambda, \dots, \lambda, \lambda)$

$a_2 = (\lambda, \lambda+1/2, \dots, \lambda, \lambda)$

$\vdots$

$a_{n-1} = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda + \frac{1}{n-1}, \lambda)$

$a_n = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda + \frac{1}{n})$

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+1/2 & \dots & \lambda & \lambda \\ & & \ddots & \lambda & \\ & \lambda & & \lambda+\frac{1}{n-1} & \\ & & & & \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ -1 & 1/2 & & & \\ -1 & & 1/3 & 0 & \\ \vdots & 0 & & \frac{1}{n-1} & \\ -1 & & & & 1/n \end{pmatrix} \begin{matrix} -2\lambda \\ \\ \\ -(n-1)\lambda \\ -n\lambda \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} ⊛ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1/2 & & & \\ \vdots & & 1/3 & 0 & \\ & & 0 & \ddots & \\ -1 & & & & 1/n \end{pmatrix}$$

I $\lambda = 0$

$r = n$

⊛ $= \lambda+1+2\lambda+3\lambda+\dots+n\lambda = 1+\lambda \frac{n(n+}{2}$

II $\lambda \neq 0$

II 1) $\lambda = -\frac{2}{n(n+1)}$, $r = n-1$

II 2) $\lambda \neq -\frac{2}{n(n+1)}$, $r = n$

(хомогенна с-ма лин. у-я)

Фундаментална с-ма реш. (ФСР) на ХСЛУ

Сума и сечение на подпространства.

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

$m < n$

$F^4 = V$ над F

$$w: \left|\begin{array}{ll} x_2 - x_4 = 0 & x_2 = x_4 = q \\ x_1 + x_3 = 0 & x_1 = -x_3 = p \end{array}\right.$$

$(\overset{x_1}{p}, \overset{x_2}{\underset{3}{\frac{0}{7}}}, \overset{x_3}{-p}, \overset{x_4}{q})$

$$\begin{array}{c|cc|} p & 1 & 0 \\ q & 0 & \cancel{1}3 \end{array} \neq 0$$

$p = 1,\ q = 0 \quad e_1 = (1, 0, -1, 0)$

$p = 0,\ q = 1 \quad e_2 = (0, 1, 0, 1)$

$w = \ell(e_1, e_2)$

e_1, e_2 - ФСР $\qquad V = W \oplus U$

$\left.\begin{array}{l}(0, 1, 0, -1) \\ (1, 0, 1, 0)\end{array}\right\} \in U$

Зад. 4.7. 51

$$w: \left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{array}\right.$$

$w = \ell(e_1)$

$e_1 = (1, \frac{1}{2}, -1, 2)$

$e = (2, 1, -2, 4)$

x_1	x_4	x_6	x_2	x_3	x_5	x_7
1	0	0				
0	1	0				
0	0	1				

$x_2 = x_5 = p$

зад. $w: \left| \; x_2 - x_5 = 0 \right.$ $\qquad$ $w: |$ хсл у $\Rightarrow w = l(a_1, a_2, \dots c_k)$, $c_1 \dots c_k$ - б.ю

(q, p, r, s, p)

$0, 1, 0, 0, 1$

$1, 0, 0, 0, 0$

$0, 0, 1, 0, 0$

$0, 0, 0, 1, 0$

4.8 зад. $w = l(a_1, a_2, a_3)$ $\qquad$ $w: |$ хсл у $\Leftarrow w = l(a_1 \dots a_l)$ $a_1 \dots a_l \to$ в-ри о w

$a_1 = (2, 1, -1, 3)$

$a_2 = (3, 1, 2, 1)$

$a_3 = (1, 1, -4, 5)$

$$\begin{array}{c}a_3\\a_2\\a_1\end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4, & +5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & +5 \\ 0 & -1 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 14 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & +5 \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 0 \end{array} \right.$ $\qquad x_1 = -7p + 7q + 4p - 5q = -3p + 2q$

$(-3p + 2q, 7p - 7q, \overset{x_3}{p}, \overset{x_4}{q})$

$d_1 = (-3, 7, 1, 0)$ $\to$ б. на U $\to$ $\left| \begin{array}{l} -3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right| w:$

$d_2 = (2, -7, 0, 1)$

2/ $a_1 = (1, 1, -2, 2)$

$a_2 = (2, 1, 3, -2)$

$a_3 = (3, 4, 5, 6)$

$a_4 = (3, 6, 9, 12)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}\begin{array}{c}-2\\ \\-3\\-3\end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$w = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$

$V = w \oplus \{0\}$

? $w: |$ хсл у ?

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$w: | \; 7x_1 - 11x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$

$V;\ U, W \leq V$

? $U+W$ $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

? $U\cap W$

U: $l(a_1 \dots)$ или с-ма 1) $U:(2)^4$, $W=l(b_1\dots b_k)^3$

W: $l(b_1 \dots)$ или с-ма 2) б. на $U+W$ е една МЛНЗП от $l(a_1 \dots a_s, b_1 \dots b_k)$

$V=5$

3/ б. на $U\cap W$ е една ФСР на $\left|\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right.$ (1)

15.12.03г.

Лекция

Хомогенни с-ми

$(3)\left|\begin{array}{l}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n=0\\ \dots\\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\dots+\alpha_{mn}x_n=0\end{array}\right.$ $A:=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \dots & & \dots\\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}$;

$r(A)=r$ $(r \leq m,n)$

1) хом. с-ма винаги е съвместима (има поне 1 реш.)

$x_1=x_2=\dots=x_n=0$ е реш.

2) Ако $n>m$, то хом. с-ма има безброй много реш. $\Rightarrow$ има и ненулево решение:

д-во: $r\leq m$ и $m<n \Rightarrow r<n$. Тогава (3) има ∞^{n-r} и $\Rightarrow$ има ненул. р.

3) Нека $m=n$. Тогава с-мата (3) има ненулево реш. $\Leftrightarrow \det A=0$:

Ако $\det A\neq 0$, то от Крамер $\Rightarrow$ (3) има единствено реш. и то е нулево

Ако $\det A=0$, то $r(A)<n$, т.е. $r<n$ и (3) има ∞^{n-r} реш., сл. има ненулево реш.

Решенията на (3) зап. $x=(x_1, x_2, x_n)\in F^n$; нека U е множеството от всички решения на (3); $U\subseteq F^n$

4) U е подпространство на F^n

5) $\dim U=n-r$: всички реш. са $x=(x_1 \dots x_r, x_{r+1}, \dots x_n)$, където $x_{r+1}\dots x_n\in F$ са произволни числа.

$\forall k = 1, \dots r$, $x_k = \mu_k + \lambda_{k1} x_{r+1} + \lambda_{k2} x_{r+2} + \dots + \lambda_{k,n-r}\, x_n$

($\lambda_{ij} \in F$, $\mu_k = 0\ \forall k$, понеже $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$)

$x_{r+1} = 1$, $x_{r+2}, \dots, x_n = 0$: $x_k = \lambda_{k1}$ за $k = 1, \dots, r$ т.е. получаваме реш. $c_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{r1}, 1, 0, \dots, 0)$

$x_{r+2} = 1$, $x_{r+1} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0$: $x_k = \lambda_{k2}$ за $k = 1, 2, \dots r$ и получаваме реш. $c_2 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots \lambda_{r2}; 0, 1, \dots 0)$

$x_n = 1$ $x_{r+1}, \dots = x_{n-1} = 0$: $x_k = \lambda_{k,n-r}$ за $k = 1, 2, \dots r$ и получ. реш. $c_{n-r} = (\lambda_{1,n-r}, \lambda_{2,n-r}, \dots, \lambda_{r,n-r}, 0, 0 \dots 1)$

Разгл. $C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{r1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{r2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n-r} & \lambda_{2n-r} & \dots & \lambda_{r,n-r} & 0 & & \dots & 1 \end{array}\right)$, $C_{(n-r)\times n}$, $r(C) \leq n-r$, но C има минор от ред $n-r$, различен от 0.

Сл. $r(C) = n-r$ Но от $N=1$ $r(C) = r(c_1, c_2, \dots c_{n-r})$ и сл. $c_1, c_2, \dots c_{n-r}$ са ЛНЗ.

Нека $x \in U$, $x = (x_1, \dots x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$. Разгл. $x_{r+1}c_1 + x_{r+2}c_2 + \dots + x_n c_r$ Това също е реш., т.е. $\in U$ (понеже $U \in F^n$). $x_{n+1}c_1 + x_{n+2}c_2 + \dots + x_n c_n$ $= (\underbrace{*, \dots *}_{r}, x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ Така това реш. и реш. x имат равни опашки. Сл. $x_{r+1}c_1 + x_{r+2}c_2 + \dots + x_n c_{n-r} = x$. Сл. $U = \ell(c_1, c_2, c$

Така $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ е базис на U. Сл. $\dim U = n-r$

Деф. Всеки базис на U се нарича фундаментална с-ма решения на (3). (ФСР). Напр. $c_1, c_2, \dots c_{n-r}$ е ФСР на (3).

б) Всяко реш. x на с-мата (1) има вида $x = x^0 + v_1c_1 + v_2c_2 + \dots + v_{n-r}c$ където x^0 е едно реш. на (1), а c_1, c_2 c_{n-r} е ФСР на (3).

$x - x^0$ е реш на (3) и сл. $x - x^0 = v_1c_1 + \dots + v_{n-r}c_{n-r}$, $v_i \in F$)

Линейни изображения

M и M' - произволни множества. Изображение φ от M в M': $\forall$ елемент $x \in M$ е съпоставен единствен ел. от $\varphi(x) \in M'$

Ако $\varphi: M \to M'$ и $\psi: M \to M'$, то $\varphi = \psi$ ако $\varphi(x) = \psi(x)$ $\forall x \in V$.

$\varphi: M \to M'$. φ е биективно изобр. (биекция) на M в/у M' за $\forall$ ел. $x' \in M$

$\exists\ x \in M$, такъв че $\varphi(x) = x$ и ако $x, y \in M$ и $x \neq y$, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ т.е. $\forall$ ел. $x' \in M'$ $\exists!$ ел. $x \in M$, такъв че $\varphi(x) = x'$. Тогава деф. изображ. $\varphi^{-1}: M' \to M$ чрез $\varphi^{-1}(x') = x$ $\forall x' \in M'$.

φ^{-1} също е биекция на M' в/у M (M и M': равномощни множества)

Нека V и V' са две лин. простр. над едно и също поле F. Нека φ е изобр. от $V \to V'$: φ е лин. изображ. ако за $\forall$ два в-ра $x, y \in V \Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\forall x \in V, \forall \lambda \in F \to \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ (еквивалентно: $\forall x, y \in V$ и $\forall\ \lambda, \mu \in F \Rightarrow \varphi(\lambda x + \mu y) \Rightarrow \varphi(x) + \mu\varphi(y)$.

φ: хомоморфизъм и $Hom(V, V')$: множеството на всевъзможните лин. изобр. от V във V'. (Може $V' = V$; вместо лин. изобр φ: φ е линеен оператор на V; $Hom(V)$ вместо $Hom(V,V)$ - множ. лин. оператори на V)

<u>Примери:</u>

1) $O: V \to V'$ такова, че $O(x) = O'$ (нулевият в-р на V', $\forall x \in V$). O е лин. изображ.

2) Нека $V' = V$. $\mathcal{E}: V \to V$, такова, че $\mathcal{E}(x) = x$ $\forall$ в-р $x \in V$. $\mathcal{E}$ е лин. оператор на V (идентитет - id)

С-ва на лин. изображ: $\varphi: V \to V'$

① $\varphi(O) = O'$ (д-во: $\varphi(O) = \varphi(0\,O) = 0.\varphi(O) = O'$)

② $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ за $\forall x \in V$ (д-во: $\varphi(-x) = \varphi((-1)x) = (-1)\varphi(x) = -\varphi(x)$)

Също $\varphi(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y)$ $\forall$ $x, y \in V$

③ Ако $a_1, \dots a_k \in V$ са ЛЗ с-ма, то $\varphi(a_1) \dots \varphi(a_k) \in V'$ също са ЛЗ с-ма (д-во: нека $\exists\ \lambda_1, \dots \lambda_k \in F$, не всички $\lambda_i = 0$, такива, че $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = O$. $\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \varphi(O) = O'$, $\lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k) = = O'$ и сл. $\varphi(a_1) \dots \varphi(a_k)$ е ЛЗ с-ма)

<u>Твърдение 1:</u> (V и V' са лин. простр. над F) Нека $\dim V = n$ $(< \infty)$ За всеки базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ на V и за произволни в-ри $v_1', v_2', \dots v_n'$ от V' съществува единствено лин. изображ. $\varphi: V \to V'$, такова, че $\varphi(e_i) = v_i'$ за $\forall$ $i = 1, \dots n$

Д-во: $\boxed{\exists}$! Нека $x \in V$, $\exists!$ n-орка числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in F$, такава, че $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$. Деф. изображение $\varphi : V \to V'$ чрез
$\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \dots + \lambda_n v_n'$
$\varphi : V \to V'$ – φ е коректно деф. Очевидно $\varphi(e_i) = v_i'$ за $\forall i = 1, \dots, n$
φ е лин. изображ: $x, y \in V$ и $\lambda, \mu \in F$; $x = \lambda_1 e_1 \dots \lambda_n e_n$; $y = \mu_1 e_1 \dots \mu_n e$
$\varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi[(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)e_1 + \dots + (\lambda\lambda_n + \mu\mu_n)e_n)] \overset{\text{деф на } \varphi}{=} (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)v_1' + \dots$
$+ (\lambda\lambda_n + \mu\mu_n)v_n' = \lambda(\lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n') + \mu(\mu_1 v_1' + \dots + \mu_n v_n') =$
$= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$, т.е. $\varphi(\lambda x + \mu y) = x\varphi(x) + \mu\varphi(y)$ и φ е лин изобр.
$\boxed{!}$ Нека $\psi : V \to V'$ също е лин. изобр. и $\psi(e_i) = v_i'$ за $\forall i = 1, \dots, n$.
$x \in V$. $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$: $\psi(x) = \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_n e_n'$
$\psi(x) = \psi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 \psi(e_1) + \dots + \lambda_n \psi(e_n) = \lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n'$
Така $\psi(x) = \varphi(x)$ за $\forall x \in V \Rightarrow \psi = \varphi$. Така доказваме единствеността на φ.
$\varphi : V \to V'$

Озн. $V' \cong V$ (V' е изоморфно с V) Тогава $\varphi^{-1} : V' \to V$ също е биекция на V' в/у V. φ^{-1} също е лин. изобр. $\Rightarrow$ φ^{-1} е изоморфизъм на V' в/у V. (V е изоморфно ~~с~~ на V) V и V' са изоморфни лин. простр. (Често отъждествяваме V и V')
Твърдение 2: Нека изобр. $\varphi : V \to V'$ е изоморфизъм. Ако $a_1, \dots a$ $\in V$ е лин. независима с-ма в-ри, то образите им $\varphi(a_1) \dots \varphi(a_k)$ също е ЛНЗ с-ма.
Д-во: Доп., че $\lambda_1 \dots \lambda_k \in F$ са такива, че $\lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k) = 0'$
$\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots \lambda_k a_k) = 0'$. Но $\varphi(0) = 0'$. φ е биекция на V в/у V' и сл. $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$. Но $a_1 \dots a_k$ са ЛНЗ и сл. $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.
Така $\varphi(a_1) \dots \varphi(a_k)$ са ЛНЗ.
Теорема: Нека V и V' са крайномерни лин. простр. над едно и също поле F.
$V = V' \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$
Следствие: Нека $n \in \mathbb{N}$ (F^n е n-мерно лин. простр. на същото поле F)

T ⇒ всяко n-мерно лин. простр. на F е изоморфно (≅) с F^n?
Или (с точност до изоморфизъм) F^n е единственото n-мерно простр. над полето F.

Д-во на Т: φ е изоморф. от V във V'

⇒) Нека $V \cong V'$ и $\dim V = n$, $\dim V' = n'$. Базис $e_1, \dots, e_n$ на V.
Тв 2 ⇒ $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n) \in V'$ са ЛНЗ. Тогава $\dim V' \geq n$, т.е. $n' \geq n$.
Нека $e_1' \dots e_n'$ е базис на V'. Тв 2 ⇒ $\varphi^{-1}(e_1') \dots \varphi^{-1}(e_n') \in V$ са ЛНЗ
Сл. $\dim V \geq n'$, т.е. $n \geq n'$. Така $n = n'$, т.е. $\dim V = \dim V'$

⇐) Нека $\dim V = \dim V' = n$. Базиси $e_1, \dots e_n$ на V и $e_1' \dots e_n'$ на V'
Тв 1 ⇒ ∃! лин. изображ. $\varphi : V \to V'$, такова, че $\varphi(e_i) = e_i'$ за $\forall i = 1, \dots n$
$\varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_n e_n'$. φ е биекция на V в/у V':
нека x' е произволен в-р от V'. $x = \alpha_1 e_1' + \dots + \alpha_n e_n'$ $(\alpha_i \in F)$
Разглеждаме в-ра $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V$. Имаме $\varphi(x) = \varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$
$= \alpha_1 e_1' + \dots + \alpha_n e_n' = x'$. Така за ∀ в-р x' от V' ∃ в-р x от V, такъв, че
$\varphi(x) = x'$. Нека $x, y \in V$ и $x \neq y$. $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$; $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$
⇒ $\lambda_i \neq \mu_i$ за поне едно i м/у 1 и n. ⇒ $\varphi(x) = \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_n e_n'$,
$\varphi(y) = \mu_1 e_1' + \dots + \mu_n e_n'$ и ($\lambda_i \neq \mu_i$ за поне едно i) ⇒ $\varphi(x) \neq \varphi(y)$
Така $\forall x, y \in V$, $x \neq y$ е в сила $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Сл. φ е изоморфизъм
на V в/у V', т.е. $V \cong V'$.

16.12.08 г.

? Ц Упражнение

4.8 зад.

г/ $W = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$
$a_1 = (1, 1, -2, 2)$
$a_2 = (2, 1, 3, -2)$
$a_3 = (3, 4, 5, 6)$
$a_4 = (3, 6, 9, 12)$
? W : ХСЛУ

Реш:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$W \oplus U = V$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U: \left| \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

слагаме.

$x_3 = 1 \Rightarrow x_4 = 3,\ x_2 = -11,\ x_1 = +7 \quad \Rightarrow c_1 = (7, -11, 1, 3)$

$W: \left| 7x_1 - 11x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \right.$

Зад.

$V = F^n$

$U = \ell(a_1, a_2, \dots, a_k)$

$W: \left| (1) \right.$

? базис на $U + W$

? базис на $U \cap W$

Алгоритъм:

1) $U = \ell(a_1, a_2, \dots, a_k) \Leftrightarrow U: \left| (2) \right.$

$W: \left| (1) \right. \Leftrightarrow W = \ell(b_1, \dots b_s)$

2) базис на $U + W$ (като лин. обвивки)

базис е една МЛНЗП в-ри измежду в-рите $\{a_1, \dots a_k, b_1, \dots, b_s\}$

3) базис на $U \cap W$ (като с-ми)

базис е ФСР на $\left| \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \right.$

4) проверка: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

4.9б)

$V = F^4$

$U = \ell(a_1, a_2, a_3) \underset{\dim U = 3}{\Leftrightarrow} U: \left| \right.$

$a_1 = (1, 2, 1, 2)$

$a_2 = (2, 1, 2, 1)$

$a_3 = (1, 2, 3, 4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$W: \left| \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{matrix} \right.$

пол. $x_4 = 1,\ x_3 = -1,\ x_2 = -1,\ x_1 = 1$

$\Rightarrow (1, -1, -1, 1)$

$\Rightarrow U: \left| x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right.$

? б. на $U + W$

? б на $U \cap W$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

пол. $x_4 = p$

$\Rightarrow x_2 = -p$

$x_3 = q$

$x_4 = -q$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0, -1, 0, 1 \\ -1, 0, 1, 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \underset{\dim W = 2}{\Leftrightarrow} W = \ell\begin{pmatrix} d_1 = (0, -1, 0, 1) \\ d_2 = (-1, 0, 1, 0) \end{pmatrix}$

базис на $U + W$ е една МЛНЗП изм/у с-мата

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1, a_2, a_3, d_1$$

$\dim(U + W) = 4$

б. на $U \cap W$ е ФСР на:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

пол. $x_1 = 1 \Rightarrow x_4 = -1,\ x_3 = -1,\ x_2 = 1$

$\Rightarrow c_1 = (1, 1, -1, -1)$

$\Rightarrow \dim U \cap W = 1$

пров. $3 + 2 - 1 = 4$

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Зад.

$V = F^5$

Реш:

$U = \ell(a_1, a_2, a_3) \underset{\dim U = 3}{\longleftrightarrow} U: |$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ (-1) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$a_1 = (1, 2, 0, 1, 2)$

$a_2 = (0, 2, 2, 1, -1)$

$a_3 = (1, 0, 4, 0, 1)$

$W = \ell(b_1, b_2, b_3)$

$U: \left| \begin{array}{l} 7x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{array} \right.$

$b_1 = (1, 2, -2, 4, 3)$

$b_2 = (0, 2, -3, 4, 1)$

$b_3 = (-1, -2, 0, -1, -2) = -a_1$

? б на $U + W$

? б. на $U \cap W$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$W: \left| \begin{array}{l} -10x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_5 = 0 \\ 12x_1 - x_2 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{array} \right.$$

$\dim W = 3$

$\underline{\dim U + W = 4}$

б. на $U + W$ е напр. $a_1, a_2, a_3, b_1 \to 4$ мерно

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & & & & \\ - & & & & \\ - & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

б. на $U \cap W$

$$\left| \begin{array}{l} 7x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ -10x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_5 = 0 \\ 12x_1 - x_2 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ -10 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 12 & -1 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -10 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 12 & -1 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$c_1 = (0, -2, 1, -1, 0)$

$c_2 = (1, 0, 1, 0, 2)$

4.10. $A, B \in F_{m\times n}$

$C = A+B$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$r(C) \le r(A) + r(B)$

4.11 зад. $A, T \in F_{n\times n}$

T-обратима $\det T \neq 0 \Rightarrow r(T) = n$

$r(AT) = r(TA) = r(A) = r \le n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4.12. Неравенство на Силвестор

$A, B \in F_{n\times n}$

$r(A)+r(B)-n \le r(A.B) \le \min\{r(A), r(B)\}$

4.16. $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$A^* = (A_{ij})$ - адюнгираната на A матр.

$r = r(A)$

$r^* = r(A^*)$

а/ $0 \le r \le n-2 \Rightarrow r^* = 0$

$A^* = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

б/ $r = n-1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r^* = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & \ddots & a_{kk} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$

$A^* = \underset{\overset{\neq}{0}}{\det A} \left(A^{-1}\right)^t$

$r^* = n$

Линейни изображения. Линейни операции

$\varphi: V_1 \to V_2$

V_1, V_2 - лин. права над F

$a \to \varphi(a)$ е лин. изобр.

$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$

$\forall a, b \in V_1$, $\forall \lambda \in F$

$\varphi: V \to V$

$a \to \varphi(a)$ | φ - лин оператор $\Rightarrow \varphi \in \mathrm{Hom} V$

$\varphi \to$ лин.

$\varphi(0) = 0$

$\varphi(-a) = -\varphi(a)$

$\varphi, \psi \in \mathrm{Hom} V$, $a \in V$, $\lambda \in F$

$(\varphi + \psi)(a) := \varphi(a) + \psi(a)$

$(\lambda\varphi)(a) := \lambda\varphi(a)$

$\mathrm{Hom} V$

$\dim V = n \Rightarrow \dim \mathrm{Hom} V = n^2$

$\{a_i\}_1^k$ са ЛЗ в $V \underset{\varphi \in \mathrm{Hom} V}{\Rightarrow} \{\varphi(a_i)\}_1^k$ са ЛЗ в V

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$, $\lambda_1 \neq 0$

$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k) = \varphi(0)$

$\lambda_1 \varphi(a_1) + \lambda_2 \varphi(a_2) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k) = 0$

$\lambda_1 \neq 0$

$\Downarrow \{\varphi(a_i)\}_1^k$ са ЛЗ

$$\begin{matrix} id \\ \mathcal{E} \end{matrix}\begin{cases} V \to V \\ v \to \varphi(v) = v \end{cases}$$

$CA = AC$ $\Leftrightarrow$ $C = \lambda E$

$\forall A \in M_n(F)$ $\quad \lambda \in F$

$\varphi \psi = \psi \varphi$ $\Leftrightarrow$ $\varphi = \lambda \mathcal{E}$

$\forall \psi \in \operatorname{Hom} V$

Зад. $\varphi : \begin{cases} V \to V \\ x \to x + a = \varphi(x) \end{cases}$

a - фикс, $\neq 0$ в-р от V

$\to \varphi(x+y) = (x+y) + a$ $\shortparallel$ $\Rightarrow \varphi$ не е лин. изобр.

$\varphi(x) + \varphi(y) = (x+a) + (y+a)$

1) $\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_3 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_1 e_3$

2) $\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = (\lambda_2 + \lambda_3 - 1) e_1 + \lambda_3 e_2 + \lambda_1 e_3$

1) $\left.\begin{matrix} \varphi(e_1) = e_3 \\ \varphi(e_2) = e_2 \\ \varphi(e_3) = e_1 \end{matrix}\right\}$ $\lambda_1 \varphi(e_1) + \lambda_2 \varphi(e_2) + \lambda_3 \varphi(e_3) = \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_1 \Rightarrow \varphi$ е лин. оп.

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

2) $\left.\begin{matrix} \varphi(e_1) = -e_1 + e_3 \\ \varphi(e_2) = 0 \\ \varphi(e_3) = e_2 \end{matrix}\right\}$ $\lambda_1 \varphi(e_1) + \lambda_2 \varphi(e_2) + \lambda_3 \varphi(e_3)$

Зад. $\varphi : \begin{cases} F^{n+1}[x] \to F^{n+1}[x] \\ f(x) \to \mathcal{D}(f(x)) = f'(x) \end{cases}$

? лин. оп-р на диференциране

$\mathcal{D}(f(x) + g(x)) = \mathcal{D}(f(x)) + \mathcal{D}(g(x))$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$\mathcal{D}(\lambda f(x)) = (\lambda f(x))' = \lambda f'(x) = \lambda \mathcal{D}(f(x))$

22.12.08.

Лекция

12. Действия с линейни оператори. (Използване №11 при $V'=V$; $\varphi: V\to V$ - лин. изобр. $\equiv$ лин. оператор)

V-лин. оператор над F, $\dim V = n$ ($n\in\mathbb{N}$): Hom(V)
базис на V: $e_1, e_2, \dots, e_n$ $\varphi \in Hom(V)$. $\forall x\in V$ $\exists!\, x=\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n$ и
$\varphi(x)=\lambda_1\varphi(e_1)+\dots+\lambda_n\varphi(e_n)$. φ се определя от в-рите $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$
(сл., ако $\psi\in Hom(V)$ и $\psi(e_j)$ $\forall j=1,\dots,n$, то $\psi(x)=\varphi(x)$ $\forall x\in V$, т.е. $\varphi=\psi$)
$\forall j=1,2,\dots,n$ $\varphi(e_j)=\alpha_{1j}e_1+\alpha_{2j}e_2+\dots+\alpha_{nj}e_n$ ($\alpha_{ij}\in F$). Сл. φ се определ
еднозначно от n^2 числа α_{ij}, $i,j=1,\dots,n$.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

, $A\in F_{n\times n}$; координатите на $\varphi(e_j)$ са в j-тия стълб на матрицата A. Така φ се определя еднозначно от A. A: матрица на лин. оператор φ спрямо базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$\theta: V\to V$ е $\theta(x)=o$ $\forall x\in V$. θ има спрямо кой да е базис матрица O ($\in F_{n\times n}$)

$\varepsilon: V\to V$ $\varepsilon(x)=x$ $\forall x\in V$. Нека $e_1, e_2, \dots e_n$ е произволен базис на V. Тогава $\varepsilon(e_j)=e_j=0.e_1+\dots+1e_j+\dots+0e_n$. Матрицата на ε е =

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=E\ (\in F_{n\times n})$$

$\varphi,\psi\in Hom(V)$. Деф. изображение $\varphi+\psi: V\to V$ чрез $(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi($
$\forall x\in V$. $\varphi\in Hom(V)$ и $\lambda\in F$. Деф. изображение $\lambda\varphi: V\to V$ чрез
$(\lambda\varphi)(x)=\lambda\varphi(x)$, $\forall x\in V$. $\varphi+\psi$ и $\lambda\varphi$ също са лин. оператори на V,
т.е. $\varphi+\psi$, $\lambda\varphi\in Hom(V)$: проверка за $\varphi+\psi$: Нека $x,y\in V$ и $\lambda,\mu\in F$.
$(\varphi+\psi)(\lambda x+\mu y)=\varphi(\lambda x+\mu y)+\psi(\lambda x+\mu y)=\lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y)+\lambda\psi(x)+\mu\psi($
$=\lambda(\varphi(x)+\psi(x))+\mu(\varphi(y)+\psi(y))=\lambda[(\varphi+\psi)(x)]+\mu[(\varphi+\psi)(y)]$ и сл. $\varphi+\psi$ е лин. оператор на пространството V.

В Hom(V) въведохме две операции: $\varphi+\psi$ и $\lambda\varphi$ ($\varphi,\psi\in Hom(V)$, $\lambda\in F$).
Hom(V) става лин. пространство на F: Аксиомите 1)-8) за лин. простр. са изпълнени: напр: 1) $\varphi+\psi=\psi+\varphi$ $\forall\varphi,\psi\in Hom(V)$;…;3) θ играе ролята на нулев елемент - $\varphi+\theta=\varphi$ $\forall\varphi\in Hom(V)$. 4) за $\varphi\in Hom(V)$ противоположен елемент е $-\varphi: V\to V$, деф. чрез $(-\varphi)(x)=-\varphi(x)$, $\forall x\in V$.;…;8)-изпълнени

<u>**Твърдение 1:**</u> Нека (спрямо избрания базис) $\varphi\in Hom(V)$ има матрица A и $\psi\in Hom(V)$ има матрица B. Тогава $\varphi+\psi$ има матр. A+B и $\lambda\varphi$ има матр. λA ($\lambda\in F$).

Док. за $\varphi + \psi$: нека $A = (\alpha_{ij}) \in F_{n\times n}$ и $\beta = (\beta_{ij}) \in F_{n\times n}$. За $j = 1, 2, \dots, n$ имаме $(\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j) = (\alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \dots + \alpha_{nj}e_n) + (\beta_{1j}e_1 + \beta_{2j}e_2 + \dots + \beta_{nj}e_n) = (\alpha_{1j} + \beta_{1j})e_1 + (\alpha_{2j} + \beta_{2j})e_2 + \dots + (\alpha_{nj} + \beta_{nj})e_n$.

Сл. матрицата на $\varphi + \psi$ има елементи в j-тия си стълб $\alpha_{1j} + \beta_{1j}$, $\alpha_{2j} + \beta_{2j}, \dots, \alpha_{nj} + \beta_{nj}$, т.е. тази матрица е $A + B$.

F - поле, $n \in \mathbb{N}$. $F_{n\times n}$ е лин. простр. над F ($\dim F_{n\times n} = n^2$). Нека V е n-мерно лин. простр. над F. Тогава $Hom(V)$ също е лин. простр. над F.

Теорема: Линейните пространства $Hom(V)$ и $F_{n\times n}$ са изоморфни. ($Hom(V) \cong F_{n\times n}$).

Д-во: Базис на V: $e_1, \dots, e_n$. Всеки лин. оператор $\varphi \in Hom(V)$ има една единствена матрица $A \in F_{n\times n}$. Разгл. изображ. $f : Hom(V) \to F_{n\times n}$ дефинирано чрез $f(\varphi) = A$.

I. f е лин. изображ.: нека $\varphi, \psi \in Hom(V)$, $\lambda \in F$ и $f(\varphi) = A$, $f(\psi) = B$. ($A, B \in F_{n\times n}$) Тв. 1 означава, че $f(\varphi + \psi) = f(\varphi) + f(\psi)$ и $f(\lambda\varphi) = \lambda f(\varphi)$

II. f е биекция на $Hom(V)$ в/у $F_{n\times n}$: 1) Нека $A \in F_{n\times n}$, $A = (\alpha_{ij})$. Разгл. следните в-ри в простр. V: $v_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n$, $v_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n$; $v_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n$. Тв. 1 от №11 $\Rightarrow \exists!$ лин. изобр. $\varphi : V \to V$, такова, че $\varphi(e_i) = v_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ т.е. $\varphi \in Hom(V)$ и $\varphi(e_i) = v_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \dots + \alpha_{ni}e_n$ означава, че в този базис φ има матрица A, т.е. $f(\varphi) = A$. Така $\forall A \in F_{n\times n}$ $\exists$ оператор $\varphi \in Hom(V)$ със с-вото $f(\varphi) = A$. 2) Нека $\varphi, \psi \in Hom(V)$, $\varphi \neq \psi$. Нека $f(\varphi) = A$ и $f(\psi) = B$. $\varphi \neq \psi \Rightarrow$ за поне едно j, $1 \leq j \leq n$, е изпълнено $\varphi(e_j) \neq \psi(e_j)$. Това означава, че j-тите стълбове на A и B не съвпадат, сл. $A \neq B$. Така док., че от $\varphi \neq \psi \Rightarrow f(\varphi) \neq f(\psi)$

От I и II. $\Rightarrow f : Hom(V) \to f : F_{n\times n}$ е изоморфизъм, т.е. $Hom(V) \cong F_{n\times n}$

Нека $\varphi, \psi \in Hom(V)$. Деф. изображ. $\psi\varphi : V \to V$ чрез $(\psi\varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$ $\forall x \in V$. $\psi\varphi$ също е лин. изобр., т.е. $\psi\varphi \in Hom(V)$.

За $\varphi, \psi, \tau \in Hom(V)$ са в сила $(\tau\psi)\varphi = \tau(\psi\varphi)$ и $\tau(\psi + \varphi) = \tau\psi + \tau\varphi$ (проверка, а също следва и от Тв. 1 и Тв. 2) (В общия случай $\psi\varphi \neq \varphi\psi$)

Твърдение 2: Ако $\psi, \varphi \in Hom(V)$ и (спрямо даден базис на V) ψ има матрица A, φ има матр. B, то $\psi\varphi$ има матр. AB.

Д-во: нека $e_1, e_2, \dots e_n$ - базис на V; ψ има матр. $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$, φ има матр. $B=(\beta_{ij})_{n\times n}$. За $j=1,2,\dots n$ $(\psi\varphi)(e_j)=\psi(\varphi(e_j))=$
$=\psi(\beta_{1j}e_1+\beta_{2j}e_2+\dots+\beta_{nj}e_n)=\psi(\sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}e_k)=\sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}\,\psi(e_k)=$
$=\sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}(\alpha_{1k}e_1+\alpha_{2k}e_2+\dots+\alpha_{nk}e_n)=\sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}e_i)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj})e_i$
Сл. операторът $\psi\varphi$ има матр., в която (i,j)-ият елемент е $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}$ а тази матр. е AB. Сл. операторът $\psi\varphi$ има матр. AB.

13. Ранг и дефект на линеен оператор

V - лин. простр. над F и $\varphi \in Hom(V)$

Озн. $Im\varphi=\{\varphi(x) \mid x\in V\}$ $(\subseteq V, \theta\in Im\varphi: \varphi(\theta)=\theta)$. $Im\varphi$ е подпространство на V. $Im\varphi$: образ на φ (Image). Означ. $Ker\varphi=$ $=\{x\in V \mid \varphi(x)=\theta\}$ $(\subseteq V, \theta\in Ker\varphi: \varphi(\theta)=\theta)$ $Ker\varphi$ е подпространство на простр. V: нека $x,y\in Ker\varphi$ и $\lambda,\mu\in F$. $\varphi(\lambda x+\mu y)=\lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y)=$ $=\lambda\cdot\theta+\mu\theta=\theta$ и сл. $\lambda x+\mu y\in Ker\varphi$. $Ker\varphi$: ядро на оператора φ (Kernel
Числото $\dim Im\varphi$ се нарича ранг на оператора φ и се означава $r(\varphi$
числото $\dim Ker\varphi$ се нарича дефект на φ и се означ. с $d(\varphi)$.
(За $\varphi=\theta$: $Im\varphi=\{\theta\}$ и $Ker\varphi=V$; $r(\varphi)=\dim Im\varphi=0$ и $d(\varphi)=\dim Ke$ $=\dim V$). (За $\varphi=\varepsilon$: $Im\varphi=V$ и $Ker(\varphi)=\{\theta\}$; $r(\varphi)=\dim Im\varphi=\dim V$ и $d(\varphi)=\dim Ker\varphi=0$) $\dim V=n$ $(n\in\mathbb{N})$; сл. $0\leq r(\varphi)\leq n$ и $0\leq d(\varphi)\leq n$

Твърдение 1: Нека A е матр. на φ спрямо произволен базис на V. Тогава $r(\varphi)=r(A)$.

Следствие от Тв 1: Ако A и B са матрици на φ спрямо два базиса на простр. V, то $r(A)=r(B)$ (понеже $r(A)=r(\varphi)$ и $r(B)=r(\varphi)$)

Д-во на Тв. 1: нека $e_1,\dots,e_n$ е базис на V. $\forall$ в-р $y\in Im\varphi$ имаме $y=\varphi(x)$ за някой в-р $x\in V$; $x=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n$ $(\lambda_i\in F)$, $y=\varphi(x)=$ $=\lambda_1\varphi(e_1)+\dots+\lambda_n\varphi(e_n)$. Сл. $Im\varphi=l(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$. Тогава: $r(\varphi)\overset{def}{=}\dim$ $=\dim l(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))\overset{\text{№3}}{=}r(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))\overset{\text{№3}}{=}$ ранга на матрицата със стълбове координатите на в-рите $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$ = ранга на матр. к

$\varphi = r(A)$. Така $r(\varphi) = r(A)$.

Теорема 1 (за ранга и дефекта): В сила е $r(\varphi)+d(\varphi)=\dim V$.

Д-во: Нека $\dim V = n$, $r(\varphi) = r$, $d(\varphi) = d$. Нека $a_1,\dots,a_d$ - базис на $\ker\varphi$ (ако $d>0$) № 7 ⇒ допълваме в-рите $a_1,\dots,a_d$ до базис на V: $a_1,\dots,a_d; a_{d+1},\dots,a_n$ (ако $d<n$). Разгл. в-рите: ⊛ $\varphi(a_{d+1}),\dots,\varphi(a_n)$. Очевидно в-рите ⊛ $\in \operatorname{Im}\varphi$. Ще док. че ⊛ е базис на $\operatorname{Im}\varphi$. Тогава: $r(\varphi)=\dim \operatorname{Im}\varphi = n-d = \dim V - d(\varphi)$ и сл. $r(\varphi)+d(\varphi)=\dim V$

Д-во на [illegible]:

I $\operatorname{Im}\varphi = \ell((*))$: $y\in \operatorname{Im}\varphi$, $y=\varphi(x)$ за някой в-р $x\in V$; $x=\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_d a_d + \lambda_{d+1}a_{d+1}+\dots+\lambda_n a_n$; $y=\varphi(x)=\underbrace{\lambda_1\varphi(a_1)}_{=\theta}+\dots+\lambda_d\underbrace{\varphi(a_d)}_{=\theta}+\lambda_{d+1}\varphi(a_{d+1})+\dots+\lambda_n\varphi(a_n) = \lambda\varphi(a_{d+1})+\dots+\lambda\varphi(a_n)$.

II. В-рите (*) са ЛНЗ: нека $\mu_{d+1}\varphi(a_{d+1})+\dots+\mu_n\varphi(a_n)=\theta$ (някакви числа $\mu_i\in F$). $\varphi(\mu_{d+1}a_{d+1}+\dots+\mu_n a_n)=\theta$, сл. $\mu_{d+1}a_{d+1}+\dots+\mu_n a_n\in \ker\varphi$; тогава $\exists\ \mu_{d+1}a_{d+1}+\dots+\mu_n a_n=\nu_1 a_1+\dots+\nu_d a_d$ (някакви числа $\nu_i\in F$). $-\nu_1\cancel{\varphi}(a_1)-\dots-\nu_d\cancel{\varphi}(a_d)+\mu_{d+1}a_{d+1}+\dots+\mu_n a_n=\theta$.

Но $a_1,\dots,a_d; a_{d+1},\dots,a_n$ са ЛНЗ и сл. $\nu_1,\dots\nu_d=0$, $\mu_{d+1},\dots\mu_n=0$

Сл. (*) е ЛНЗ с-ма

I и II ⇒ (*) е базис на подпростр. $\operatorname{Im}\varphi$.

5.01.09г.

Лекция

V, $n=\dim V$ $(1\leq n<\infty)$; $\varphi\in \operatorname{Hom}(V)$

φ е обратим оператор: $\exists\ \psi\in\operatorname{Hom}(V)$, такъв че $\varphi\psi=\psi\varphi=\mathcal{E}$.
Нека φ има матрица A спрямо базис на V, ψ - матрица B. № 12 ⇒ $\varphi\psi$ - матрица AB, $\mathcal{E}$ - матр. E. $\varphi\psi=\mathcal{E}$ ⇒ $AB=E$, сл. A е обратима $\in F_{n\times n}$ (⇔ $\det A\neq 0$) и $B=A^{-1}$, т.е. ψ има матр. A^{-1}. Сл. ψ е единствен, озн. $\psi=\varphi^{-1}$. Тогава φ е биекция на V в/у V, т.е. φ е изоморфизъм на V с V.

Теорема 2: Нека $\varphi\in\operatorname{Hom}(V)$. Следните условия са еквивалентни:
1) φ е обратим оператор;

2) Матрицата на φ спрямо произволен базис на V е неособена,

3) $\tau(\varphi) = \dim V$ (т.е. $\operatorname{Im}\varphi = V$);

4) $d(\varphi) = 0$ (т.е. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$);

5) φ изобразява (кой да е) базис на V в (друг) базис на V

Д-во: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1)

1) $\Rightarrow$ 2): доказано

2) $\Rightarrow$ 3): нека A е матр. на φ спрямо произволен базис на V и A е неособена: Тв 1 $\Rightarrow \tau(\varphi) = \tau(A)$. Но $\det A \neq 0$, т.е. $\tau(A) = n$, сл. $\tau(\varphi) = n = \dim V$.

3) $\Rightarrow$ 4): нека $\tau(\varphi) = \dim V$. Тогава (Т1: $\tau(\varphi) + d(\varphi) = \dim V$) и сл. $d(\varphi) = 0$

4) $\Rightarrow$ 5): нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V. Да допуснем, че $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, такива, че $\lambda_1\varphi(e_1) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n) = \theta$. $\varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \theta$, сл. $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, но $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$, сл. $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \theta$. Но $e_1, \dots, e_n$ са базис на V, сл. $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Така в-рите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ са ЛНЗ. и на брой $n = \dim V$, сл. $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ е базис на V.

5) $\Rightarrow$ 1): нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V и $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ също е базис на V. Озн. $f_i = \varphi(e_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. $N=11 \Rightarrow \exists(!)\, \psi \in \operatorname{Hom}(V)$, такъв че $\psi(f_i) = e_i$, $i = 1, 2, \dots n$: $\psi(\varphi(e_i)) = e_i$, $(\psi\varphi)(e_i) = e_i$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Сл. $(\psi\varphi)(x) = x$ $\forall x \in V$, т.е. $\psi\varphi = \mathcal{E}$. Аналогично $\varphi\psi = \mathcal{E}$. Така φ е обратим оператор (и $\psi = \varphi^{-1}$)

14. Смяна на базиса

V е n-мерно лин. пространство над F (τ-тау, η-ета, ζ-дзета, ξ-кси)

Нека (1) $e_1, e_2, \dots, e_n$ е базис на V, $x \in V$, $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$. в-рът $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, $\varphi(x) = \zeta_1 e_1 + \dots + \zeta_n e_n$. Нека φ има матрица $A = (\alpha_{ij}) \in F_{n \times n}$. $\varphi(x) = \varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1\varphi(e_1) + \xi_2\varphi(e_2) + \dots + \xi_n\varphi(e_n) = \xi_1(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n) + \xi_2(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) + \dots + \xi_n(\alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n) = (\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n)e_1 + (\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n)e_2 + \dots + (\alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n)e_n$.

$$\left|\begin{array}{l} \zeta_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \zeta_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n \\ \dots \\ \zeta_n = \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n \end{array}\right.$$

Озн. $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$ и $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$.

Умножаваме A с ξ ($A_{n\times n}$ и $\xi_{n\times 1}$) и получаваме матрица от тип $n\times 1$ (стълб) с елементи $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Сл. $A\xi = \zeta$

<u>Твърдение 1:</u> В сила е матричното равенство: $\zeta = A\xi$.

Нека (1) $e_1, \dots e_n$ и (2) $f_1, \dots f_n$ са два базиса на V. $\exists!$ n^2 числа $\tau_{ij} \in F$, такива че:

$$(3)\left|\begin{array}{l} f_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \dots + \tau_{n1}e_n \\ f_2 = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \dots + \tau_{n2}e_n \\ \dots \\ f_n = \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \dots + \tau_{nn}e_n \end{array}\right.$$

Озн. $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \in F_{n\times n}$ (Координатите на $f_1, f_2, \dots f_n$ спрямо (1) в стълбовете на T)

T: матрица на прехода от (1) към (2) ($e \to f$)

T е неособена матрица: ако $\det T = 0$, то $\exists$ лин. зависимост м/у стълбовете на T, т.е. лин. зависимост м/у в-рите $f_1, f_2, \dots f_n$ - противоречие (те са базис на пространството). Обратно: всяка неособена матр. $T \in F_{n\times n}$ е матр. на прехода от един базис на V към др. базис на V: нека $T = (\tau_{ij})_{n\times n}$ и $\det T \neq 0$. Вземаме базис (1) на V и от равенствата (3) получаваме в-ри $f_1, f_2, \dots f_n \in V$. Те са ЛНЗ - иначе стълбовете на T са ЛЗ и $\det T = 0$ - противоречие. Сл. в-рите $f_1, f_2, \dots f_n$ са базис на V. (3) $\Rightarrow$ матрицата на прехода от (1) към $f_1, f_2, \dots f_n$ е T.

N11 $\Rightarrow$ $\exists!$ лин. оператор τ на V, такъв че $\tau(e_j) = f_j$, $\forall j = 1, \dots, n$. $\tau(e_j) = \tau_{1j}e_1 + \tau_{2j}e_2 + \dots + \tau_{nj}e_n$, $\forall j = 1, \dots, n$., означава се матр. на τ спрямо (1) е T. τ е обратим оператор (понеже $\det T \neq 0$) и от $\tau(e_j) = f_j$ следва, че $\tau^{-1}(f_j) = e_j$, $\forall j = 1, \dots, n$.

$[\tau(f_j)=\tau(\tau_{1j}e_1+\dots+\tau_{nj}e_n)=\tau_{1j}.\tau(e_1)+\dots+\tau_{nj}\tau(e_n)$ или $\tau(f_j)=\tau_{1j}f_1+\tau_{2j}f_2+\dots+\tau_{nj}f_n$, $\forall j=1,\dots,n$. Сл. спрямо (2) τ има матрица T. Тогава спрямо (2) τ^{-1} има матр. T^{-1} и $\tau^{-1}(f_j)=e_j$, $\forall j=1,\dots,n$. Така матр. на прехода от (2) към (1) е обратната на матр. T, т.е. T^{-1}. (Т.е. ако $e\xrightarrow{T}f$, то $f\xrightarrow{T^{-1}}e$).

Нека $x\in V$ и $x=\xi_1e_1+\dots+\xi_ne_n$, $x=\eta_1f_1+\dots+\eta_nf_n$. Нека $e\xrightarrow{T}$

Озн. $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}_{n\times1}$ и $\eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}_{n\times1}$

Твърдение 2: В сила е матр. равенство $\xi=T\eta$. (еквивалентно $\eta=T^{-1}\xi$).

Д-во: $x=\xi_1e_1+\dots+\xi_ne_n$

$x=\eta_1f_1+\dots+\eta_nf_n=\eta_1(\tau_{11}e_1+\tau_{21}e_2+\dots+\tau_{n1}e_n)+\dots+\eta_n(\tau_{1n}e_1+\tau_{2n}e_2+\dots+\tau$

$=(\tau_{11}\eta_1+\dots+\tau_{1n}\eta_n)e_1+\dots+(\tau_{n1}\eta_1+\dots+\tau_{nn}\eta_n)e_n$. Следва, че:

$$\left|\begin{array}{l}\xi_1=\tau_{11}\eta_1+\tau_{12}\eta_2+\dots+\tau_{1n}\eta_n\\ \xi_2=\tau_{21}\eta_1+\tau_{22}\eta_2+\dots+\tau_{2n}\eta_n\\ \xi_n=\tau_{n1}\eta_1+\tau_{n2}\eta_2+\dots+\tau_{nn}\eta_n\end{array}\right.$$

Тези n числови равенства са равносилни с матричното равенство $\xi=T\eta$.

Твърдение 3: Нека $\varphi\in Hom(V)$ и φ има матрица A спрямо (1, и φ има матр. B спрямо базиса (2). Тогава $B=T^{-1}AT$ (тук $e\xrightarrow{T}f$).

Д-во: Нека $A=(\alpha_{ij})\in F_{n\times n}$, $B=(\beta_{ij})\in F_{n\times n}$. Нека τ е лин. оператор на V с $\tau(e_j)=f_j$, $j=1,2,\dots n$.

$\varphi(f_j)=\beta_{1j}f_1+\beta_{2j}f_2+\dots+\beta_{nj}f_n$; $\tau^{-1}[\varphi(f_j)]=\tau^{-1}[\beta_{1j}f_1+\beta_{2j}f_2+\dots+\beta_{nj}$

$(\tau^{-1}\varphi)(f_j)=\beta_{1j}\tau^{-1}(f_1)+\dots+\beta_{nj}\tau^{-1}(f_n)$. $(\tau^{-1}\varphi)(f_j)=\beta_{1j}e_1+\beta_{2j}e_2+\dots+\beta_{nj}e$

$(\tau^{-1}\varphi)(\tau(e_j))=\beta_{1j}e_1+\dots+\beta_{nj}e_n$, $(\tau^{-1}\varphi\tau)(e_j)=\beta_{1j}e_1+\beta_{2j}e_2+\dots+\beta_{nj}e_n$, $\forall j=1,\dots,n$. Това означава, че операторът $\tau^{-1}\varphi\tau$ спрямо (1, има матр. B. Но спрямо (1) операторите τ^{-1},φ,τ имат матрици

T^{-1}, A, T и №12 => спрямо (1) $T^{-1}\varphi T$ има матрица $T^{-1}AT$.

Сл. се $B = T^{-1}.A.T.$ | Нека $A, B \in F_{n\times n}$. B е подобна на A :
$\exists$ неособена матр. $T \in F_{n\times n}$, такава че $B = T^{-1}AT$ (означ. $B \sim A$)
Релацията $\sim$ в $F_{n\times n}$ е релация на еквивалентност, т.е.
1) $A \sim A$, $\forall A$; 2) $B\sim A \Rightarrow A \sim B$; 3) $B \sim A$, $C \sim B \Rightarrow C \sim A$

<u>Твърдение 4</u>: Нека A и B са подобни матрици. Тогава е в сила: 1) $\det A = \det B$ и 2) $r(A) = r(B)$.

<u>д-во:</u> Нека $B = T^{-1}AT$, $\det T \neq 0$ (неособена матр.).

1) $\det B = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1}.\det A.\det T = \dfrac{1}{\det T}\det A.\det T =$

$= \det A$, т.е. $\det B = \det A$.

2) Нека V е n-мерно лин. простр. над F и нека $e_1,\dots,e_n$ е базис на V (№12) $\exists!\ \varphi \in Hom(V)$, такъв че спрямо този базис φ има матр. A. T е неособена, сл. T е матр. на прехода от $e_1,\dots e_n$ към друг базис $f_1,\dots,f_n$ на простр. V. ТВ3 => спрямо $f_1,\dots f_n$ φ има матрица $T^{-1}AT$, т.е. матр. B. Така A и B са матр. на φ спрямо два базиса на V.

Следствие от №13 => $r(A) = r(B)$ $(= r(\varphi))$. Така $r(A) = r(B)$

15. Собствени в-ри и собствени стойности на линеен оператор

<u>Теорема</u> (от ВА, сп. семестър). Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ е полином ($a_i \in \mathbb{C}$), $a_0 \neq 0$, $n \geq 1$. Тогава $\exists$ числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$, такива че $f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ (т.е. $f(x)$ има n корена $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$)

(F-поле, $n \in \mathbb{N}$) Нека $A = (\alpha_{ij}) \in F_{n\times n}$. Разглеждаме $\det(A - xE)$, x - неизв. променлива. $\det(A - xE) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}$

$\det(A - xE)$ е полином на x, с коеф. от полето F от степен n: коефициентът пред

x^n е $(-1)^n$ (свободният член е $\det A$). Означаваме $\det(A-xE)$ с $f_A(x)$: характеристичен полином на A. $f_A(x)$ има n корени $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (те са в $\mathbb{C}$, може да няма корен в F). $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ - характеристични корени на матр. A.

Твърдение 1: Ако A и B са подобни матрици, то $f_A(x) = f_B(x)$

д-во: $B = T^{-1}AT$ (T-неособена матр. $\in F_{n\times n}$). $f_B(x) = \det(B-xE$ $= \det(T^{-1}AT - xE) = \det[T^{-1}(A-xE).T] = \cancel{\det T^{-1}}.\det(A-xE)\cancel{\det T} =$ $= \det(A-xE) = f_A(x)$

6.01.09г.

Упражнение

V - лин. пр-во над F

$\varphi - \in \mathrm{Hom} V$

$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\forall x, y \in V$

$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ $\forall \lambda \in F$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис на V

$$A_e = \left(\begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & & \end{array}\right)$$

$f_1, f_2 \dots f_n$ - др базис

$T_{e\to f}$

$B_f = T^{-1} A_e T = T^{-1}_{f\to e} A_e T_{e\to f}$

$\Updownarrow$

φ

x_e , $\varphi(x)|_e = A_e x_e$

x_f, $\varphi(x)|_f = B_f x_f$

$T_{e\to f} x_f = x_e$

$\{a_1, \dots a_n\}$ - базис на V, $\exists! \varphi \in \mathrm{Hom} V$: $\left| \varphi(a_i) = b_i \right.$ $i = \overline{1, n}$

ядро $\mathrm{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = \theta\} \leq V$, $\dim \mathrm{Ker}\varphi = d$ - дефект на φ

образ $\mathrm{Im}\varphi = \{w \in V \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\} \leq V$, $\dim \mathrm{Im}\varphi = r$ - ранг на φ

$\mathrm{Th}(r, d)$: $r + d = \dim V$

Зад. $V = F^{n+1}[x]$

$\mathcal{D} : \begin{cases} V \to V \\ f(x) \to \mathcal{D}(f(x)) = f'(x) \end{cases}$

$\mathcal{D} \in \mathrm{Hom} V$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ - базис

$\mathcal{D} \leftrightarrow A_{\{x\}}$

$\mathcal{D}(f(x)+g(x)) = (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) = \mathcal{D}(f(x)) + \mathcal{D}(g(x))$ $\Big\}\ \mathcal{D} \in \mathrm{Hom}\, V$

$\mathcal{D}(\lambda f(x)) = (\lambda f(x))' = \lambda f'(x) = \lambda \mathcal{D}(f(x))$

$\mathcal{D}(1) = 0 = (0, 0, \dots 0)$

$\mathcal{D}(x) = 1 = (1, 0, 0 \dots 0)$

$\mathcal{D}(x^2) = 2x = (0, 2, 0, \dots 0)$

$\mathcal{D}(x^n) = nx^{n-1} = (0, 0, 0, \dots n, 0)$

$$A_{\{x^n\}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(0) & \mathcal{D}(x) & \mathcal{D}(x^2) & \dots & \mathcal{D}(x^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{Ker}\, \mathcal{D} = \{f(x) \in V \mid \mathcal{D}(f) = f' = 0\} = \{f = const \in F\} =$
$= \langle 1 \rangle \quad d = 1$

$\mathrm{Im}\, \mathcal{D} = \{f(x) \in V \mid \exists h(x) : f'(x) = h(x)\}$

Зад.

$V = F_{2\times 2}$

$\varphi : \begin{cases} V \to V \\ A \to \varphi(A) = A + A^t \end{cases}$ $\qquad ?\ \mathrm{Ker}\, \varphi, \mathrm{Im}\, \varphi$

$\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$

$\varphi(A+B) = (A+B) + (A+B)^t = A + B + A^t + B^t = (A + A^t) + (B + B^t) = \varphi(A) + \varphi(B)$

$\varphi(\lambda A) = \lambda A + (\lambda A)^t = \lambda A + \lambda A^t = \lambda(A + A^t) = \lambda \varphi(A)$

$\varphi(E_{11}) = E_{11} + E_{11}^t = 2E_{11} = (2, 0, 0, 0)$

$\varphi(E_{12}) = E_{12} + E_{12}^t = E_{12} + E_{21} = (0, 1, 1, 0)$

$\varphi(E_{21}) = E_{21} + E_{21}^t = E_{21} + E_{12} = (0, 1, 1, 0)$

$\varphi(E_{22}) = E_{22} + E_{22}^t = 2E_{22}^t = (0, 0, 0, 2)$

$$A_{E_{ij}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{Ker}\, \varphi = \{A \in V \mid \varphi(A) = A + A^t = 0\} = T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ -a_{12} & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$A^t = -A$

$\mathrm{Im}\, \varphi = S$

5.11. e_1, e_2. - б. на V

$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) = \xi_1 e_1 + (-\xi_1 + 2\xi_2) e_2$

б. на V $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 \\ e_2' = -2e_1 - e_2 \end{cases}$ $T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $V_{e'} = 2e_1' + 3e_2'$

?, $A_{e'}, B_{e'}, \varphi(V)_{e'}, V_e, \varphi(V)_e$

$\varphi(e_1) = e_1 - e_2 \quad (\xi_1 = 1, \xi_2 = 0)$

$\varphi(e_2) = 2e_2 \quad (\xi_1 = 0, \xi_2 = 1)$

$\varphi \Leftrightarrow A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ //

$\varphi \Leftrightarrow B_{e'} = \underbrace{T^{-1}_{e' \to e} A_e}_{K} T_{e \to e'}$

$TX = E \to T^{-1}$

$T^{-1}A \qquad T^{-1}AT$

$T_{e' \to e} \mid T^{-1}_{e' \to e} A_e = K$

$A_e = T_{e \to e'} K \Rightarrow K = T^{-1}A$

$(T | A | V_e) \sim \dots \sim (E | K | \boxed{V_{e'}})$

$T_{e \to e'} V_{e'} = V_e$

$B_{e'} = K T_{e \to e'}$

$\varphi(V)_{e'} = B_{e'} V_{e'}$, $\varphi(V)_{e} = A_e V_e$

$T^{-1}_{e' \to e} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$B_{e'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\varphi(V)_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

5.12. e_1, e_2 - б. на V ? матр. на $\varphi\psi$ в $\{e_1, e_2\}$

$\varphi \in \operatorname{Hom} V \leftrightarrow A_a$, $\begin{cases} a_1 = -3e_1 + 7e_2 \\ a_2 = e_1 - 2e_2 \end{cases}$

$C = C_e = A_e B_e$

$A_a = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$\psi \in \operatorname{Hom} V \leftrightarrow B_b$, $\begin{cases} b_1 = 6e_1 - 7e_2 \\ b_2 = -5e_1 + 6e_2 \end{cases}$

$B_b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$T_{e\to a} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad U_{e\to b} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

$\varphi \Leftrightarrow A_e \Leftrightarrow A_a = T_{a\to e}^{-1} A_e T_{e\to a} \Leftrightarrow A_e = T_{e\to a} A_a T_{a\to e}^{-1}$

$\psi \Leftrightarrow B_a \Rightarrow B_e = U_{e\to b} B_b U_{b\to e}^{-1}$

$\varphi\psi \Leftrightarrow C_e = A_e B_e$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

$U^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6+3(-7), & 1(-5)+3\,6 \\ 2.6+7(-7), & 2(-5)+7.6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15, & 13 \\ -37, & -32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ & \ \\ \ & \ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$$

5.14з. e_1, e_2, e_3 б. на V

$\varphi \in \operatorname{Hom} V : \left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i \\ i = 1,2,3 \end{array} \right.$

$$\begin{array}{ll} a_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 & b_1 = 4e_1 + 2e_2 + 5e_3 \\ a_2 = 2e_1 + e_3 \quad \xrightarrow{\varphi} & b_2 = e_1 + e_2 \\ a_3 = e_1 + e_3 & b_3 = e_3 \end{array}$$

? $A_e \Leftrightarrow \varphi$

? $B_a \Leftrightarrow \varphi$

Хорема: Ако $\{a_1, a_2, a_3\}$ б. на $V \Rightarrow \exists!\, \varphi : \left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i \\ i = 1,2,3 \end{array} \right.$

$\{a_1, a_2, a_3\}$ - б. на $V \Leftrightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\dim V = 3$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(a_1) = \varphi(e_1 + 2e_2 + e_3) = \varphi(e_1) + 2\varphi(e_2) + \varphi(e_3) = b_1 = (4,2,5) \\ \varphi(a_2) = \varphi(2e_1 + e_3) = 2\varphi(e_1) + \qquad \varphi(e_3) = b_2 = (1,1,0) \\ \varphi(a_3) = \varphi(e_1 + e_3) = \varphi(e_1) + \qquad \varphi(e_3) = b_3 = (0,0,1) \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & (4,2,5) \\ 2 & 0 & 1 & (1,1,0) \\ 1 & 0 & 1 & (0,0,1) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 1 & (4,2,5) \\ 0 & -4 & -1 & (-7,-3,-10) \,/\, .(-1) \\ 0 & -2 & 0 & (-4,-2,-4) \,/\, :(-2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & (4,2,5) \\ 0 & 1 & 0 & (2,1,2) \\ 0 & 4 & 1 & (7,3,10) \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & (4,2,5) \\ 0 & 1 & 0 & (2,1,2) \\ 0 & 0 & 1 & (-1,-1,2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \overset{\varphi(e_1)}{(1,1,-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \overset{\varphi(e_2)}{(2,1,2)} \\ 0 & 0 & 1 & \overset{\varphi(e_3)}{(-1,-1,2)} \end{array}\right)$$

$$A_e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Зад. e_1, e_2, e_3 - б. на V

$\varphi \in \operatorname{Hom} V : \left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i \\ i = 1,2,3 \end{array} \right.$

$a_1 = e_1 + 2e_2 - 3e_3 \qquad b_1 = e_1 - 3e_2$

$a_2 = 3e_1 + 2e_2 - 4e_3 \xrightarrow{\varphi} b_2 = 10e_1 + 2e_2 + 7e_3$

$a_3 = 2e_1 - e_2 \qquad b_3 = 10e_1 + 7e_2 + 8e_3$

Хорем: Ако $\{a_1, a_2 a_3\}$ б. на $V \Rightarrow \exists!\ \varphi : \left| \begin{array}{l} \varphi(a_1) = b_i \\ i = 1,2,3 \end{array} \right.$

$\{a_1, a_2, a_3\}$ - б. на $V \Leftrightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$\left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i,\ i = 1,2,3 \\ \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & (1,-3,0) \\ 3 & 2 & -4 & (10,2,7) \\ 2 & -1 & 0 & (10,7,8) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|l} E & \varphi(e_1) = (6,4, \\ & \varphi(e_2) = (2,1, \\ & \varphi(e_3) = (3,3, \end{array}\right.$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & (1,-3,0) \\ 0 & -4 & 5 & (\qquad) \\ 0 & -5 & 0 & (\qquad) \end{array}\right)$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5.15. e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3 - б. на V

$f_1 = e_1 + e_2 + e_3$

$f_2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$

$f_3 = e_1 + 3e_2 + 4e_3$

$\varphi \in Hom\,V : \left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i \\ i = 1,2,3 \end{array} \right.$

$a_1 = e_1 - e_2 + e_3$ $\qquad b_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$

$a_2 = e_1 + 3e_3$ $\xrightarrow{\varphi}$ $b_2 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$

$a_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$ $\qquad b_3 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3$

$x = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$

$? B_f$

$$T_{e\to a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad U_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i \\ i = 1,2,3 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \\ \varphi(e_3) \end{array} \Rightarrow A_e$$

$$B_a = \underbrace{T^{-1} A_e}_{K} T \Rightarrow TK = A \Rightarrow K \Rightarrow B_a = KT$$

$(T|A|x_e) \sim$

$$B_f = \underbrace{U^{-1} A_e}_{P} U \Rightarrow UP = A \Rightarrow P \Rightarrow B_f = PU$$

$(U|A|x_2) \sim (E|P|x_f)$

$\varphi(x)_e, x_e$ $\qquad \varphi(x)_a = B_a x_a$

$\varphi(x)_a, x_a$ $\qquad \varphi(x)_f = B_f x_f$

$\varphi(x)_f, x_f$ $\qquad \varphi(x)_e = A_e x_e$

Зад. В тримерно лин. простр. V с б. $\{e_1, e_2, e_3\}$ е даден лин. оператор

$\varphi \in Hom\,V \left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i \\ i = 1,2,3 \end{array} \right. , x_e$

а) ? A_e, B_a, $\varphi(x)_e$, $\varphi(x)_a$

б) ? базис на $Ker\,\varphi$ и б. на $Im\,\varphi$

$a_1 = e_1$ $\qquad b_1 = e_1 + e_2 + 3e_3$ $\qquad x_e = 5e_1 - e_3$

$a_2 = e_1 + e_2 \xrightarrow{\varphi} b_2 = 4e_1 + 3e_2 + 10e_3$ $\qquad A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

$a_3 = e_1 + e_2 + e_3$ $\qquad b_3 = 8e_1 + 6e_2 + 20e_3$

а/ $\{a_1, a_2, a_3\}$ - б. на $V \iff \{a_1, a_2, a_3\}$ ЛНЗ $\iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists ! \varphi : \varphi(a_i) = b$

$i = 1, 2, 3$

$\varphi(a_i) = b_i$, $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1,1,3) \\ 1 & 1 & 0 & (4,3,10) \\ 1 & 1 & 1 & (8,6,20) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 100 & (1,1,3) \\ 010 & (3,2,7) \\ 001 & (4,3,10) \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \varphi(e \\ \to \varphi(e \\ \to \varphi(e \end{array}$

$i = 1, 2, 3$

$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi(x)_e = A_e x_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$T = T_{e \to a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_a = \underbrace{T^{-1} A_e}_{K} T$

K реш. на $TK = A_e$

X_a е реш. на $TX_a = X_e$ $\Big\} \Rightarrow (T | A_e | X_e)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & & A_e & & x_e \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 10 & -1 \end{array}\right) \sim \left(E \,\middle|\, \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -7 \\ 3 & 7 & 10 \end{array}}_{K} \,\middle|\, \underbrace{\begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ -1 \end{array}}_{x_a}\right)$

$B_a = KT$

$\varphi(x)_a = B_a X_a$

$\varphi \iff B_a = KT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & -14 \\ 3 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

$\varphi(x_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & -14 \\ 3 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

б/ $v \in \operatorname{Ker}\varphi : \varphi(v) = \theta \iff Av = \theta$

ХСЛУ $\Rightarrow$ ФСР - б. на $\operatorname{Ker}\varphi$

$\overset{A_e}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \to x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ \to x_2 + x_3 = 0 \end{array}$

$x_3 = d = 1$ парам

$\boxed{(-1, -1, 1)} = c_1 \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \ell(c_1)$, $d = 1$

$x_1 + 3(-1) + 4.1 = 0$

$x_1 - 3 + 4 = 0$ $\quad (x$

$x_2 + 1 = 0$

$\boxed{x_2 = -1}$

в/ б. на $\operatorname{Im}\varphi$ е една МЛНЗП от $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)\}$

$\begin{array}{c} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \\ \varphi(e_3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ б. на $\operatorname{Im}\varphi$ напр. е $\{\varphi(e_1), \varphi(e$

$r = 2$

дом:

$a_1 = e_1 + e_2 + e_3$ $\qquad b_1 = -e_1 - e_2 - 3e_3$ $\qquad$ уп. е като предната зад.

$a_2 = e_2 - e_3$ $\quad \xrightarrow{\varphi} \quad b_2 = -3e_1 + 3e_2 + 3e_3$

$a_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$ $\qquad b_3 = -3e_1 + e_2 - e_3$

$x\, e = e_1 + e_2 - e_3$

5.16з. e_1, e_2, e_3, e_4 - б. на V, $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

? б. на $\mathrm{Ker}\,\varphi$, ? б. на $\mathrm{Im}\,\varphi$

? б. на $\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi$

? d на $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi$

б. на $\mathrm{Ker}\,\varphi$ е ФСР на ХСЛУ: $Av = \theta$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & +1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_4 = p$

$x_3 = -p$

$x_2 = q$

$x_1 = -2q + 3p - 2p = -2q + p$

$(-2q + p, q, -p, p)$

$p = 1,\ q = 0 \Rightarrow c_1 = (1, 0, -1, 1)$

$p = 0,\ q = 1 \quad c_2 = (-2, 1, 0, 0)$

$\underline{\mathrm{Ker}\,\varphi} = l(c_1, c_2)$

$c_1 = (1, 0, -1, 1)$

$c_2 = (-2, 1, 0, 0)$

б. на $\mathrm{Im}\,\varphi$ е една МЛНЗП от $\{\varphi(e_i)\}_1^4$

$$\begin{array}{c} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \\ \varphi(e_3) \\ \varphi(e_4) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\mathrm{Im}\,\varphi} = l(\overset{d_1}{\varphi(e_1)}, \overset{d_2}{\varphi(e_3)})$

$d_1 = (-1, 0, 1, -1)$

$d_2 = (-3, 1, 2, -2)$

$\mathrm{Ker}\,\varphi : |(1)$

$\mathrm{Im}\,\varphi : |(2)$

$\ker\varphi$

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_1 = p} \quad \boxed{x_4 = q}$$

$x_2 = 2p \quad \underline{x_3 = p+q}$

$\boxed{p=1,\ q=0}\ (p,\ 2p,\ p+q,\ q$

$\boxed{p=0 \quad q=1}$

$(1, 2, 1, 0)$

$(0, 0, 1, 1)$

$\Rightarrow \ker\varphi : \left|(1)\right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow l(c_1, c_2)$

$\operatorname{Im}\varphi$

$$\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} x_1 = p & x_3 = p+q \\ x_4 = q & x_2 = 3p - 2p - 2q + 2q = p \end{array}$$

$\Rightarrow (1, 1, 1, 0)$

$(0, 0, 1, 1)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi : \left|(2)\right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \rightarrow l(d_1, d_2)$

б. на $\underline{\ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi}$ е една МЛНЗП от $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$ напр. е$\{c_1, c_2, d_2$

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\dim \ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi = 3$

$\dim \ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = 1$

б. на $\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ е ФСР на $\left| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right.$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} x_2 = 0 & x_1 = 1 \\ x_3 = -1 & \\ x_4 = 1 & \end{array}$$

б. на $\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ е $h = (1, 0, -1, 1)$

5.168. дом:

01.09г.

Лекция

$A = (\alpha_{ij}) \in F_{n \times n}$

(1) $f_A(x) = \det(A - xE) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-x \end{vmatrix}$ $f_A(x)$ - полином с коеф. от F и степен n.

V - лин. простр. над F и $\varphi \in Hom(V)$. A - матрицата на φ спрямо произв. базис на V. Деф характеристичен полином на оператора φ $f_\varphi(x) : f_A(x)$. Коректно: ако B е матрицата на φ спрямо др. базис на V, то A и B са подобни $(B = T^{-1}AT)$ и Тв. 1 $\Rightarrow f_B(x) = f_A(x)$. Така: $f_\varphi(x) = f_A(x)$; корените на $f_\varphi(x)$ $(\in \mathbb{C})$: характеристични корени на оператора φ.

V; $\varphi \in Hom(V)$. Вектор $x \in V$ е собствен вектор на φ: ако $x \neq \theta$ и $\varphi(x) = \lambda x$ за някое $\lambda \in F$; λ - собствено стойност на оператора.

$\dim V = n$ $(1 \leq n < \infty)$, $\varphi \in Hom(V)$, $\theta \neq x \in V$, $\varphi(x) = \lambda x$ $(\lambda \in F)$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис на V. φ има матрица $A = (\alpha_{ij}) \in F_{n \times n}$. $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$

$\varphi(x) = \lambda x = (\lambda \xi_1)e_1 + \dots + (\lambda \xi_n)e_n$. Но (от №14, $\xi = A\xi$) $\varphi(x) = (\alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n)e_1 + (\alpha_{21}\xi_1 + \dots \alpha_{2n}\xi_n)e_2 + \dots + (\alpha_{n1}\xi_1 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n)e_n$.

(2) $\begin{vmatrix} (\alpha_{11}-\lambda)\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = 0 \\ \alpha_{21}\xi_1 + (\alpha_{22}-\lambda)\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + (\alpha_{nn}-\lambda)\xi_n = 0 \end{vmatrix}$

Разгл. хомогенната с-ма:

(3) $\begin{vmatrix} (\alpha_{11}-\lambda)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + (\alpha_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{vmatrix}$

$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ $(x \neq \theta)$ - това е ненулево реш. на (3).

От №10 $\Rightarrow$ детерминантата на (3) е $= 0$, т.е. $\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$= f_A(\lambda) \Rightarrow \lambda$ е характеристичен корен на матрицата A и оператора φ.

Така: Всяка собствена стойност на оператора φ е характеристичен корен на оператора. Обратно: нека λ е характ. корен на φ $(\lambda \in \mathbb{C})$ и нека $\underline{\lambda \in F}$ (!). В сила е $f_A(\lambda)=0$, т.е. в сила е (4). Тогава хомогенната с-ма (3) има детерминанта $=0 \Rightarrow$ (3) има ненулево решение $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$. И Нека в V означим $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \in V$. Тогава са изпълнени (2), които са равносилни с $\varphi(x) = \lambda x$. λ е собствена стойност на φ (и x е собствен в-р)

Твърдение 2: Собствените стойности на φ съвпадат с онези характеристични корени на φ, които принадлежат на полето F.
(Ако $F = \mathbb{C}$: всички характеристични корени на φ. Ако $F \in \mathbb{R}$: реалните характеристични корени на оператора.)

Алгоритъм за намиране на собствените стойности и собствените вектори на φ: 1) Пресмятаме детерминантата от ред n, $\det(A-xE)$ и намираме полинома $f_\varphi(x)$; 2) решаване у-нието (от n-та степен $f_\varphi(x) = 0$ и намиране характер. корени $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на φ $(\lambda_i \in \mathbb{C})$. 3) За всеки характ. корен $\lambda_i = \lambda$, който $\in F$, решаване хомогенна с-ма (3) и намиране всички собствени в-ри x на φ, които отговарят на λ.

Твърдение 3: V; φ. Ако $a_1, a_2, \dots a_k$ $(k \geq 1)$ са собствени в-ри на φ, отговарящи на различни собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$, то в-рите $a_1, a_2, \dots, a_k$ са ЛНЗ. Индукция по k. При $k=1$: a_1 и λ_1, $a_1 \neq \theta$ и сл. a_1 е ЛНЗ. Нека $k \geq 2$ и Тв.3 е вярно за $k-1$.

$a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ $\varphi(a_i) = \lambda_i a_i$, $i = 1, \dots, k$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i = j$. Доп., че $\exists$ $\mu_1 a_1 + \dots + \mu_{k-1} a_{k-1} + \mu_k a_k = \theta$ $(\mu_i \in F)$. $\varphi(\mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k) = \varphi(\theta)$, $\mu_1 \varphi(a_1) + \dots + \mu_{k-1} \varphi(a_{k-1}) + \mu_k \varphi(a_k) = \theta$, $\mu_1 \lambda_1 a_1 + \dots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} a_{k-1} + \mu_k \lambda_k a_k = \theta$. Първото $\times (-\lambda_k)$ + второто $\Rightarrow \mu_1 (\lambda_1 - \lambda_k) a_1 + \dots + \mu_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) a_{k-1} = \theta$

$a_1, \dots a_{k-1}$ - собствени в-ри за собствените стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$. Сл. от индукционното предположение $\Rightarrow a_1, \dots a_{k-1}$ са ЛНЗ. Сл. $\mu_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0, \dots, \mu_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0$. Сл. $\mu_1 = \dots = \mu_{k-1} = 0$. Остава $\mu_k a_k = \theta$, но $a_k \neq \theta$ и сл. $\mu_k = 0$. Така $a_1, \dots a_{k-1}, a_k$ са ЛНЗ.

$n = \dim V$, $\varphi \in Hom(V)$; спрямо базис $e_1, \dots, e_n$ има матр. A.
Да се намери подходящ базис $f_1, \dots f_n$ на V, спрямо който матр. D на оператора φ да е възможно най-проста. Идеалният случай е $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (някакви $\lambda_i \in F$). Какво означава това? $\varphi(f_i) = \lambda_1 f_1 + 0 . f_2 + \dots + 0 . f_n = = f_1$; $\varphi(f_2) = \lambda_2 f_2, \dots, \varphi(f_n) = \lambda_n f_n$.

Т.е.: базисът $f_1, \dots, f_n$ се състои от собствени в-ри на опр. φ и числата $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ са съответните им собствени стойности.

<u>Теорема:</u> ($\dim V = n$, $\varphi \in Hom(V)$). Ако φ има n различни собствени стойности (т.е. характеристичните корени на φ са всичките в F и са два по два различни), то $\exists$ базис на V, спрямо който матр. на φ е диагонална матр.

<u>Д-во:</u> Нека собствените стойности са $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Нека $a_1, \dots a_n$ са собствени в-ри съответстващи на $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Т63 $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$ са ЛНЗ и са на брой $n = \dim V$. Сл. $a_1, \dots, a_n$ е базис на V.
От $\varphi(a_i) = \lambda_i a_i$ за $i = 1, 2, \dots n$ следва, че спрямо базиса $a_1, a_2, \dots a_n$ матр. на φ е $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

<u>Следствие:</u> ($F = \mathbb{C}$). Нека $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ има n различни характеристични корени $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ ($\in \mathbb{C}$). Тогава $\exists$ неособена матр. $T \in \mathbb{C}_{n\times n}$, такава че $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$.

<u>Д-во:</u> Нека V е n-мерно лин. пространство над $\mathbb{C}$ (напр. $V = \mathbb{C}^n$). Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V. (От №12) $\exists!$ лин. оператор φ над V, такъв че φ има матр. A. φ има n различни собствени ст-ни T. $\Rightarrow \exists$ базис $f_1, \dots f_n$ на V, спрямо който матр. на φ е D. Нека T е матр. на прехода от $e_1, \dots, e_n$ към $f_1, \dots, f_n$ ($T \in \mathbb{C}_{n\times n}$, $\overset{\text{(неособ. матр)}}{\det T \neq 0}$)
№14 $\Rightarrow D = T^{-1}AT$

16. Евклидови пространства ($F = \mathbb{R}$)

Нека V е лин. простр. над $\mathbb{R}$. Нека на всяка двойка в-ри $x, y \in V$ е съпоставено число $(x, y) \in \mathbb{R}$ (скаларно произведение на x и y). Нека са изпълнени: 1) $(x,y) = (y,x)$ $\forall x, y \in V$; 2) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$, $\forall x, y, z \in V$, 3) $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$, $\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; 4) $(x,x) > 0$, $\forall$ в-р $x \in V$, $x \neq \theta$. Тогава V е евклидово пространство.

Примери: (1) Свободните в-ри от АГ със скаларно произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} 0, \text{ ако } \vec{a} = \vec{0} \text{ или } \vec{b} = \vec{0} \\ |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) \end{cases}$$

(2) $V = \mathbb{R}^n$ за $x = (\xi_1, \dots \xi_n) \in V$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in V$ деф. $(x,y) = \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n \in \mathbb{R}$. – Евклидово п-во.

(3) $V = C[a,b]$. За $x(t), y(t) \in V$ деф. $(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)y(t)dt \in \mathbb{R}$. – Евклидово п-во.

(Размерност на Евклидово простр. V: $\dim V$ като лин. простр. над $\mathbb{R}$)

Следствия от аксиомите за Евклидово простр:

а/ $(\theta, y) = 0$, $\forall y \in V$ и в частност $(\theta, \theta) = 0$: от 3) при $\lambda = 0$, $(0.x, y) = 0(x,$
$\Rightarrow (\theta, y) = 0$

в/ $(z, x+y) = (z,x) + (z,y)$: $(z, x+y) \overset{1)}{=} (x+y, z) \overset{2)}{=} (x,z) + (y,z) \overset{1)}{=} (z,x) + (z,y)$

c/ $(y, \lambda x) = \lambda (y, x)$

d/ $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{l} \mu_j y_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j (x_i, y_j)$

$x \in V$. Дължина на x: числото $\sqrt{(x,x)}$ – това е реално число ≥ 0 и $= 0$ само при $x = \theta$. Означение. $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Ако $x \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $|\lambda x| = |\lambda||x|$: $|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda . \lambda (x,x)} = |\lambda| \sqrt{(x,x)} = |\lambda||x|$. x е единичен в-р ако: $|x| = 1$. Ако $x \neq \theta$, то векторът $x^0 = \frac{1}{|x|} x$ е единичен (при $\lambda = \frac{1}{|x|}$). x^0: единичен в-р, колинеарен с x.

$x, y \in V$. x е ортогонален на y: $(x,y) = 0$. Озн. $x \perp y$. Тогава $(y,x) = 0$, т.е. $y \perp x$

$\theta \perp y$, $\forall y \in V$; ако $x \in V$ и $x \perp y$, $\forall y \in V$, то $x = \theta$: от $(x,x) = 0$ следв

$x = \theta$

$a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ (с-ма в-ри).

Деф. С-мата в-ри е ортогонална ако: $(a_i, a_j) = 0, \forall i, j \in 1, \dots k,$ $i \neq j$ (при $k=1$ по деф това е ортогонална с-ма). С-мата е ортонормирана ако: $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|a_i| = 1, \forall i = 1, \dots, k.$ Т.е: $(a_i, a_j) = \delta_{ij}, \forall i,j = 1, \dots, k$

__Твърдение 1:__ Всяка ортогонална с-ма състояща се от ненулеви в-ри е ЛНЗ.

__Д-во:__ нека $a_1, \dots, a_k \in V$ е ортогон. с-ма $(k \geq 1)$ Доп. че $\exists$ $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_k a_k = \theta$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ $(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_k a_k, a_i) =$ $= (\theta, a_i)$, $\lambda_1 \underbrace{(a_1, a_i)}_{=0} + \dots + \lambda_i (a_i, a_i) + \dots + \lambda_k \underbrace{(a_k, a_i)}_{=0} = 0$, $\lambda_i (a_i, a_i) = 0.$

Но $a_i \neq \theta \Rightarrow (a_i, a_i) \neq 0$. Сл. $\lambda_i = 0$. Така $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Сл. $a_1, \dots, a_k$ е ЛНЗ с-ма.

__Забележка;__ Ако $\dim V = n$, то всяка ортогонална с-ма от n на брой ненулеви в-ри е базис на V: Тв 1 $\Rightarrow$ тези в-ри са ЛНЗ и са n на брой, сл. те са базис на V.

__Забележка:__ Нека $\dim V = n$ и $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V (ако има такъв) и $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \in V$, $y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n \in V$

Тогава $(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n$; в частност $|x| = \sqrt{(x,x)} =$ $= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}$: $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j (e_i, e_j) =$ $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j \delta_{ij} = \sum_{i=j=1}^{n} \xi_i \eta_i$

13.01.09г.

__Упражнение__

5.20 зад.

$V, \dim V = n < \infty$

$V_1, V_2 \leq V$

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$

$m + s = n$

? $\exists \varphi \in \mathrm{Hom}\, V$: $\ker \varphi = V_1$

$\mathrm{Im}\, \varphi \in V_2$

$e_1 \dots e_m$ - б. на V_1

$f_1 \dots f_s$ - б. на V_2

Допълване $e_1, \dots, e_m$ до б. на V; $e_1, e_2, \dots, e_m, h_1, \dots, h_s$ - б. на V

деф. φ: $\left.\begin{array}{l} \varphi(e_1) = \theta \\ \varphi(e_2) = \theta \\ \vdots \\ \varphi(e_m) = \theta \end{array}\right\}$ $\forall u \in V_1$, $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m \Rightarrow V_1 = \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(u) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_m \varphi(e_m) = \theta$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(h_1) = f_1 \\ \varphi(h_2) = f_2 \\ \vdots \\ \varphi(h_s) = f_s \end{array}\right\}$ f_i има праобраз h_i, $f_i \in \operatorname{Im}\varphi$, $\forall m \in V_2$,

$w = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_s f_s$, $\varphi(\underset{\text{омега} \neq w}{\psi}) = \mu_1 \varphi(h_1) + \dots + \mu_s \varphi(h_s)$

$V_2 \subseteq \operatorname{Im}\varphi$

Собствени стойности и собствени вектори

V над F; $e_1, e_2, \dots, e_n$ - б. на V; $A \Leftrightarrow \varphi \in \operatorname{Hom} V$; $\varphi(v) = Av$

$f_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| \overset{}{=}$ - характеристичен полином на A

$\overset{\shortparallel}{\det}(A - \lambda E)$

$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A = 0$

$A^2 - \operatorname{tr} A \cdot A + \det A \cdot E = 0$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - характ. корен

λ_i - характ. корен е собствена стойност, ако $\lambda_i \in F$

λ - собст. ст., v - собствен в-р $\Leftrightarrow \lambda$, ако $\varphi(v) = \lambda v$, $\boxed{v \neq \theta}$

$Av = \lambda v$

$(A - \lambda E) \cdot v = \theta$

U: ХСЛУ ФСР - б. на U

$U \leq V \Leftrightarrow \lambda$

φ - инвариантно подпростр. , $U \leq V$

$\forall u \in U$, $\varphi(u) \in U$

б. д. зад. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & * \\ & a_{22} - x & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$

$\lambda_i = a_i$

$x = \theta$

$a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ (с-ма в-ри).

Деф. С-мата в-ри е ортогонална ако: $(a_i, a_j) = 0, \forall i, j \in 1, \dots k$, $i \neq j$ (при $k=1$ по деф това е ортогонална с-ма). С-мата е ортонормирана ако: $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|a_i| = 1, \forall i = 1, \dots, k$.

Т.е: $(a_i, a_j) = \delta_{ij}, \forall i,j = 1, \dots, k$

Твърдение 1: Всяка ортогонална с-ма състояща се от ненулеви в-ри е ЛНЗ.

Д-во: нека $a_1, \dots, a_k \in V$ е ортогон. с-ма $(k \geq 1)$ Доп., че $\exists$ $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_k a_k = \theta$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ $(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_k a_k, a_i) = (\theta, a_i)$, $\lambda_1 \underbrace{(a_1, a_i)}_{=0} + \dots + \lambda_i (a_i, a_i) + \dots + \lambda_k \underbrace{(a_k, a_i)}_{=0} = 0$, $\lambda_i (a_i, a_i) = 0$.

Но $a_i \neq \theta \Rightarrow (a_i, a_i) \neq 0$. Сл. $\lambda_i = 0$. Така $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Сл. $a_1, \dots, a_k$ е ЛНЗ с-ма.

Забележка; Ако $\dim V = n$, то всяка ортогонална с-ма от n на брой ненулеви в-ри е базис на V: Тв 1 $\Rightarrow$ тези в-ри са ЛНЗ и са n на брой, сл. те са базис на V.

Забележка: нека $\dim V = n$ и $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V (ако има такъв) и $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \in V$, $y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n \in V$

Тогава $(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n$; в частност $|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}$: $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j \delta_{ij} = \sum_{i=j=1}^{n} \xi_i \eta_i$

13.01.09г.

5-20 зал.

Упражнение

$V, \dim V = n < \infty$

$V_1, V_2 \leq V$

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$

$m + s = n$

$? \exists \varphi \in \operatorname{Hom} V : \operatorname{Ker} \varphi = V_1$

$\operatorname{Im} \varphi \in V_2$

$e_1 \dots e_m$ - б. на V_1

$f_1 \dots f_s$ - б. на V_2

Допълване $e_1, \dots, e_m$ до б. на V: $e_1, e_2, \dots, e_m, l_{m+1}, \dots, l_n$ - б.

деф. φ: $\varphi(e_1) = \vec{0}$

$\varphi(e_2) = \vec{0}$ $\quad \forall u \in V_1,\ u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m \Rightarrow V_1 = \operatorname{Ker} \varphi$

$\varphi(e_m) = \vec{0}$ $\quad \varphi(n) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_m \varphi(e_m) = \vec{0}$

$\varphi(l_{11}) = f_1$

$\varphi(l_{12}) = f_2$ $\quad f_i$ има праобраз l_i, $f_i \in \operatorname{Im} \varphi$, $\forall m \in V_2$

$\varphi(l_{1s}) = f_s$ $\quad w = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_s f_s$, $\varphi(\underset{\text{омега} \neq w}{\omega}) = \mu_1 \varphi(l_{11}) + \dots + \mu_s \varphi(l_{1s})$

$V_2 \subseteq \operatorname{Im} \varphi$

Собствени стойности и собствени вектори

V над F; $e_1, e_2, \dots, e_n$ - б. на V; $A \leftrightarrow \varphi \in \operatorname{Hom} V$, $\varphi(v) = ?$

$f_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \overset{\shortparallel}{\det}(A - \lambda E)$ - характеристичен полином

$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A = 0$

$A^2 - \operatorname{tr} A . A + \det A \cdot E = 0$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - характ. корен

λ_i - характ. корен е собствена стойност, ако $\lambda_i \in F$

λ - собст. ст., V - собствен в-р $\leftrightarrow \lambda$, ако $\varphi(V) = \lambda V$, $\boxed{V \neq \vec{0}}$

$AV = \lambda V$

$(A - \lambda E) \cdot V = \vec{0}$

U: ХСЛУ $\quad$ ФСР+б. на U

$U \leq V \leftrightarrow \lambda$

φ - инвариантно подпростр., $U \leq V$

$\forall u \in U,\ \varphi(u) \in U$

б. ?зад. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots\ a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & * \\ & a_{22} - \lambda & \\ 0 & & \ddots\ a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$

$\lambda_i = a_i$

6.3 зад. $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

$m \in \mathbb{N}$, φ^m

$\left.\begin{matrix} \operatorname{Ker}\varphi^m \\ \operatorname{Im}\varphi^m \end{matrix}\right\}$ φ-инвариантно подпростр.

$\operatorname{Ker}\varphi^m$: $\forall u \in \operatorname{Ker}\varphi^m \,(\varphi^m(u) = 0) \Rightarrow \varphi(u) \overset{?}{\in} \operatorname{Ker}\varphi^m$

$\varphi^m(u) = 0$, $\varphi(\varphi^m(u)) = \varphi^m(\varphi(u))$, $\varphi(0) = 0$

$\operatorname{Im}\varphi^m$: $\forall w \in \operatorname{Im}\varphi^m \,(\exists b \in V: \varphi^m(b) = w)$

? $\varphi(w) \in \operatorname{Im}\varphi^m$

$\varphi(w) = \varphi(\varphi^m(b)) = \varphi^m(\underbrace{\varphi(b)}_{\text{прообраз на } \varphi(w)}) \Rightarrow \varphi(w) \in \operatorname{Im}\varphi^m$

6.4 зад. $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

λ-собств. стойност на φ

$U = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\} \leq V$, $0 \in U$, 0-не е собствен в-р

U-φ инвар.

$\forall u, v \in U \Rightarrow \alpha u + \beta v \overset{?}{\in} U$

$\forall \alpha, \beta \in F$

$\varphi(u) = \lambda u$ $\qquad \varphi(\alpha u + \beta v) \overset{?}{=} \lambda(\alpha u + \beta v)$

$\varphi(v) = \lambda v$ $\qquad \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) = \alpha\lambda u + \beta\lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$

$\qquad U \leq V$

$\forall u \in U: \varphi(u) = \lambda u$

$\varphi(\varphi(u)) = \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) \Rightarrow \varphi(u) \in U \Rightarrow U$- φ-инвариантно

6.5. зад.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$

$$D = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha = i^2\sin^2\alpha = (\pm\sin\alpha)^2$$

$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

$\varphi \in \operatorname{Hom} V$ над $\mathbb{R}$ /не

над $\mathbb{C}$ -да

Зад.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\|$ по L_1

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \dots$$

Зад.

$\varphi \in Hom\,V \Leftrightarrow A$

$f_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ - х. кор

$\forall \lambda_i \in F \Rightarrow \lambda_i$ - собст. ст-ти

$\forall \lambda$ - собст. ст-т

$\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \Big| (A - \lambda E)v = 0$

ФСР $\rightarrow c_1, \dots c_k$, $U = \ell(c_1, c_2, \dots c_k)$

$\mu \quad |A - \mu E)v = 0$

$W = \ell(d_1, d_2, \dots d_s)$

$$T^{-1}_{c\to e} A T_{e\to c} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots \lambda_n$ са ≠ крайни собст. ст-ти.

6.8 зад. ? собст. в-ри и собст. ст-ти на φ

в/

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & \lambda-3 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12- \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 (6-\lambda)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$

$(A-3E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = p$ $\quad x_1 = 5p - 3q$ $\quad \Rightarrow c_1 = (-5, 1, 0)$ $\quad l(c_1, c_2) \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 3$

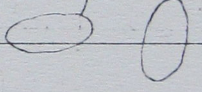
$x_3 = q$ $\quad c_2 = (-3, 0, 1)$

$(A-6E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix} \overset{\cdot(-1)}{\sim} \overset{:3}{} \begin{pmatrix} 0 & 27 & 9 \\ 1 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_3 = (1, 1, -3) \\ l(c_3) \Leftrightarrow \lambda_3 = 6 \end{matrix}$$

$$T_{e \to c} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 \\ 6x^2 + 3y^2 + 3z^2 \end{matrix}\right\}$ няма значение



Зад.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} (2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) + (-2).4.0 + (-2)(3-\lambda).2 - \\ -[2(-1-\lambda).0 + 2(-2)(3-\lambda) + 4(3-\lambda)(2-\lambda)] = 0 \end{matrix}$$

$= \ldots\ldots$

$-(3-\lambda)(3-\lambda)(\lambda+6) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ -2 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -10 + 3\lambda + \lambda^2 - 8$$

$(3-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 18) = 0$

$\lambda_1 = 3$ $\quad \lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} =$

$\Rightarrow \lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = -6$

$e_1 = (-2, 0, 1)$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$

$e_2 = (2, 1, 0)$

$e_3 =$

Зад. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad f_A(\lambda) = -(\lambda+1)^3 = 0$

$\lambda_{1,2,3} = -1$ - собств. ст-т.

$(A+E)x = 0$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ~~$A\lambda = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$~~

$l((1, 1, -1))$

Зад. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \cdot \lambda$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_{2,3} = 2$ $\quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad 1, 1, 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad e_1 = (-1, 1, 0)$

$e_2 = (-1, 0, 1)$

$e_3 = (1, -1, -1)$

6.9. зад e_1, e_2, e_3 - б. $\qquad \varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3) = (4\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3) e_1 + (2\xi_1 + \xi_2 - 2)\xi_3$

$T_{e \to c}$, D $\qquad + (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3) e_3$

$\varphi(e_1) = 4e_1 + 2e_2 + e_3$

$\varphi(e_2) =$

$\varphi(e_3) = 0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ \lambda-3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot(2)$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow c_1 = (1, 1, 1)$

$\lambda_2 = 2 \Rightarrow c_2 = (1, 0, 1)$

$\lambda_3 = 3 \Rightarrow c_3 = (1, 1, 0)$

$$T_{e \to c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6.10 зад. $A - \det A \neq 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \neq 0$

$A^{-1} \to$ хар. кор. са $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$

A^k са $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$

$A^2 : \underset{\underset{|A-\lambda E|}{\parallel}}{f_A(\lambda)} = -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$

$\underset{\underset{|A+\lambda E|}{\parallel}}{f_A(-\lambda)} = -(-\lambda-\lambda_1)(-\lambda-\lambda_2)\dots(-\lambda-\lambda_n)$

$\underset{\underset{|A^2-\lambda^2 E|}{\parallel}}{|(A-\lambda E)(A+\lambda E)|} = (\lambda^2-\lambda_1^2)(\lambda^2-\lambda_2^2)\dots(\lambda^2-\lambda_n^2)(-1)^{n+1}$

$\underset{\underset{f_{A^2}(\mu)}{\parallel}}{|A^2-\mu E|} = (\mu-\lambda_1^2)(\mu-\lambda_2^2)\dots(\mu-\lambda_n^2)(-1)^{n+1}$

$|A-\lambda E| = |A-\lambda A \cdot A^{-1}| = \underset{\neq 0}{|A|}\, |E-\lambda A^{-1}| \lambda^n = |E \frac{1}{\lambda} - A^{-1}|$

6.11з. $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, φ - обратим: $\exists \varphi^{-1}$, v - собств. в-р на φ : $v \neq \theta$ $\varphi(v) =$
$\Rightarrow$ v собств. в-р на φ^{-1} с $\frac{1}{\lambda}$

$$\underset{\shortparallel}{\varphi^{-1}(\varphi(v))} = \varphi^{-1}(\lambda v) = \lambda \varphi^{-1}(v)$$
$$\varphi^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} \cdot v$$

6.12. $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, $\varphi(v) = \lambda v$, $v \neq \theta$, $f(x) \in F[x]$
$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n$
v - собств. в-р $f(\varphi) \leftrightarrow f(\lambda)$?
$F(A) = a_0 A^n + \dots + a_{n-1} A + a_n E = C$
$f(A) = C$
$(f(\varphi))(v) = Cv = f(\lambda) \cdot v$
$Av = \lambda v$

6.17. a) $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$
$\forall$ 1-мерно подпростр е φ-инвариантно
? φ - скаларен оператор
U, $l(u) = U \leq V$, $\forall u \in V$, U - φ-инвар.
$\varphi(u) \in U$
$\overset{\shortparallel}{\mu u}$ $\exists \mu \in F$
$e_1, e_2, \dots e_n$ - б. на V
$\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1$ $\quad$ $e_1 + e_2 + \dots + e_n = e$
$\varphi(e_2) = \lambda_2 e_2$ $\quad$ $l(e) \to \varphi(e) = \xi e$
$\varphi(e_n) = \lambda_n e_n$ $\quad$ $\varphi(e) = \varphi(e_1 + \dots + e_n) = \varphi(e_1) + \dots + \varphi(e_n) =$
$= \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$
$\varphi(e) = \xi e = \xi(e_1 + \dots e_n)$ $=$
$(\lambda_1 - \xi) e_1 + (\lambda_2 - \xi) e_2 + \dots + (\lambda_n - \xi) e_n = 0$
$e_1, \dots e_n$ - б. на V $\Rightarrow$ ЛНЗ
$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \xi \Rightarrow \varphi = \xi E$

Зад. $\varphi \in Hom\, V$: $\left| \begin{array}{l} \varphi(a_i) = b_i \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right.$

$a_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$ $\qquad b_1 = -16e_1 + 14e_2 + 8e_3$

$a_2 = e_1 + e_2$ $\qquad \rightarrow \qquad b_2 = -7e_1 + 6e_2 + 5e_3$

$a_3 = e_1 + e_2 + e_3$ $\qquad b_3 = -10e_1 + 10e_2 + 6e_3$

а/ A_e, $f_A(\lambda) = 0$

б/ намерете собств. в-ри и собств. ст-ти

в/ покажете, че $\exists\, T_{e \to c} \Rightarrow D$

г/ $A_e^{2009} = ?$

$D = T^{-1} A T$

$A = T D T^{-1}$

$T_{e\to c}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $D^{2009} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2009} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2009} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{2009} \end{pmatrix}$

$A^{2009} = (TDT^{-1})^{2009} = TDT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1} = TD^{2009}T^{-1} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

19.01.09

Лекция

V - евкл. пространство

Тв. 2: (Неравенство на Коши-Буняковски). $\forall x, y \in V$ е в сила $|(x,y)| \leq |x||y|$. Равенство $\Leftrightarrow$ x и y са ЛЗ.

Д-во: Ако $x = 0$ ясно $(0=0)$. Нека $x \neq 0$. $\lambda \in R$. $(\lambda x - y, \lambda x - y) =$
$= (\lambda x, \lambda x) - (\lambda x, y) - (y, \lambda x) + (y, y) = (x,x)\lambda^2 - 2(x,y)\lambda + (y,y)$
$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0$; $\Rightarrow (x,x)\cdot\lambda^2 - 2(x,y)\lambda + (y,y) \geq 0$ - това е квадратен тричлен на λ със старши коефициент $(x,x) > 0$ и той е ≥ 0 за $\forall \lambda \in R$.
Това е изпълнено $\Leftrightarrow$ дискриминантата му $D \leq 0$.
$D = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$, $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$, $(x,y)^2 \leq |x|^2|y|^2$, $\Rightarrow$
$|(x,y)| \leq |x||y|$. Равенство $\Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow$ кв. тричлен има корен $\lambda_0 \in R \Leftrightarrow$
$(\lambda_0 x - y, \lambda_0 x - y) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 x - y = 0$, $y = \lambda_0 x$ за някое $\lambda_0 \in R$, i.e $\Leftrightarrow x, y$
са ЛЗ.

$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

$V=\mathbb{R}^n$; $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in V$ и $y=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in V$; $(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\dots+\xi_n\eta_n)^2 \leq$
$\leq(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\eta_2^2+\dots+\eta_n^2)$. Това е изпълнено за всички $\xi_1,\dots,\xi_n$ $\in R$ и $\forall \eta_1,\dots,\eta_n\in R$, като равенство $\frac{\xi_1}{\eta_1}=\frac{\xi_2}{\eta_2}=\dots=\frac{\xi_n}{\eta_n}$

$V=C[a,b]$, $x(t),y(t)\in V$, $\left(\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b (x(t))^2dt.\int_a^b (y(t))^2 d$

Това е изпълнено за $\forall$ две ф-ии $x(t),y(t)\in V$, като равенство се достига когато $\frac{x(t)}{y(t)}=const.$

$x,y\in V$ и $x,y\neq\theta$. $|(x,y)|\leq|x||y|$ или $-|x||y|\leq(x,y)\leq|x||y|$ или $-1\leq\frac{(x,y)}{|x||y|}\leq 1$. Сл. $\exists!$ ъгъл φ от $[0,\pi]$, такъв че $\cos\varphi=\frac{(x,y)}{|x||y|}$.

φ: ъгъл м/у ненулевите в-ри x и y. (Остава в сила $(x,y)=|x||y|\cos\varphi$ от АГ).

Неравенство на триъгълника: за $\forall$ x,y (в-ри) $\in V$ е в сила $|x+y|\leq|x|+|$
(ако x,y са ЛНЗ, то неравенството на Δ е строго). $|x+y|^2=(x+y,x+y)=$
$=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=|x|^2+2(x,y)+|y|^2\overset{К.Б.}{\leq}|x|^2+2|x||y|+|y|^2=$
$=(|x|+|y|)^2$. $|x+y|^2\leq(|x|+|y|)^2$ и $|x+y|\leq|x|+|y|$ (Ако x,y са ЛНЗ, то в неравенството на К-Б имаме $<$ и следва, че $|x+y|<|x|+|y|$

<u>Теорема</u>: (Метод за ортогонализация на Грам и Шмид). V-евкл. п-во, $a_1,a_2,\dots,a_n\in V$ - ЛНЗ с-ма в-ри $(1\leq n<\infty)$
$\exists$ в-ри $e_1,e_2,\dots,e_n\in V$, такива че: ① $e_1,e_2,\dots,e_n\neq\theta$, ② $e_1,e_2,\dots,e_n$ са ортогонална с-ма (от ①, ② и Тв. 1 $\Rightarrow e_1,e_2,\dots,e_n$ е ЛНЗ с-ма), ③ всеки от в-ри $e_1,e_2,\dots,e_n$ има вида $e_k=a_k+\nu_1e_1+\dots+\nu_{k-1}e_{k-1}$ $(1\leq k\leq n,\ \nu_i\in\mathbb{R})$, ④ $\ell(e_1,e_2,\dots,e_n)=\ell(a_1,a_2,\dots,a_n)$, ⑤ ако за някое k $(1\leq k\leq n)$ $a_1,a_2\dots$ е ортогонална с-ма, то $e_1=a_1$, $e_2=a_2,\dots,e_k=a_k$

<u>Д-во:</u> $I^{ва}$ стъпка: Избираме $e_1=a_1$. 1) $e_1\neq\theta$: иначе $a_1,\dots,a_n$ е ЛЗ; 2) e_1 е ортогонална с-ма, 3) изпълнено, 4) $\ell(e_1)=\ell(a_1)$; 5) изпълнено е $e_1=a_1$
$II^{ра}$ стъпка: Търся в-р e_2 във вида $e_2=a_2+\lambda e_1$ $(\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda=?)$ 1) $e_2=1.a_2+\lambda.a_1$ и

$e_2 \neq \theta$ - иначе a_1, a_2 са ЛЗ и сл. $a_1, a_2, \dots, a_n$ е ЛЗ. 2) e_1 и e_2 да са ортог. с-ма т.е. $(e_2, e_1) = 0$. $(e_2, e_1) = (a_2, e_1) + \lambda(e_1, e_1)$, $0 = (a_2, e_1) + \lambda(e_1, e_1)$ ($e_1 \neq 0$ и сл. $(e_1, e_1) \neq 0$) и $\lambda = -\frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$. С това λ е изпълнено $(e_2, e_1) = 0$

3) изпълнено, 4) $e_1 = a_1$ и $e_2 = a_2 + \lambda a_1$; $a_1 = e_1$ и $a_2 = e_2 - \lambda e_1$; сл. $\ell(e_1, e_2) = \ell(a_1, a_2)$

5) Нека a_1, a_2 е ортогон. с-ма, т.е. $(a_2, a_1) = 0$. $\lambda = -\frac{(a_2, a_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{(a_2, a_1)}{(a_1, a_1)} = 0$

и $e_2 = a_2 + \lambda e_1 = a_2$. Така $e_1 = a_1$, $e_2 = a_2$ и 5) е изпълнено.

$k^{\text{та}}$ стъпка: Нека вече са намерени в-ри $e_1, \dots, e_{k-1}$, удовлетворяващи 1)-5), т.е. $e_1, \dots, e_{k-1}$ е ортог. с-ма от ненулеви в-ри., имат искания вид в 3), $\ell(e_1, \dots, e_{k-1}) = \ell(a_1, \dots, a_{k-1})$ и ако $a_1, \dots, a_{k-1}$ е ортог. с-ма, то $e_1 = a_1, \dots, e_{k-1} = a_{k-1}$. Търсим в-р e_k във вида $e_k = a_k + \nu_1 e_1 + \dots + \nu_{k-1} e_{k-1}$ ($\nu_i \in \mathbb{R}$, $\nu_i = ?$). Очевидно 3) е изпълнено. $e_1, \dots, e_{k-1} \in \ell(a_1, \dots, a_{k-1})$ и (*) $e_k = 1a_k +$ линейна комбинация на $a_1, \dots, a_{k-1}$.

1) $e_k \neq \theta$: иначе $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ са ЛЗ и сл. $a_1, \dots, a_n$ е ЛЗ - противоречи

2) $e_1, \dots, e_{k-1}, e_k$ да са ортогонална с-ма $\iff e_k \perp e_1, \dots, e_{k-1}$, т.е. $(e_k, e_i) = 0$, $\forall i = 1, \dots, k-1$. $0 = (e_k, e_i) = (a_k, e_i) + \nu_1 \underbrace{(e_1, e_i)}_{=0} + \dots + \nu_i (e_i, e_i) + \dots + \nu_{k-1} \underbrace{(e_{k-1}, e_i)}_{=0} \Rightarrow \nu_i (e_i, e_i) = -(a_k, e_i)$; $e_i \neq \theta$, $\forall i = 1, \dots, k-1 \Rightarrow (e_i, e_i) \neq 0$ и $\nu_i = -\frac{(a_k, e_i)}{(e_i, e_i)}$, $i = 1, \dots, k-1$

С тези числа $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{k-1}$ имаме, че $e_1, \dots, e_{k-1}$ е ортог. с-ма.

4) $\ell(e_1, \dots, e_{k-1}) = \ell(a_1, \dots, a_{k-1})$. (*) $\Rightarrow e_k \in \ell(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$.

(*) $\Rightarrow a_k = e_k -$ лин. комб. на $a_1, \dots, a_{k-1} =$ лин. комб. на $e_1, \dots, e_{k-1}, e_k$

Сл. $a_k \in \ell(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k)$ Сл. $\ell(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k) = \ell(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$

5) Нека $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ е ортог. с-ма Сл. и $a_1, \dots, a_{k-1}$ е ортог. с-ма.

Сл. $e_1 = a_1, \dots, e_{k-1} = a_{k-1}$. $\nu_i = -\frac{(a_k, e_i)}{(e_i, e_i)}$ за $i = 1, \dots, k-1$

$\nu_i = -\frac{(a_k, a_i)}{(a_i, a_i)} = 0$ (понеже $(a_k, a_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k-1$) $\therefore \nu_i = 0$ за $i = 1, \dots, k-1$

и сл. $e_k = a_k$. Така $e_1 = a_1, \dots, e_{k-1} = a_{k-1}$, $e_k = a_k$

с 1')-5).

Твърдение 3: Нека V е крайномерно евкл. простр. (i) Всяка ортог. с-ма от ненулеви в-ри на V може да бъде допълнена до ортогонален базис на V. (ii) V има ортонормиран базис.

Д-во (i) Нека $n = \dim V$. $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$ - ортогон. с-ма от $\neq 0$ в-ри. (Тв. 1 $\Rightarrow$ това е ЛНЗ с-ма, сл. $m \leqq n$). №7 $\Rightarrow$ можем да допълним $a_1, a_2, \dots, a_m$ д базис на V: $a_1, \dots, a_m; a_{m+1}, \dots, a_n$ (при $m < n$) Това е ЛНЗ с-ма и по Грам-Шмид получаваме $e_1, \dots, e_m; e_{m+1}, \dots, e_n \in V$ с 1)-5). Сл. те са ЛНЗ и са n на бр. и сл. са базис на V: $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$. Но $a_1, \dots, a_m$ е ортог. с-ма и 5) $\Rightarrow e_1 = a_1, \dots, e_m = a_m$. Така $a_1, \dots, a_m; e_{m+1}, \dots, e_n$ е ортогон. базис на простр. V.

(ii) От (i) имаме ортогонален базис на V: $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$. Нека $f_i = \frac{1}{|e_i|} e_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогава $|f_i| = 1$, $\forall i$. Така $f_1, f_2, \dots, f_n$ е ортонорм. с-ма $\Rightarrow$ тя е ЛНЗ $\Rightarrow$ е базис на V.

Нека V и V' са евкл. пространства и $\varphi : V \to V'$ е изображение. φ е изоморфизъм ако: (1) φ е изоморфизъм на V и V' като лин. простр. над полето $\mathbb{R}$ и (2) за $\forall$ два в-ра $x, y \in V$ да е изпълнено $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$. Тогава и $\varphi^{-1} : V' \to V$ също е изоморфизъм. V и V' са изоморфни евклидови простр. ($V \cong V'$)

Твърдение 4: Две крайномерни евкл. простр. V и V' са изоморфни $\Leftrightarrow \dim V = \dim V'$.

Д-во: ($N = 11$) $\Rightarrow$) Нека $V \cong V'$. Тогава V и V' са изоморфни лин. простр. над $\mathbb{R}$ и сл. $\dim V = \dim V'$.

($\Leftarrow$) Нека $\dim V = \dim V' = n$ ($n \in \mathbb{N}$) Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонорм. б. на V $e_1', \dots, e_n'$ е ортонорм. базис на V'. Изображ. $\varphi : V \to V'$, деф. с $\varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_n e_n'$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) е изоморфизъм на V и V' като лин. простр над $\mathbb{R}$. Нека $x, y \in V$ и $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, $y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n$.

$\varphi(x) = \xi_1 e_1' + \dots + \xi_n e_n'$; $\varphi(y) = \eta_1 e_1' + \dots + \eta_n e_n'$. Двата базиса са ортонор.

и сл. $(x,y)=\xi_1\eta_1+\dots+\xi_n\eta_n$ и $(\varphi(x),\varphi(y))=\xi_1\eta_1+\dots+\xi_n\eta_n$.
Така $(\varphi(x),\varphi(y))=(x,y)$ $\forall x,y\in V$. Сл. $\varphi: V\to V'$ е изоморфизъм на евклидови простр., т.е. $V\cong V'$.

Следствие: За дадено $n\in\mathbb{N}$, всяко n-мерно евкл. простр. е изоморфно на евкл. простр. $\mathbb{R}^n$. Т.е.: единственото n-мерно евкл. простр. е $\mathbb{R}^n$.

20.01.09.

? Упражнение

Евклидови пространства

V над $\mathbb{R}$, (x,y)

$e_1,e_2,e_3,\dots,e_n$ - б. на V

$e_i=(0,0\dots0,\underset{i}{1},0,\dots0)$

$(e_i,e_j)=0$, $i\neq j$; $(e_i,e_i)=1$, $e_i\perp e_j$ $i\neq j$; $|e_i|=1$

$\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ - б. на V (афинен)

$\{b_1,b_2,\dots b_n\}$ $\perp$ б. на V, $(b_i,b_j)=0$ $i\neq j$ (ортогонален б.)

$\{c_1,c_2,\dots c_n\}$ $\perp^{н}$ (ортонормиран) б. на V, $c_i=\dfrac{b_i}{|e_i|}$, $|c_i|=1$

$U\leq V$л.п. $U\oplus W=V$

$U\leq V$евкл. $U\oplus U^{\perp}=V$, $U^{\perp}=\{v\in V\mid (v,u)=0,\ \forall u\in U\}$
ортог. допълнение на U:

V = ортогон. проекция на V в U ($V=\text{орт.пр}_{U}^{V}$)

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$y=(y_1,y_2,\dots y_n)$

$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$

$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$

$\cos\varphi=\dfrac{(x,y)}{|x||y|}$

$\varphi=\sphericalangle(x,y)$

V-n-мерно евкл. пр-во

7.1.3.
б)

$a = (1,2,2,3)$

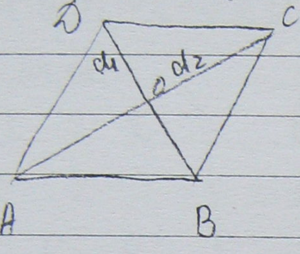
$b = (3,1,5,1)$

$\angle(a,b)$

?

$$\cos\varphi = ? = \frac{\overset{1^2+2^2+2^2+3^2}{18}}{\sqrt{18}\cdot\underbrace{6}_{\sqrt{3^2+1^2+5^2+1^2}}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$



$$(a+b, a+b) + (a-b, a-b) = 2(a,a) + 2(b,b)$$

7.3з.

$a_1 = (1,-2,3,1)$

$a_2 = (2,1,1,-3)$

? $a_1 \perp a_2$, допълнете с-мата до ортогон. ($\perp$) б. на V

$(a_1 . a_2) = 0 \Rightarrow$ ортог ($a_1 \perp a_2$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

търся $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{cases} (x, a_1) = 0 \\ (x, a_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$U \oplus U^{\perp} =$

$x \in U^{\perp}$

$\underbrace{a_1, a_2}_{\perp}, \underbrace{a_3, a_4}_{?\, a_3, a_4 \perp}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{-5} & \cancel{-5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ & & p & q \end{pmatrix}$$

$x_2 = p + q$

$x_1 = (2p + 2q - 3p - q) = q - p$

$a_3 = (-1, 1, 1, 0)$

$a_4 = (1, 2, 0, 1)$

$a_3 \perp a_4$

$a_3 = (-1, 1, 1, 0)$

$(q-p, p+q, p, q)$

$-q + p + p + q + p = 0$

$3q + p = 0$

$q = 1$

$p = -3$

7.4. б/ a_1, a_2, a_3 – б. на V

$\Rightarrow \overset{?}{.}\ \perp^{\text{н}}$ б. на V

$a_1 = (1, -2, 1)$

$a_2 = (4, -5, 4)$

$a_3 = (-1, -8, -3)$

$\{a_i\}_1^3$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ б. на V

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & -8 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Грам-Шмид:

$b_1 = a_1 = (1, -2, 1)$

$b_2 = a_2 + \alpha b_1 : (b_2, b_1) = 0,\ \alpha = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{18}{6} = -3$

$b_3 = a_3 + \beta b_1 + \gamma b_2 : \ (b_3, b_1) = 0 \Rightarrow \beta$

$(b_3, b_2) = 0 \Rightarrow \gamma$

$\beta = -\dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{12}{6} = 2 \quad \gamma = -\dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\dfrac{-12}{3} = 4$

$b_2 = (4, -5, 4) - 3(1, -2, 1) = (1, 1, 1)$

$b_3 = (-1, -8, -3) - 2(1, -2, 1) + 4(1, 1, 1) = (1, 0, -1)$

$\perp^{\text{н}}$ б. на $V \Rightarrow c_1, c_2, c_3 = ?$

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

$c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$

7.4. ⁚

$a_1 = (5, 0, 3, -1)$ ЛНЗ $\Rightarrow$ базис

$a_2 = (-3, -4, 3, 8)$ Г-Ш: $b_1 = a_4 = (2, 1, 1, -1)$ $\quad 10\ 0\ \overset{14}{5}\ 1$

$a_3 = (-1, -1, 1, 5)$ $\quad b_2 = a_1 + \alpha b_1,\ \alpha = -\dfrac{(a_1, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{14}{7} = -2$

$a_4 = (2, 1, 1, -1)$

? $\perp^{4}$ б. на V

$b_3 = a_2 + \beta b_1 + \gamma b_2 = (-1, 1, 2, 1)$

$b_2 = (1, -2, 1, 1)$

$b_4 = a_3 + \xi b_1 + \theta b_2 + \zeta b_3 = (1, 1, -1, 2)$

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} b_1$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{7}} b_2$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{7}} b_3$, $c_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} b_4$.

7.5. д)

$a_1 = (1, -2, 2, 2)$

$a_2 = (-1, 9, -5, -5)$

$a_3 = (1, 5, -1, -1)$

$a_4 = (1, 12, -3, -5)$

$U = l(a_1, a_2, a_3, a_4) \leq V$

? $\perp^{\text{н}}$ б. на U

$U = <$? б. на $U >$

Избираме една МЛНЗП в-ри изм/у

$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ a_2 & -1 & 9 & -5 & -5 \\ a_3 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ a_4 & 1 & 12 & -3 & -5 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & -14 & 5 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$b_1 = (1, -2, 2, 2)$

$b_2 = (0, 7, -3, -3)$

$b_3 = (0, 0, 1, -1)$

Г-Ш: $c_1 = b_3 = (0, 0, 1, -1)$

? $c_2 = b_1 + \alpha c_1 = (1, -2, 2, 2)$

$c_3 = b_2 + \underset{0}{\beta} c_1 + \underset{2}{\gamma} c_2 = (2, 3, 1, 1)$

? $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, 1, -1)$, $d_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} (1, -2, 2, 2)$, $d_3 = \frac{1}{\sqrt{13}} (2, 3, 1, 1)$.

7.10.

$U = l(a_1, a_2, a_3)$

$a_1 = (1, 2, 0, 1)$

$a_2 = (3, 2, 1, 2)$

$a_3 = (1, -2, 1, 0)$

? $\perp^{\text{н}}$ б. на $U^{\perp}$

1) б. на U е една МЛНЗП изм/у

$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ a_2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ a_3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U = < b_1, b_2 >$, $b_1 = (1, 2, 0, 1)$, $b_2 = (0, 4, -1, 1)$

2) $x \in U^{\perp}$

$U^{\perp}: \left| \begin{array}{l} (b_1, x) = 0 \\ (b_2, x) = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ & p & q & \end{pmatrix}$

$x_4 = q - 4p$

$x_1 = -2p - q - 4p = 2p - q$

$\Rightarrow c_1 = (2, 1, 0, -4) \in U^{\perp}$

$c_2 = (-1, 0, 1, +1)$ базис на $U^{\perp}$

$d_1 = c_2 = (-1, 0, 1, 1)$

$d_2 = (2, 1, 0, -4) - \frac{-6}{3}(-1, 0, 1, 1) =$

$= (0, 1, 2, -2)$

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1,1)$, $f_2 = \frac{1}{3}(0,1,2,-2)$ $\perp^{\text{н}}$ на $U^{\perp}$

7.11.
дом.

$U: \left| \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4=0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow a_1=(1,1,1,1)$, $\Rightarrow a_2=(2,3,-1,-2)$ $\in U^{\perp}$

? $\perp^{\text{н}}$ б. на $U^{\perp}$.

7.12.

$U = l(a_1,a_2,a_3,a_4)$

$v=(4,-7,7,-6) \in V$? v_0, h

$v = v_0 + h \in U^{\perp}$

$a_1 = (2,1,3,-1)$

$a_2 = (3,1,4,2)$

$a_3 = (-1,1,0,-10)$

$a_4 = (1,1,2,-4)$

1) $\perp^{\text{н}}$ б. на U

б. на U е една МЛНЗП в-ри от
$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ a_2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ a_3 & -1 & 1 & 0 & -10 \\ a_4 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & 14 \\ 0 & 2 & 2 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ б. на U е $b_1 = (1,1,2,-4)$, $b_2 = (0,1,1,-7)$ $\Rightarrow$ $c_1 = (1,1,2,-4)$

$c_2 = (0,1,1,-7) - \frac{31}{22}(1,1,2,-4) =$

$1.0+1.1+2.1+4.7$

$0+1+2+28$

$1^2+1^2+2^2+4^2$

$= \frac{1}{22}(-31,-9,-40,+30)$

$c_2' = -22c_2 = (31,9,40,+30)$

$d_1 = \frac{1}{\sqrt{22}}(1,1,2,-4)$, $d_2 = \frac{1}{\sqrt{22.161}}(31,9,40,30)$

2) $v_0 \in U \Rightarrow v_0 = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2$

$\alpha_1 = (\underset{v-h}{\underset{\parallel}{v_0}}, d_1)$ $\alpha_2 = (\underset{v-h}{\underset{\parallel}{v_0}}, d_2)$

$h \in U^{\perp} \Rightarrow \alpha_1 = (v, d_1) = \frac{1}{\sqrt{22}}.35$

$\alpha_2 = (v, d_2) = \frac{161}{\sqrt{22.161}}.$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{35}{\sqrt{22}} \cdot \frac{1}{\sqrt{22}}(1,1,2,-4) + \frac{161}{\sqrt{161.22}} \cdot \frac{1}{\sqrt{161.22}}(31,9,40,30) = (3,2,5,-5)$$

3) $h = V - V_0 = (4,-7,7,-6) - (3,2,5,-5) = (1,-9,2,-1)$

7.13. $U: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$? $V = (-3, 0, -5, 9)$

? $V = \underset{\in U}{V_0} + \underset{\in U^\perp}{h}$

1) намираме ФСР като б. на U.

7.12 б)

$a_1 = (1,-1,2,3)$ $V = (10,-10,8,11)$

$a_2 = (2,-3,1,2)$? $V = V_0 + h$

$a_3 = (2,-1,7,10)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 10 \end{pmatrix} \overset{(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{+}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & -1, & 2, & 3 \\ 0, & -1, & -3, & -4 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \underset{(-1)}{\Rightarrow} \text{2мерно}$$

$\Rightarrow$ б. на U: $b_1 = (1,-1,2,3)$; $b_2 = (0,1,3,4)$.

$\Rightarrow$ ОНБ на U $\begin{cases} d_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(0,1,3,4) \\ d_2 = \frac{1}{\sqrt{26.101}}(26,-43,1,10) \end{cases}$ | $\frac{1}{\sqrt{15}}(1,-1,2,3)$

$\frac{1}{\sqrt{15.101}}(-17,32,11,9)$

$\alpha_1 = \frac{58}{\sqrt{26}}$ $\alpha_1 = \frac{69}{\sqrt{15}}$

$\alpha_2 = \frac{808}{\sqrt{26.101}}$ $\alpha_2 = \frac{-303}{\sqrt{101.15}}$

$V_0 = (\cancel{3,-21,1,-1})$
$8,-11,7,-12$ $h = (2,1,1,-1)$