

Тема 1: МНОЖЕСТВА

Понятие за множество.

Означения за множество и елемент на множество.

A, A', B, M, \emptyset

$a, b, r, t, a \in A, m \in M', r \notin A'$

Представяне на множества. Диаграми на Вен.

- чрез изброяване на елементите на множеството:

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ или $\{0,1,2,\dots,10\}$

$A = \{a,b,\dots,z\}$ $A' = \{A\}$

$M = \{\emptyset\}$ $P = \{a, \{1,2,3\}, M\}$

$J_n = \{0,1,\dots,n-1\}$ $I_n = \{1,2,\dots,n\}$

$B = \{\text{false}, \text{true}\}$

$N = \{0,1,2,3,\dots\}$ - множество на естествените числа

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ - множество на целите числа

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{Q} = множеството на рационалните числа

\mathbb{R} = множеството на реалните числа

\mathbb{C} = множеството на комплексните числа

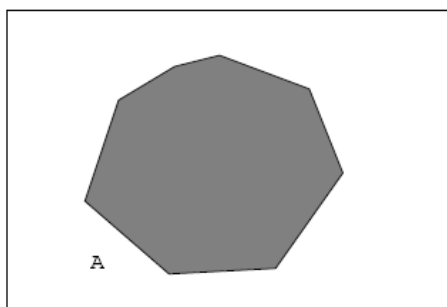
- чрез указване на свойство, общо за елементите:

$X = \{x \in N : x \geq 100\}$

$Y = \{\alpha \in A : f \leq \alpha \leq t\}$

$Q = \{x/y : x, y \in Z, y \neq 0\}$

- диаграми на Вен



Аксиоми:

A1. Аксиома за обема: $\forall a(a \in A \Leftrightarrow a \in B) \Rightarrow A = B$

- Проверка за равенство на множества:

$$\{a, b, a\} = \{a, b\}$$

$$\{a, l, m, a, r, 7, l\} = \{a, m, r, l, 7\}$$

- Построяване на обединение на две множества:

$$\{a, b\} \cup \{a, m, r, l, 7\} = \{a, b, m, r, l, 7\}$$

A2. Аксиома за отделянето: $M' = \{x \mid x \in M, \pi(x)\}$ е множество – подмножество на M .

- Подмножество: $M' \subseteq M$

$$\forall M : M \subseteq M, \emptyset \subseteq M$$

- Построяване на сечение на две множества:

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$$

- Построяване на разлика на две множества:

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

- Построяване на симетрична разлика на две множества:

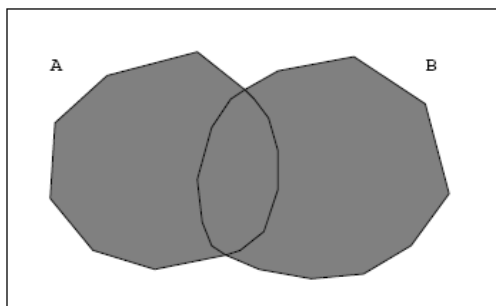
$$A \Delta B = \{x : x \in A, x \notin B\} \cup \{x : x \in B, x \notin A\}$$

- Построяване на допълнение на множество:

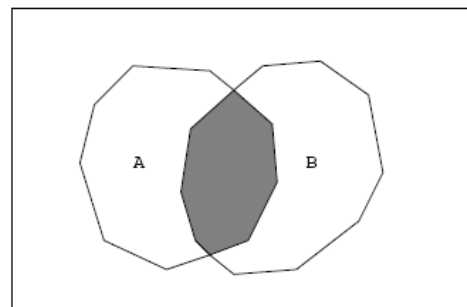
$$\bar{A} = \{x : x \notin A\}$$

- Построяване на степенно множество на дадено множество:

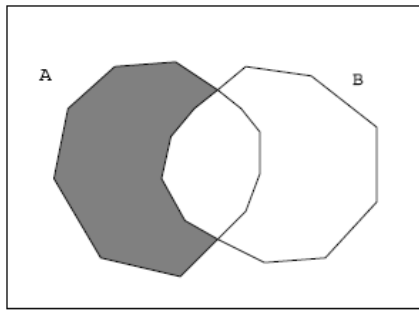
$$2^A = \{M : M \subseteq A\}$$



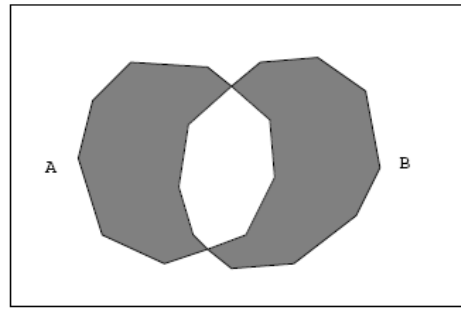
а)



б)



в)



г)

- а) Обединение на множествата А и В;
- б) Сечение на множествата А и В;
- в) Разлика на множествата А и В;
- г) Симетрична разлика на множествата А и В.

А3. Аксиома за степента. $2^M = \{M' \mid M' \subseteq M\}$
 $2^{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Свойства на операциите:

1. Идемпотентност

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A$$

2. Комутативност

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A;$$

$$A \Delta B = B \Delta A; \quad A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$$

3. Асоциативност

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

4. Дистрибутивност

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5. Свойства на празното и на универсалното множество

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \setminus \emptyset = A$$

$$A \cup U = U; \quad A \cap U = A; \quad A \setminus U = \emptyset; \quad U \setminus A = \bar{A}$$

6. Свойства на допълнението

$$A \cup \bar{A} = U; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset; \quad A \setminus \bar{A} = A; \quad \overline{\bar{A}} = A$$

7. Закопи на ДеМорган

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

8. Други свойства

$$A \subseteq A \cup B; A \cap B \subseteq A; A \setminus B \subseteq A;$$

$$A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A;$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset; (A \setminus B) \cup (A \cap B) = A;$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A; (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$$

Задачи:

1. Проверете истинността на следните твърдения:

1. $\emptyset \subseteq \emptyset$

2. $\emptyset \in \emptyset$

3. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

4. $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

5. $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$

6. $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$

7. $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$

8. $\{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$

9. $\{1, 2, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

2. Дадени са множествата: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$ и $C = \{1, 3, 5\}$. Да се определят следните множества:

1. $(A \cup B) \Delta (A \cap C)$

2. $A \Delta (B \cup C)$

3. $(A \Delta B) \setminus (A \Delta C)$

4. $(A \setminus B) \Delta (A \setminus C)$

3. Дадени са множествата: $A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$, $B = \{1, 4, 5, 7, 9\}$, $C = \{3, 7, 8, 9\}$ и универсално множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Да се определят следните множества: $X = \{2, 7, 9\}$ и $Y = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ чрез операции над множествата A , B и C .

4. Проверете истинността на следните твърдения. Използвайте диаграми на Вен за да илюстрирате решението си.

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap C) = A \Delta B$

2. $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A \Delta B$

3. $(A \Delta B) \setminus B = A$
4. $(A \Delta B) \Delta B = A$
5. $A \Delta A = A \setminus A$

5. Напишете всички верни твърдения от вида: $A \in B$ и $A \subseteq B$, където A и B се избират по всички възможни начини измежду $1, \{1\}, \{\{1\}\}$.

6. Определете множеството, състоящо се от всички множества X такива, че: $\{1,2,3\} \subseteq X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$.

7. Да се напише в явен вид степенното множество на всяко от следните множества:

1. $\{a, b, c\}$
2. $\{a, \{b, c\}\}$
3. $\{\{a\}, \{b\}\}$
4. $2^{\{3\}}$

8. Дайте пример за:

1. Непразно множество, което е подмножество на своето степенно множество.
2. Множество, което не е подмножество на своето степенно множество.
3. Множества A и B такива, че е изпълнено: $A \in B$ и $A \subseteq B$

9. Да се докаже или опровергае всяко от следните твърдения:

1. Ако $A \cap B = \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$ то $A \cap C = \emptyset$ Не
2. Ако $A \cap B = \emptyset$ и $C \cap D = \emptyset$ то $(A \cap C) \cap (B \cap D) = \emptyset$ Да
3. Ако $A \cap B = \emptyset$ и $C \cap D = \emptyset$ то $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$ Не
4. $A \setminus \bar{B} = A \cap B$ Да
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ Да
6. $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$ Да

10. Дадени са множествата: $U = \{a, 1, b, 2, c, 3, d, 4\}$, $A = \{a, c, 1, d\}$ и $B = \{2, b, c, 1\}$. Да се намери броя на елементите, принадлежащи на всяко от множествата:

$$X = 2^{(\overline{A \cap B}^U) \setminus (\overline{A \cup B}^U)} \quad \text{и} \quad Y = 2^{\overline{A \cap B}^U} \setminus 2^{\overline{A \cup B}^U}$$

22.02.2010

moodle

pass PS-INF-student

не се заздравява: $U = \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing$

не е от разредката от moodle

Дискретна математика - учебник

Множества

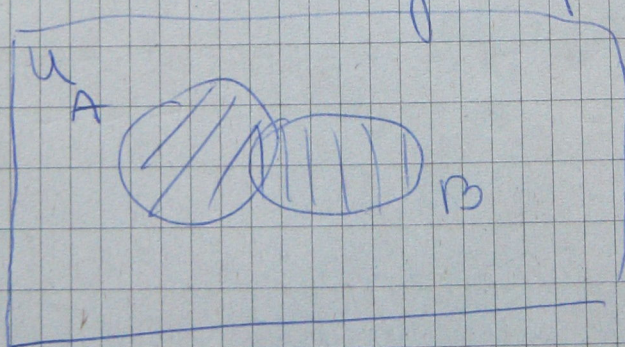
U - вселената на множеството (универсално множество)
 \emptyset - празното множество

$$D = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$J_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Диаграма на Вен - начин да се заглават
множествата като една криза която не се
пресича



$$A = B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$$

$$A \neq B \Leftrightarrow \exists a \in A \Rightarrow a \notin B$$

$$\text{или } \exists b \in B \Rightarrow b \notin A$$

Свойства на от. всички подмножества на едно множество също е множество и се нарича мощностно множество на даденото множество. 2^A - мощност.

$$\text{Нека } A = \{1, 2\}$$

$$2^A = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$$

Нека M - едно множество Π -пропозиция $\begin{cases} \text{He} \\ \text{True} \\ \text{False} \end{cases}$

$$\emptyset \subseteq M$$

$$M \subseteq M \quad \Pi = \begin{cases} \text{Da} \\ \text{Нямна} \\ \text{True} \end{cases}$$

$$\emptyset \rightarrow \{ \}$$

Операции

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}$$

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

Тема 2: МНОЖЕСТВА(продължение)

А4. Аксиома за индукцията.

Нека са дадени множество $M_0 \neq \emptyset$ и операции \mathcal{F} . Определяме съвкупност от елементи M по следния начин:

1. В M включваме всички елементи на M_0 .
2. Нека в M са включени някакви елементи.
3. Включваме в M всеки елемент, който може да се получи като резултат от прилагане на операция от \mathcal{F} над елемент от M .
4. В съвкупността няма други елементи освен включените в т.1 и т.3.

Така получената съвкупност M е множество.

Принцип на математическата индукция:

Нека P е твърдение, чиято истинност е проверяема за всяко естествено число. Твърдението е вярно за всяко естествено число, ако е в сила:

1. Вярно е $P(0)$
2. Ако е вярно $P(k)$, то е вярно и $P(k+1)$.

Принцип на силната индукция:

Нека P е твърдение, чиято истинност е проверяема за всяко естествено число. Твърдението е вярно за всяко естествено число, ако е в сила:

3. Вярно е $P(0)$
4. Нека $n > 0$ е естествено число. Ако е вярно $P(k)$ за всяко естествено число $k: 0 \leq k < n$, то е вярно и $P(n)$.

Задача: Да се докаже по индукция

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{за } n \geq 1$$

Доказателство:

$$P(n): \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1. База: Проверяваме верността на $P(1)$

$$\frac{1}{1*2} = \frac{1}{1+1}$$

Следователно $P(1)$ е вярно.

2. Индукционно предположение: $P(k)$ е истина, т.е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

3. Индукционна стъпка: Ще докажем верността на $P(k+1)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ & = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ & = \frac{1}{k+1} \left\{ k + \frac{1}{k+2} \right\} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \\ & = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

4. Заключение: $P(n)$ е вярно за всяко $n \geq 1$.

Задача: Да се докаже по индукция, че всяко естествено число $n \geq 2$ е просто или е произведение на прости числа.

Доказателство:

$P(n)$: n е просто или е произведение на прости числа.

1. База: $P(2)$ е вярно, тъй като числото 2 е просто.
2. Индукционно предположение: Нека $n > 2$ и $P(k)$ е вярно за всяко k : $2 \leq k < n$.
3. Индукционна стъпка: Ще докажем, че е вярно $P(n)$.
Ако n е просто, то $P(n)$ е вярно.
Да предположим, че n не е просто. Тогава $n = xy$, където $2 \leq x < n$; $2 \leq y < n$. Съгласно индукционното предположение, $P(x)$ и $P(y)$ са верни, т.е. x и y са прости или произведение на прости числа. Следователно и n е произведение на прости числа. И така $P(n)$ е вярно.
4. Заключение: $P(n)$ е вярно за всяко $n \geq 1$.

Задачи:

1. Да се приложи принципа на математическата индукция за доказване на следните твърдения:

$$a) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$b) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{2^2}$$

$$c) 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$d) a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

$$e) a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + nd) = \frac{(n+1)(2a + nd)}{2}$$

$$f) 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$g) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$h) 3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = n(2n+1)$$

$$i) 1 * 2 + 2 * 3 + \dots + n * (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$j) 1 + 2 * 3 + 3 * 5 + \dots + n(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

$$k) 1 * 2^2 + 2 * 3^2 + \dots + n * (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$$

2. Числата на Фибоначи се определят по следния начин:

$$F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \mid n \geq 2$$

Да се докажат по индукция следните твърдения:

$$a) F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$b) F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

3. Числата на Лукас се определят по следния начин:

$$L_0 = 2; L_1 = 1; L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \mid n \geq 2$$

Да се докажат по индукция следните твърдения:

$$a) L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 1$$

$$b) L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \mid n \geq 1$$

4. Да се докажат по индукция следните твърдения:

$$a) n < 2^n, \forall n \geq 1$$

$$b) 2^n < n!, \forall n \geq 4$$

- c) $3^n < n!, \forall n \geq 7$
- d) $2^n > n^2, \forall n \geq 5$
- e) $n! < n^n, \forall n \geq 2$

5. Докажете по индукция, че за всяко естествено число n е в сила следното твърдение:

- a) $2^{2n} - 1$ се дели на 3
- b) $2^{3n} - 1$ се дели на 7
- c) $n^3 + 2n$ се дели на 3
- d) $n^5 - n$ се дели на 5
- e) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ се дели на 7

Декартово произведение на множества:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Асоциативен вариант на операцията Декартово произведение:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \mid a_{i1} \in A_1, a_{i2} \in A_2, \dots, a_{in} \in A_n\}$$

Многократно обединение, сечение и декартово произведение.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists j \in I \mid x \in A_j\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall j \in I \mid x \in A_j\}$$

$$\prod_{i \in I} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid \forall i \in I \mid a_i \in A_i\}$$

Покритие на множество A :

$$\mathfrak{K} = \{S_i \mid S_i \subseteq A, \forall i \in I\}$$

$$- \forall i \in I \mid S_i \neq \emptyset$$

$$- \bigcup_{i \in I} S_i = A$$

Разбиване на множество:

$$\mathfrak{K} = \{S_i \mid S_i \subseteq A, \forall i \in I\}$$

$$- \forall i \in I \mid S_i \neq \emptyset$$

$$- \forall i, j \in I \mid i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$$

$$- \bigcup_{i \in I} S_i = A$$

Задачи:

1. За произволно множество A са в сила следните твърдения:

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

$$\emptyset \times A = \emptyset$$

2. За произволни множества A , B и C са в сила следните твърдения:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

f) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

3. Дадени са множествата: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$ и $C = \{3, 4, 7\}$. Да се определят следните множества:

a) $A \times B$; $B \times A$

b) $A \cup (B \times C)$; $(A \cup B) \times C$

c) $(A \times C) \cup (B \times C)$

4. Дадени са множествата: $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{a, x, y, z\}$, $A_3 = \{?, !\}$.

Определете следните множества:

a) $A_1 \times A_2 \times A_3$

b) $A_2 \times A_2$ или A_2^2

c) $A_3 \times A_3 \times A_3 \times A_3$ или A_3^4

5. Да се докаже, че $A \times B \subseteq C \times D$ точно тогава, когато $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$.

6. Дадени са множествата: $U = \{a, 4, b, 3, c, 2, d, 1\}$, $X = \{c, 2, b, 1\}$ и $Y = \{d, a, 1\}$. Да се намери броя на елементите, принадлежащи на всяко от множествата:

$$A = 2^{(\overline{X \cap Y^U}) \times (\overline{X \cup Y^U})} \quad \text{и} \quad B = 2^{\overline{X \cap Y^U}} \times 2^{\overline{X \cup Y^U}}$$

7. Проверете истинността на следните твърдения:

a) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$

b) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$

c) $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$1) x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow$$

$$\underline{x \in A \wedge x \in \bar{B}} \wedge$$

$$x \in A \cap \bar{B}$$

$$2) x \in A \cap \bar{B} \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \bar{B} \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow$$

$$x \in A \setminus B$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{A \setminus B} =$$

$$= A \cap \overline{A \cap \bar{B}} =$$

$$= A \cap \bar{A} \cup B =$$

$$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) =$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

правильно

(не заучивать)

$$\exists 1) 2^A = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\} \}$$

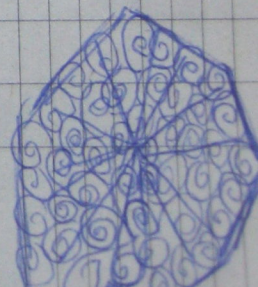
$$A = \{ \{a, b, c\}, \{ \{a\}, \{b\} \} \}$$

$$2^A = \{ \emptyset, \{ \{a\} \}, \{ \{b\} \}, \{ \{a\}, \{b\} \} \}$$

$$A = \{ \{2\} \} = \{ \emptyset, \{2\} \}$$

$$2^A = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{2\} \}, \{ \emptyset, \{2\} \} \}$$

$$\mathcal{P}^0 = \emptyset \cup \mathcal{P}^0 =$$



Построяване на естествените числа чрез аксиомата за индукцията.

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Принципът за математическата индукция

- 1) Дава база: $P(0)$
- 2) Индукц. предположение $P(n)$
- 3) Индукционната стъпка $P(n+1)$
- 4) Заключение: $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$

Принципът на силата на индукция

- 1) База $P(0)$
- 2) Инд. предп. $n \in \mathbb{N} \quad P(k) \mid 0 \leq k \leq n$
- 3) Инд. стъпка $P(n+1)$
- 4) Заключение: $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad n \geq 1$$

1. База: $P(1)$

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2$$

$1 = 1$ - вярно

2) Утг. оор нэг.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \cancel{1}$$

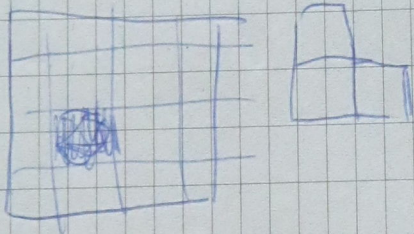
3) Утг. амьтга $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{?}{=} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

$$(n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1) \right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right)$$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \rightarrow \text{горгогтоо}$$

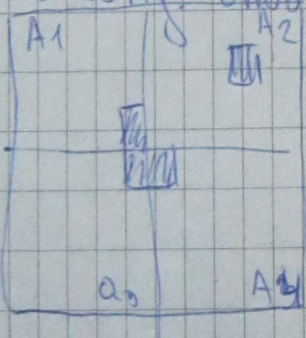
4)



1. Бага $P(0)$

2. Утг. нэгж. n кв. эр. 2^n нь 2^n эгнэ нэгжтэ
 нэгж 2^n нь 2^n эр.

3. Утг. амьтга $P(n+1)$?



Тема 3: РЕЛАЦИИ

Дефиниция на n -арна релация.

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Бинарна релация: $R \subseteq A \times B$

Свойства на бинарните релации от вида $R \subseteq A \times A$:

- *рефлексивна* – ако $\forall a \in A, (a, a) \in R$;
- *симетрична* – ако $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;
- *транзитивна* – ако $\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$;
- *антирефлексивна* - $\forall a \in A, (a, a) \notin R$;
- *антисиметрична* – ако $\forall a, b \in A, a \neq b, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$;
- *силно антисиметрична* – ако $\forall a, b \in A, a \neq b$ е в сила точно едно от двете: $(a, b) \in R$ или $(b, a) \in R$

Представяне на бинарни релации $R \subseteq A \times B$ с матрици от нули и единици:

$$M_R = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако } a_i R b_j \\ 0 & \text{ако } \neg a_i R b_j \end{cases}$$

Представяне на бинарни релации с диаграми:

Релация на еквивалентност. Класове на еквивалентност:

$$R \subseteq A \times A; \quad [a] = \{x \in A \mid (x, a) \in R\}$$

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

Релации на наредба – частична и пълна. Минимален и максимален елемент.

Рефлексивно, симетрично и транзитивно затваряне на релация.

Задачи:

1. Нека са дадени множествата $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6\}$ и релацията $R \subseteq A \times B$, $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2)\}$. Намерете представянето на релацията с диаграма и с бинарна матрица.

2. Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Начертайте диаграма на всяка от следните бинарни релации с домени множеството A и определете какви свойства притежава:

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$

c) $R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

d) $R_4 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

e) $R_5 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 4)\}$

f) $R_6 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

g) $R_7 = \{(a, b) \mid a + b \geq 5\}$

3. Коя е матрицата, представяща релацията $R = \{(a, a) \mid \forall a \in A\}$

4. Каква е матрицата, представяща релация със съответното свойство:

- симетричност;
- антисиметричност;
- силна антисиметричност.

5. Определете верния отговор:

Множеството на антисиметричните релации над множеството A е подмножество на:

- a) симетричните релации;
- b) несиметричните релации;
- c) нито едно от горните множества.

6. Дадена е релацията $R \subseteq A \times A$. Проверете верността на следните твърдения:

- a) Ако релацията R е рефлексивна, то релацията \bar{R} не е рефлексивна.
- b) Ако релацията R е симетрична, то релацията \bar{R} е симетрична.
- c) Ако релацията R е антисиметрична, то релацията \bar{R} е антисиметрична.
- d) Ако релацията R е силно антисиметрична, то релацията \bar{R} е силно антисиметрична.
- e) Ако релацията R е транзитивна, то релацията \bar{R} не е транзитивна.

7. Дадени са релациите $R \subseteq A \times A$ и $S \subseteq A \times A$. Проверете верността на следните твърдения:

- Ако R и S са симетрични, то и $R \cup S$ е симетрична.
- Ако R и S са транзитивни, то и $R \cup S$ е транзитивна.
- Ако $R \cup S$ е рефлексивна, то R или S е рефлексивна.
- Ако $R \cap S$ е рефлексивна, то R и S са рефлексивни.
- Ако R и S са антисиметрични, то и $R \cap S$ е антисиметрична.

8. Определете кои от свойствата симетричност, рефлексивност и транзитивност притежава всяка от следните релации:

- Релацията „по-малко” в множеството на реалните числа;
- Релацията „по-малко или равно” в множеството на реалните числа;
- Празната релация в произволно непразно множество;
- Релацията $A \times A$, където A е произволно непразно множество;
- Релацията \subseteq в множеството на всички подмножества на \mathbb{N} .

9. Релацията R е дефинирана в множеството на всички хора по следния начин: aRb точно тогава, когато a и b са женени, или са били женени. Кое от следните твърдения е вярно:

- R е транзитивна;
- за $\forall a, b, c$ | ако aRb и $bRc \Rightarrow aRc$;
- нито едно от горните две.

10. Дадено е множеството $A = \{a, b, c\}$. Дайте пример за релация в множеството A , която притежава всяко от изброените свойства:

- симетрична и антисиметрична;
- симетрична, но не антисиметрична;
- антисиметрична, но не симетрична;
- нито симетрична, нито антисиметрична.

11. Дадена е релацията $R \subseteq A \times A$, която е симетрична и антисиметрична.

- докажете, че релацията е транзитивна;
- опишете вида на матрицата, която представя релацията.

12. Докажете, че следната релация е релация на еквивалентност и определете класовете на еквивалентност:

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a + b \text{ е четно}\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $A = \{0, 5, 8, 9, 10, 11\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ е кратно на } 3\}$
- $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a = b \pmod{5}\}$
- $A = \{1, 9, 21, 44, 50, 99, 101\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid (a - b) \pmod{10} = 0\}$

13. Проверете, че следната релация е релация на наредба и определете вида ѝ – частична или пълна:

- a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- b) $A = \{1, 2, 6, 12, 24\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$
- c) $A = \{1, 2, 6, 10, 20, 30\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$
- d) $A = \{1, 5, 7, 10, 35, 70\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$

14. Намерете минималните и максимални елементи на следните релации:

- a) $A = \{2, 4, 5, 10\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$
- b) $A = \{2, 4, 12\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$
- c) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$

15. Дадено е множеството $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и следната релация:

$$R \subseteq A \times A, R = \{(a, b) \mid 5 \text{ дели } a + 2b\}$$

Да се представи релацията с диаграма и да се намери нейното рефлексивно, симетрично и транзитивно затваряне.

16. Нека е дадено множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Намерете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на следните релации с домени множеството A :

- a) $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$
- b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (4, 3)\}$
- c) $R_3 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- d) $R_4 = \{(1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

17. Намерете указаното затваряне на релацията „по-малко от” в множеството \mathbb{R} :

- a) Рефлексивно;
- b) Симетрично;
- c) Транзитивно;
- d) Симетрично и транзитивно.

$A \times B$ - генеративно произведение

①

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

$$\emptyset \times A = \emptyset$$

①

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ - генеративно

1) Если $x \in A \times (B \cup C) \Rightarrow$

$$x = (a, z) \mid a \in A \wedge (z \in B \vee z \in C) =$$

$$\Rightarrow (a, z) \in A \times B \vee (a, z) \in A \times C \Rightarrow$$

$$x \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

2) $x \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow$

$$x \in (A \times B) \vee x \in (A \times C)$$

$$\text{или } x \in A \times B \Rightarrow x = (a, b) \mid a \in A, b \in B$$

$$\text{или } x \in A \times C \Rightarrow x = (a, c) \mid a \in A, c \in C$$

$$x = (a, z) \mid a \in A, z \in (B \cup C) \Rightarrow$$

$$x \in A \times (B \cup C)$$

$$\Rightarrow A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

② $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ - генеративно

$$A = \{a, b\} \quad B = \{c, d\}$$

$$2^{A \cup B} = 2^{\{a, b, c, d\}} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} \}$$

$$2^A \cup 2^B = 2^{\{a, b\}} \cup 2^{\{c, d\}} =$$

$$= \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \} \cup \{ \emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\} \}$$

$$\{b, c, d\} \in 2^{A \cup B}$$

$$\{b, c, d\} \notin 2^A \cup 2^B$$

Релация

Релация - произволно подмножество на декартово произведение - $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ - n -арна релация

$R \subseteq A \times B$ - бинарна релация

Свойства на бинарните релации

1) Рефлексивност

$$\forall a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$$

Нерефлексивност - $\exists a \in A \mid (a, a) \notin R$

Антирефлексивна релация - $\forall a \in A \mid (a, a) \notin R$

2) Симетричност

$$\forall a, b \in A \mid \text{ако } (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

$$(b, a) \notin R$$

- Несиметрична - $\exists a, b \in A \mid (a, b) \in R, (b, a) \notin R$

- антисиметричност - $\forall a, b \in A \mid (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$

- силно антисиметричност

$\forall a, b \in A \mid b$ сила е точно едно от:

$$(a, b) \in R \text{ или}$$

$$(b, a) \in R$$

	b_1	b_2	\dots	b_j	\dots	b_m	
$R \subseteq A_n \times B$	a_1						M_R
	a_2						
	\vdots						
	a_i			0			
	a_n						

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } a_i R b_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

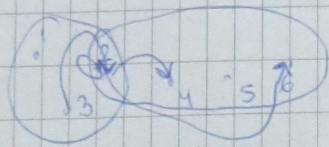
3) Транзитивност - $\forall a, b, c \in A \Rightarrow \text{ако } (a, b) \in R \text{ и } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

- Нетранзитивна - $\exists a, b, c \in A \mid (a, b) \in R \text{ и } (b, c) \in R, \text{ но } (a, c) \notin R$

$$① A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$R \subseteq A \times B$$

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2)\}$$



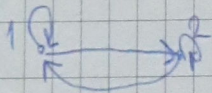
$$M_R = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

представяне на релацията с диаграма

представяне на релацията с матрица

$$② A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$a) R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

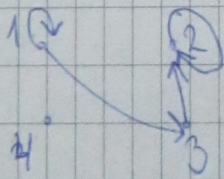


1) Рефлексивна

2) Симетрична

3) Транзитивна

$$b) R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$$

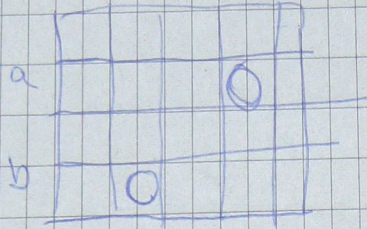


1) Нереклексивна

2) Антисиметрична

3) Нетранзитивна

Ako $a R b \Rightarrow b R a$ $R \subseteq A \times A$



ako $a R b$ u $b R a \Rightarrow$

$(m_{ij} = m_{ji} \mid i \neq j) = \begin{cases} (0, 1) \\ (1, 0) \\ (0, 0) \end{cases} \rightarrow$ ~~atribuci nemoguća~~ ~~relacija~~

~~gaga~~

$$\begin{aligned} R &\subseteq A \times A \\ \bar{R} &= A^2 \setminus R \end{aligned}$$

a) $\forall a \in A: (a, a) \in R$
 $\exists a \in A: (a, a) \notin R$

b) $\forall a, b \in A: (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

\bar{R} e sim.

Don. ze $\exists (a, b) \in A: a R b$, to $b R a$
 u. $b R a$, to $a R b \rightarrow$ ~~formulacija~~

c) $(a, b) \quad (b, c) \Rightarrow (a, c)$



R u \bar{R} sa tranzitivnosti

$R \subseteq R^2$ - ~~Hereditarna~~

- ~~ako to atribuci nemoguća~~; ~~atribuci~~
 - ~~atribuci nemoguća~~
- $1 \leq (2 \rightarrow 0)$

$A \times A \subseteq A^2$ - рефлексивност
- транзитивна

$$A = \{0, 1, \dots, 6\}$$

$$a R b \Leftrightarrow a + b = 2k$$

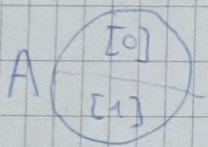
$$1) \forall a \in A: a + a = 2k$$

$$2) \forall a, b \in A: \text{ако } a + b = 2k \Rightarrow b + a = 2k$$

$$3) a, b, c \in A: \text{ако } a + b = 2k_1 \text{ и } b + c = 2k_2 \Rightarrow a + c = ?$$
$$\underbrace{a + b + b + c}_{2b} = 2r \Rightarrow a + c = 2t$$

$$R[0] = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$R[1] = \{1, 3, 5\}$$



$$13) A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R \subseteq A^2$$

$$a R b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$1) \forall a \in A: a \leq a \Rightarrow a R a$$

$$2) \forall a, b \in A, \text{ или } a \leq b$$
$$\text{или } b \leq a$$

$$3) \forall a, b, c \in A, \text{ ако } a \leq b \text{ и } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$14) A = \{1, 2, 6, 10, 20, 30\}$$

$$R \subseteq A^2$$

$$a R b \Leftrightarrow a | b$$

$$1) \forall a \in A: a | a \Rightarrow a R a$$

$$2) 2 | 6 \text{ и } 6 \nmid 2 \Rightarrow \text{не е сим.}$$

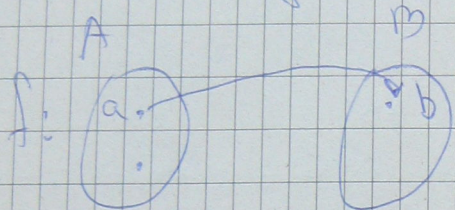
$$3) \text{ ако } a | b \text{ и } b | c \Rightarrow a | c$$

симметрична импликација $6 \nmid 10$ и $10 \nmid 6 \Rightarrow$ антисиметрична

Функция

$R \subseteq A \times B$ е функция когато $\forall a \in A, b_1, b_2 \in B$
ако $(a, b_1) \in R$ и $(a, b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2$

Това е функция - $\forall a \in A: \exists! b \in B: a R b$



$$f: A \rightarrow B$$

A - гоним, целеуказвателна област
 B - когоним, изобразителна

$$f(A) \subseteq B$$

f - инективна:

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow$$

$$f(a_1) \neq f(a_2)$$

f - сюръективна:

$$\forall b \in B: \exists a \in A:$$

$$f(a) = b$$

$$A \times B ((a, b) \ a \in A, \ b \in B)$$

$c \in A$

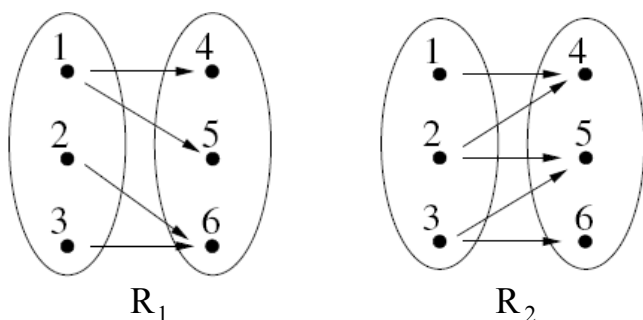
$e \in B$

Тема 4: ФУНКЦИИ

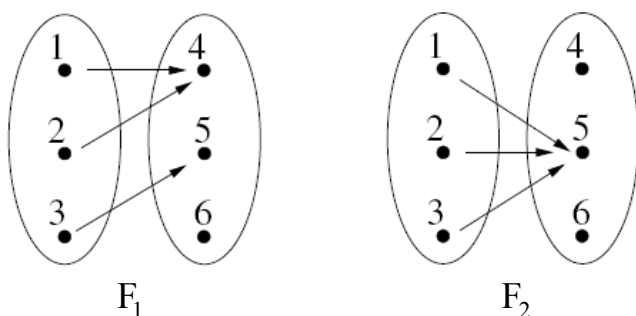
Дефиниция на функция.

Релацията $R \subseteq A \times B$ е функция точно тогава, когато: $\forall a \in A, b_1, b_2 \in B$ ако $(a, b_1) \in R$ и $(a, b_2) \in R$, то $b_1 = b_2$.

- Частична функция;
- Тотална функция: $\forall a \in A \Rightarrow \exists ! b \in B \mid (a, b) \in R$



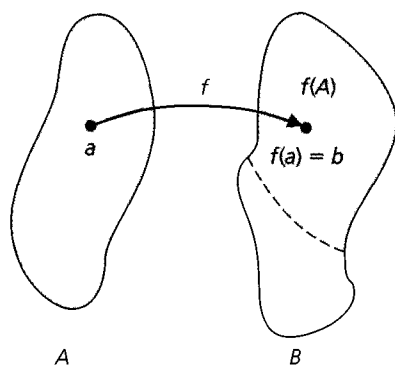
Дијаграми на релации, които не са функции



Дијаграми на релации, които са функции

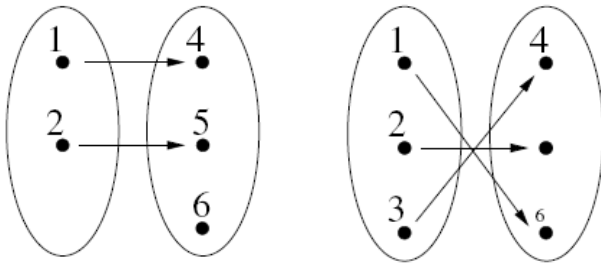
Нека $f : A \rightarrow B$

- A – дефиниционно множество/ дефиниционна област/домен
- B – множество на значенията/ кообласт/кодомен

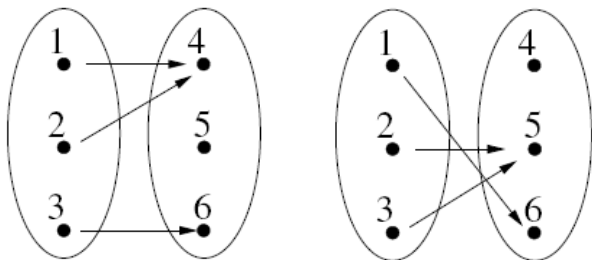


Видове функции:

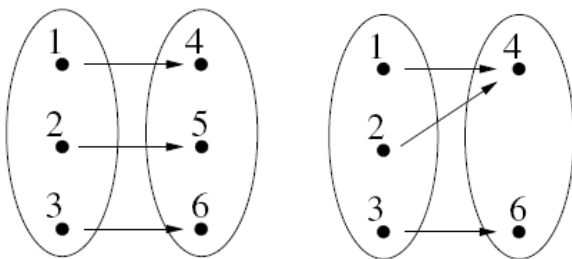
- Инекция - $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$
- Сюрекция - $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
- Биекция - $\forall b \in B : \exists ! a \in A : f(a) = b$



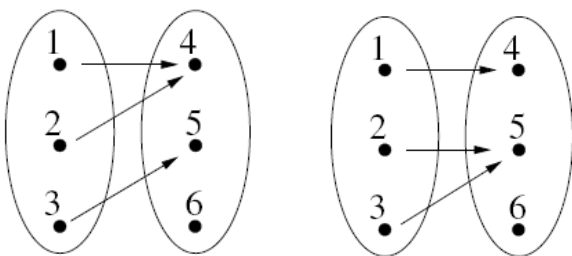
Диаграми на функции, които са инекции



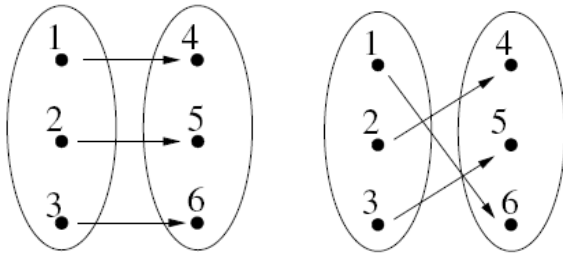
Диаграми на функции, които не са инекции



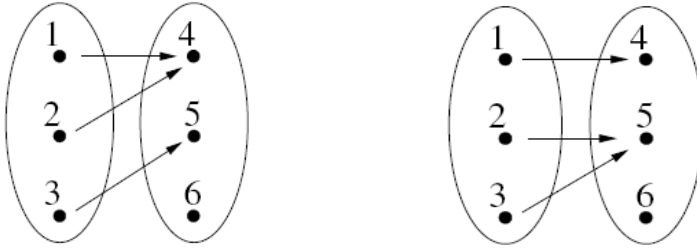
Диаграми на функции, които са сюрекции



Горните функции не са сюрекции



Диаграми на функции, които са биекции



Диаграми на функции, които не са биекции

Задачи

Задача 1: Определете множеството от всички функции, с дефиниционно множество A и множество на значенията B :

1. $A = \{1\}, B = \{2, 3\}$
2. $A = \{1, 2\}, B = \{3\}$
3. $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$
4. $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b\}$

Задача 2: Напишете в явен вид като изберете подходящо представяне всички функции f , които са

- a) инекции;
- b) сюрекции;
- c) биекции;

и са определени по следния начин:

1. $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b\}$
2. $f: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$

Задача 3: Нека P е множеството на всички хора, които някога са живели на Земята. За всяка от следните релации да се определи дали е функция и ако да – то каква.

- a) $\forall a, b \in P, aRb \Leftrightarrow b$ е дядо на a
- b) $\forall a, b \in P, aRb \Leftrightarrow b$ е майка на a
- c) $\forall a, b \in P, aRb \Leftrightarrow b$ е първото дете на a

d) $\forall a, b \in P, aRb \Leftrightarrow b$ е множеството от всички деца на а

Задача 4: Напишете в явен вид като изберете подходящо представяне, всички функции $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{a,b,c\}$, които са биекции.

Задача 5: Нека $S \subseteq U$ е произволна множество. Характеристична функция на S се нарича функцията $\chi_S: U \rightarrow J_2$, определена по следния начин:

$$\chi_S = \begin{cases} 1 & | x \in S \\ 0 & | x \notin S \end{cases}$$

Да се провери дали за произволни множества $A, B \subseteq U$ е вярно следното:

- a) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$
- b) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$
- c) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$
- d) $\chi_{A \Delta B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$

Задача 6: Дадени са множествата: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{1, 2\}$. Намерете функции с указаните свойства, като изберете измежду горните множества домен и кодомен:

- a) Инекция, но не сюрекция;
- b) Сюрекция, но не инекция;
- c) Биекция;
- d) Нито инекция, нито сюрекция.

Задача 7: Покажете, че всяка от изброените функции от вида $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ има указаните свойства:

- a) $f(x) = 2x$ инекция, но не сюрекция
- b) $f(x) = x+1$ инекция, но не сюрекция
- c) $f(x) = \lfloor (x/2) \rfloor$ сюрекция, но не инекция
- d) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{ако } x \text{ е нечетно,} \\ x+1 & \text{иначе} \end{cases}$ биекция

Задача 8: За всяка от изброените по-долу функции определете дали е инекция или сюрекция:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : f(x) = \lfloor x \rfloor$
- b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f(x) = x \bmod 10$
- c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} : f(x) = |x+1|$
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2$

e) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2$

f) $f: A \rightarrow 2^A$, където A е произволно множество и $f(x) = \{x\}$

Задача 9: Нека \mathbb{R}^+ и \mathbb{R}^- са съответно множествата на положителните и отрицателните реални числа. Ако $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и нека $(a \div b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ Покажете, че всяка от изброените по-долу функции е биекция:

a) $f: (0 \div 1) \rightarrow (a \div b) : f(x) = (b-a)x + a$

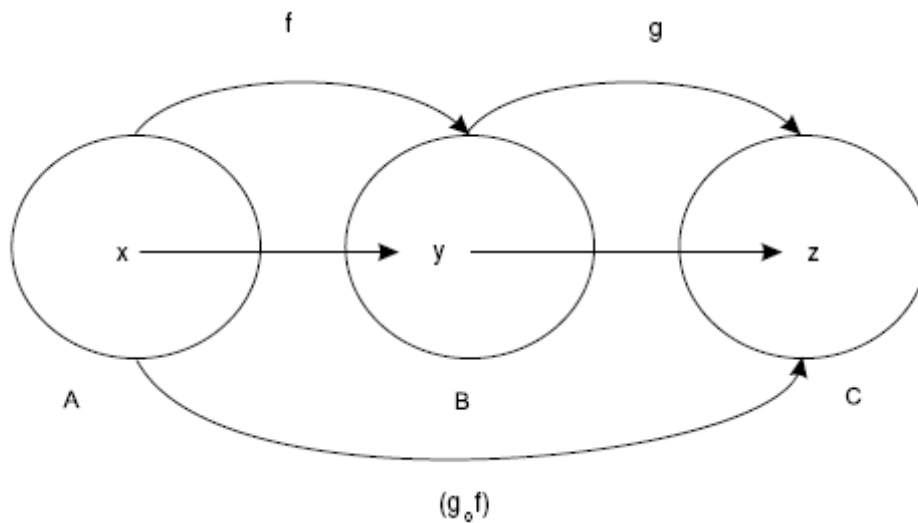
b) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow (0 \div 1) : f(x) = 1/(x+1)$

c) $f: (0 \div 1/2) \rightarrow \mathbb{R}^- : f(x) = 1/(2x-1) + 1$

Композиция на функции:

Нека $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ Композиция на функциите f и g е следната функция:

$$g \circ f: A \rightarrow C \quad g \circ f(x) = g(f(x))$$

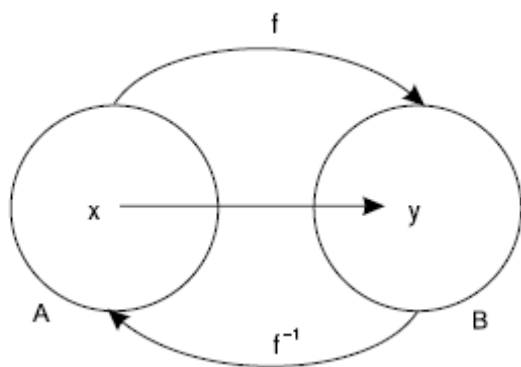


Пример: Нека са дадени функциите $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : f(x) = x+1$ $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : f(x) = x^2$
 $g \circ f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : f(x) = (x+1)^2$

Обратна функция:

Нека $f: A \rightarrow B$ е биекция. Обратна на f е функция, дефинирана по следния начин:

$$f^{-1}: B \rightarrow A : f^{-1}(y) = x : f(x) = y$$



Пример: Нека E е множеството на четните естествени числа и е дадена функцията $f: \mathbb{N} \rightarrow E : f(x)=2x$. Нейната обратна функция е $f^{-1}: E \rightarrow \mathbb{N} : f^{-1}=1/2x$

Мощност на множество

Равномощни множества: $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists$ биекция $f: A \rightarrow B$

Крайни множества:

1. $A = \emptyset$, тогава $|A| = 0$
2. \exists биекция $f: A \rightarrow I_n$, тогава $|A| = n$

Изброими множества:

\exists биекция $f: A \rightarrow \mathbb{N}$, тогава $|A| = \aleph_0$

Задача: Намерете мощността на всяко от указаните множества, като намерите биекция между това множество и I_n за някое n .

- a) $\{2x+5 \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq 2x+5 \leq 100\}$
- b) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, 0 \leq x^2 \leq 500\}$
- c) $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots, 44, 47\}$

Задача: Покажете, че всяко от следващите множества е изброимо, като установите биекция между него и множеството на естествените числа:

- a) Множеството на четните естествени числа
- b) Множеството на отрицателните цели числа
- c) Множеството на целите числа
- d) Множеството на нечетните цели числа
- e) Множеството на четните цели числа
- f) Множеството на всички думи над азбуката $\{a\}$

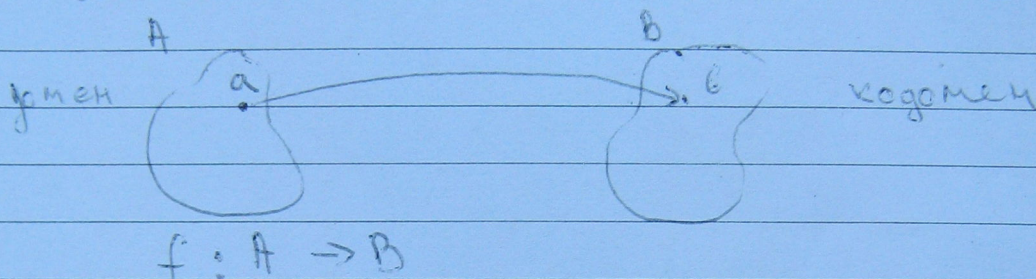
Функции

$$R \subseteq A \times B$$

2. def $\forall a \in A : \exists$ най-много 1 ел. $b \in B$
 $a R b$

$\forall a \in A, b_1, b_2 \in B : \text{ако } a R b_1 \text{ и } a R b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

1. def $\forall a \in A \exists! b \in B : a R b$



$$f(A) \subseteq B$$

Инъекция

$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Сурекция

$\forall b \in B : \exists a \in A f(a) = b$

$$A = \{1\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

Пример 1

1. попул. $A \times B = \{(1, 2), (1, 3)\}$

$\times R_1 = \emptyset, R_2 = \{(1, 2)\}, R_3 = \{(1, 3)\}, \times R_4 = \{(1, 2), (1, 3)\}$

$f_1: A \rightarrow B \quad f_1(1) = 2$

$f_2: A \rightarrow B \quad f_2(1) = 3$

4. попул.

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, b\}$

$A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_3 = \{c\}, A_4 = \{a, b\}, A_5 = \{a, c\}$

$A_6 = \{b, c\}, A_7 = \{a, b, c\} \quad A_i \subseteq A, i \in I_7$

$$\begin{aligned}
 f_{1,1} &= \{(a, a)\} & f_{1,2} &= \{(a, b)\} \\
 f_{2,1} &= \{(b, a)\} & f_{2,2} &= \{(b, b)\} \\
 f_{3,1} &= \{(c, a)\} & f_{3,2} &= \{(c, b)\} \\
 f_{4,1} &= \{(a, a), (b, a)\} \\
 f_{4,2} &= \{(a, b), (b, b)\} \\
 f_{4,3} &= \{(a, a), (b, b)\} \\
 f_{4,4} &= \{(a, b), (b, a)\} \\
 f_{5,1} &= \{(a, a), (c, a)\} \\
 f_{5,2} &= \{(a, b), (c, b)\} \\
 f_{5,3} &= \{(a, a), (c, b)\} \\
 f_{5,4} &= \{(a, b), (c, a)\} \\
 f_{6,1} &= \{(b, a), (c, a)\} \\
 f_{6,2} &= \{(b, b), (c, b)\} \\
 f_{6,3} &= \{(b, a), (c, b)\} \\
 f_{6,4} &= \{(b, b), (c, a)\}
 \end{aligned}$$

	$f_{7,1}$	$f_{7,2}$	$f_{7,3}$	$f_{7,4}$	$f_{7,5}$	$f_{7,6}$	$f_{7,7}$	$f_{7,8}$
a	a	b	a	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b	a	b
c	a	b	b	a	a	a	b	b

Тема 5: КОМБИНАТОРИКА
Основни принципи на Изброителната Комбинаторика

Принцип на Дирихле: Дадени са две множества X и Y : $|X| = n$, $|Y| = m$, $n > m$. За произволна функция $f: X \rightarrow Y \mid \exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$

Модификация: (Принцип на чекмеджетата) Нека имаме n предмета и m чекмеджета ($n > m$). Както и да разположим предметите в чекмеджетата, ще има поне едно чекмедже, което съдържа поне два предмета.

Принцип на биекцията: Нека $|X| = n$ и $|Y| = m$. Съществува функция биекция $f: X \rightarrow Y$ точно тогава, когато $m = n$.

Принцип на събирането: Нека $\mathcal{K} = \{S_i, i \in I\}$ е разбиване на множеството A .
Тогава $|A| = \sum_{i \in I} |S_i|$.

Модификация: Ако за да се изпълни задачата t трябва да се изпълни точно една от задачите t_1, t_2, \dots, t_n , които се изпълняват съответно по $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ начина, то задачата t се изпълнява по $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ начина.

Принцип на изваждането: (Принцип на допълнението) Нека A е крайно множество и $A' \subseteq A$. Тогава $|A \setminus A'| = |A| - |A'|$.

Принцип на умножението: (Принцип на декартовото произведение) Нека X и Y са крайни множества, $|X| = n$, $|Y| = m$. Тогава $|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = nm$.

Модификация: Ако за да се изпълни задачата t трябва да се изпълни всяка от независимите задачи t_1, t_2, \dots, t_n , които се изпълняват съответно по $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ начина, то задачата t се изпълнява по $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ начина.

Модификация: Ако задачите t_i се изпълняват последователно, то α_i показва по колко начина се изпълнява t_i в зависимост от изпълнението на t_1, \dots, t_{i-1} .

Следствие 1: Нека $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$. Тогава $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \dots m_n$.

Следствие 2: Нека $|A| = m$. Тогава $|A^n| = m^n$.

Принцип на делението: Ако при преброяване на елементите на A всеки елемент е преброен m ($m > 0$) пъти и е получено числото k , то $|A| = k/m$.

Задачи:

Задача 1: Колко са двоичните вектори с дължина n , които започват и завършват с различни символи.

Решение:

За да решим задачата ще приложим основните принципи за броене.

Търсеното множество X може да се представи като: $X = A \cup B$, където

$$A = \{\text{двоичните вектори, започващи с 1 и завършващи с 0}\}$$

$$B = \{\text{двоичните вектори, започващи с 0 и завършващи с 1}\}$$

Построяването на произволен вектор от A е задача, чието изпълнение се свежда до изпълнението на всяка от n задачи за запълване на съответната позиция във вектора. Задачите за запълване на първата и последната позиции се решават по единствен начин – там трябва да има съответно 1 или 0. Всяка от останалите $n-2$ задачи се решава по два начина – в съответната позиция можем да поставим 0 или 1. И така, прилагайки принципа на произведението, получаваме:

$$|A| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 \cdot 1 = 2^{n-2}$$

Аналогично, за B получаваме:

$$|B| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 \cdot 1 = 2^{n-2}$$

Множествата A и B нямат общи елементи, така че можем да приложим принципа на събирането:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

Задача 2: Колко са плочките на доминото.

Задача 3: В множество от n човека е дефинирана релация познанство, която е симетрична. Да се докаже, че в множеството има поне двама души, които имат равен брой познати.

Задача 4: Да се намери броя на нечетните числа в интервала $[1_000, 10_000]$, които нямат повтарящи се цифри.

Задача 5: Да се намери броя на четните числа в интервала $[1_000, 10_000]$, които нямат повтарящи се цифри.

Комбинаторика

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$$

$$f: X \rightarrow \text{Познати}$$

$$|X| = n$$

бр. познания $\in [0, n-1]$

1. Нека \exists човек няма познати

сл. \nexists др. има макс $n-2$ познати

сл. бр. познания $\in [0, n-2]$

2. \exists човек който познава всички

сл. не \exists човек с нула познания

сл. бр. познати $\in [1, n-1]$

$$f: |X| \rightarrow \text{Позн.}$$

$$|X| = n$$

$$|\text{Позн.}| \leq n-1$$

$\Rightarrow \exists$ поне двама
човека с равен
брой познати

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

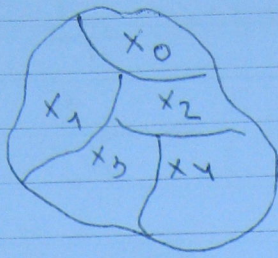
$$P_n = n!$$

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$A_n^m = n^m$$

$$2) C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13 \text{ милиона} +$$

$$3) - a) C_{10}^4$$



$$|x_i| = C_8^i \cdot A_2^{8-i}$$

$$|x_{\neq}| = \sum_{i=0}^4 C_8^i \cdot A_2^{8-i}$$

Заг 4. $\textcircled{1,0} = X$

$\{0, x\}$: 0 - 9 слова
X - 6 слова.

$$C_{15}^6 = C_{15}^9$$

Заг 5 - base

$$C_4^1 \cdot C_{48}^9$$

73

$$53 \cdot 63^{n-1}$$

83. a) $\underbrace{1}, \underbrace{2}, \dots, \underbrace{20}$

$$\frac{\sqrt{12} \cdot 20}{P_5 \cdot P_7}$$

$$C_{20}^7 \cdot C_{13}^5$$

103

x	f(x)
a_1	
a_2	
\vdots	
a_i	$f(a_i)$
\vdots	
a_n	

$f: A \rightarrow B$ $|A| = n$ $|B| = k$

$A_{|A|}^{|B|}$ - все функции

$V_{|B|}^{|A|}$ - инъекции

$P_{|A|}^{|B|}$ - сюръекции

133

$$S_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

173. a) S_9^n

б) C_9^n

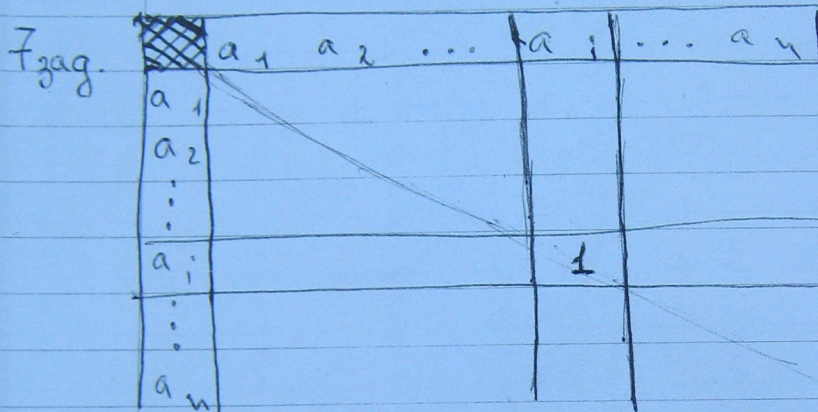
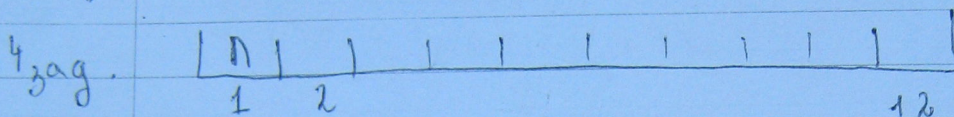
в) S_{10}^n

г) C_{10}^n

1 zag. $\frac{P_n}{n} = (n-1)!$

2 zag. $\frac{P_n}{2^n} = \frac{1}{2} (n-1)!$

3 zag. = 2 zag.



$R \in A \times A$
 $|A| = n$

$a) 2^{n^2}$
 $b) 2^{n^2-n}$
 $c) 2^{\frac{n^2+n}{2}}$

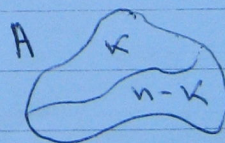
симметричных

3 zag 6. $|2^A| = \sum_{i=0}^n C_n^i$

$|2^{B \cup C}| = \sum_{k=0}^{m+k} C_{m+k}^k$

$|2^A \times 2^B|$

14/a $C_n^k = C_n^{n-k}$ 20.04.2010г.



$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Рассм. доам. $B_{I_1} = \{B_s \subseteq A \mid |B_s| = k\}$

$C_{I_2} = \{C_t \subseteq A \mid |C_t| = n-k\}$

$f: B \rightarrow C$

$f(B_s) = (A \setminus B_s) = \bar{B}_s$

f е сюръекция

$|B| = C^k$

$|C| = C_{n-k}^{n-k}$

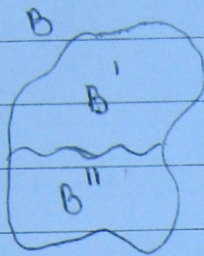
сн. $|B| = |C|$

сн. $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B_I = \{B_S \subseteq A \mid |B_S| = k\}$$



$$B' = \{B_S \in B \mid a_1 \in B_S\}$$

$$B'' = \{B_S \in B \mid a_1 \notin B_S\}$$

$$\text{cl. } |B| = |B'| + |B''|$$

$$|B'| = C_{n-1}^{k-1}$$

$$|B''| = C_{n-1}^k$$

$$|B| = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$\text{cl. } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

A

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

$$N(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \dots, \bar{s}_n) = |A| - \sum_{s_i \in I_n} N(s_i) + \sum_{i < j \in I_n} N(s_i, s_j) - \dots + (-1)^n N(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

$$A_i = \{a \in A \mid s_i(a) = \text{true}\}$$

Тема 6: КОМБИНАТОРИКА - продължение Основни Комбинаторни Конфигурации

Нека е дадено базово множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, от чиито елементи ще правим извадки с или без повторение, с или без наредба, получавайки различни комбинаторни конфигурации.

Комбинаторни конфигурации с наредба без повторение. Нека $m < n$.

$K_H(n, m) = \{\text{наредените } m\text{-орки от елементи на } A \text{ без повторение}\}$
ще наричаме **вариации от n елемента m -ти клас**, броят ще бележим с V_n^m .
С прилагане на принципа на умножението получаваме:

$$V_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пермутации на n елемента (частен случай на вариации, при които $n=m$).

$$P_n = n!$$

Комбинаторни конфигурации без наредба и без повторение. Нека $m < n$.

$K(n, m) = \{\text{ненаредените } m\text{-орки от елементи на } A \text{ без повторение}\}$
ще наричаме **комбинации от n елемента m -ти клас** и ще бележим с C_n^m техния брой. С прилагане на принципа на делението получаваме:

$$C_n^m = V_n^m / P_m$$

Комбинаторни конфигурации с наредба и с повторение.

$K_{H,P}(n, m) = \{\text{наредените } m\text{-орки от елементи на } A \text{ с повторение}\}$
ще наричаме **вариации с повторение от n елемента m -ти клас** и броят им ще бележим с A_n^m . С прилагане на принципа на умножението получаваме:

$$A_n^m = n^m$$

Комбинаторни конфигурации без наредба с повторение.

$K_P(n, m) = \{\text{ненаредените } m\text{-орки от елементи на } A \text{ с повторение}\}$
ще наричаме **комбинации с повторение от n елемента m -ти клас** и ще бележим с S_n^m броя им.

Както ще докажем по-късно

$$S_n^m = C_{n+m-1}^m$$

Задачи:

Намерете търсения брой като сведете проблема до определяне на подходящата комбинаторна конфигурация.

Задача 1: Колко са двоичните вектори с дължина n ?

Задача 2: Колко различни фиша могат да се попълнят в играта 6 от 49?

Задача 3: Колко са различните символни низове:

- над азбуката $\{0,1\}$ с дължина 10 и точно 4 единици?
- над азбуката $\{a,b,c\}$ с дължина 8 и най-много 4 букви a ?
- над азбуката $\{a,b,c\}$ с дължина 10, с 4 букви a и 3 букви b ?

Задача 4: Колко са различните булеви вектори с 15 нули и 6 единици, такива че след всяка единица има нула?

Задача 5: От колода 52 карти се вадят 10. Колко са различните извадки, в които има:

- поне едно асо;
- точно едно вале;
- не по-малко от две дами;
- точно три седмици.

Задача 6: Колко различни числа могат да се запишат в p -ична бройна система:

- с точно n цифри;
- с най-много n цифри.

Задача 7: Колко различни идентификатора с дължина ≤ 2 могат да се използват в езиците за програмиране, които познавате?

Задача 8: По колко различни начина могат да се поставят 5 червени и 7 сини топки в 20 различни кутии, като:

- в кутия има не повече от една топка;
- в кутия има не повече от една топка от един цвят.

Задача 9: Колко думи могат да се съставят над азбуката $\{x,y,z\}$, които съдържат 5 букви x , 3 букви y и 4 букви z ?

Задача 10: Дадени са множествата $|A|=n$ и $|B|=m$. Колко са възможните различни функции от A в B ?

Задача 11: Дадени са множествата $|A|=n$ и $|B|=m$. Колко са възможните различни функции от $f:A \rightarrow B$ такива, че f :

- е инекция;
- не е инекция;
- е биекция.

Задача 12: Колко са думите с дължина 6 над азбуката $\{A \div Z\}$, в които:

- няма ограничения за съставлящите ги букви;
- няма повтарящи се букви;
- има поне една буква A;
- има буква A и са без повторения;
- започват или завършват с A;
- започват и завършват с A и в останалите позиции няма повторения.

Задача 13: Да се намери броя на комбинациите с повторение от n елемента клас m .

$$S_n^m = C_{n+m-1}^m$$

Задача 14: Колко са булевите вектори с n нули и k единици, в които няма съседни единици?

Задача 15: Колко са числата в интервала $[10_000, 99_999]$, за които е изпълнено:

- не съдържат цифра 7;
- съдържат цифра 5;
- нечетни, без повтарящи се цифри;
- нямат еднакви съседни цифри.

Задача 16: Колко са числата от 0 до $10^n - 1$, които нямат еднакви съседни цифри?

Задача 17: Колко са n -значните натурални числа, чиито цифри са в:

- ненамаляващ ред;
- растящ ред;
- нерастящ ред;
- намаляващ ред.

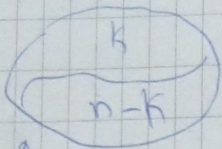
Задача 18: Колко са различните пермутации на n елемента, в които избрани m елемента се срещат като блок?

Доказване на тъждества
чрез комбинаторни
разсъждения

①

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

- биекция



A

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$P_{k,1} = \{B_s \subseteq A \mid |B_s| = k\}$$

$$P_{k,2} = \{C_t \subseteq A \mid |C_t| = n-k\}$$

$$f: B \rightarrow C$$

$$f(B_s) = (A \setminus B_s) = \overline{B_s}^A$$

f е биекция

$$|B| = C_n^k$$

$$|C| = C_n^{n-k}$$

$$\text{т.е. } |B| = |C|$$

$$\text{т.е. } C_n^k = C_n^{n-k}$$

②

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{B_s \subseteq A \mid |B_s| = k\}$$

$$B' = \{B_s \subseteq B \mid a_1 \in B_s\}$$

$$B'' = \{B_s \subseteq B \mid a_1 \notin B_s\}$$

$$\text{т.е. } |B| = |B'| + |B''|$$

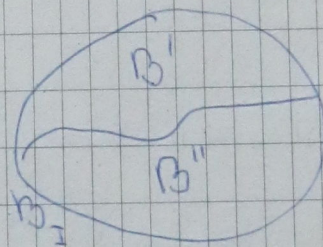
$$|B'| = C_{n-1}^{k-1}$$

$$|B''| = C_{n-1}^k$$

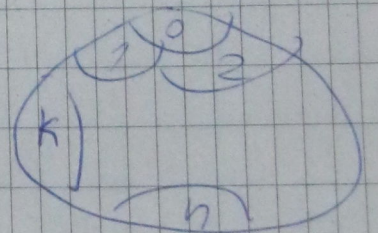
$$|B| = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

$$\text{т.е. } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

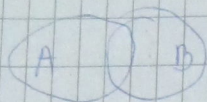
③ $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$



C_n^k
→ бијекция
бијекция



8. Принцип индукции на
включении и исключении



$$A \quad S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

$$\mathcal{N}(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n) = |A| - \sum_{s_i \in I_n} \mathcal{N}(s_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{N}(s_i, s_j) - \dots + (-1)^n \mathcal{N}(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

$$A_i = \{a \in A \mid s_i(a) = \text{true}\}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = |A| - \sum_{i \in I_n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Заг 3 $f: A \rightarrow B$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

$b_i = b_j$ — одна и та же метка

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_k) &= \mathcal{N} - \sum \mathcal{N}(\bar{b}_i) + \sum \mathcal{N}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) - \dots + (-1)^k \mathcal{N}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_k) \\ &= k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

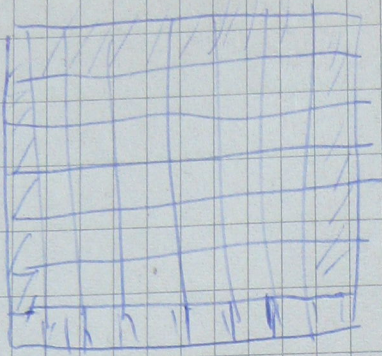
$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$s_i = a_i$ — е на каждом a_i

$$\mathcal{N}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = \mathcal{N} - \sum_{i \in I_n} \mathcal{N}(a_i) + \sum \mathcal{N}(a_i, a_j) - \dots + (-1)^n \mathcal{N}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$= n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (n-n)! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$



Број на кв в комтура $\rightarrow 4(n-1)$

орб $A \rightarrow B$
 $|A| = 4(n-1)$

$|B| = 2$
 $2^{4(n-1)} - 2$

$(n-2)^2$
 $k^{(n-2)^2}$

орб: $A \rightarrow B$
 $|A| = (n-2)^2$

$|B| = k$
 $\sum_{i=0}^{(n-2)^2} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^2$

$(2^{4(n-1)} - 2) \left(\sum_{i=0}^{(n-2)^2} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^2 \right)$

Тема 7: КОМБИНАТОРИКА - продължение
Основни Комбинаторни Конфигурации – решаване на задачи

Задача 1: По колко начина могат n човека да се хванат на хоро?

Задача 2: По колко начина могат да се нанижат n скъпоценни камъка на огърлица?

Задача 3: По колко начина могат да седнат n човека около кръгла маса, като за различни се считат две наредби ако поне един човек има различен съсед.

Задача 4: Рицарите на крал Артур – 12 на брой, се събират около кръгла маса, като е известно, че всеки от тях враждува точно с двамата си съсед. По колко начина могат да се изберат измежду тях 5 човека, които не враждуват помежду си?

Задача 5: Колко идентификатора с дължина n могат да се съставят в езика Ada (Идентификатор в Ada започва с буква, продължава с буква, цифра или знак за подчертаване. Знаците за подчертаване не могат да са съседни или в края на идентификатора. Малките и главните букви са неразличими).

Задача 6: Дадени са множествата $|A|=n$, $|B|=m$, $|C|=k$, като $B \cap C = \emptyset$. Да се пресметне:

- $|2^A|$;
- $|2^{B \cup C}|$;
- $|2^A \times 2^B|$;
- $|\{X \mid X \subseteq A \wedge |X| > 1\}|$.

Задача 7: Дадено е множеството $|A|=n$. Да се определи броя на релациите $R \subseteq A \times A$, които са:

- без ограничения;
- рефлексивни;
- нерефлексивни;
- симетрични;
- рефлексивни и симетрични;
- рефлексивни и антисиметрични.

Задача 8: В множество от n човека е дефинирана релация познанство, която е симетрична. Да се докаже, че в множеството има поне двама души, които имат равен брой познати.

Задача 9: Нека $\{a_k\}$ е редица от различни натурални числа с дължина n^2+1 . Да се докаже, че тя съдържа монотонна подредица с дължина най-малко $n+1$.

Задача 10: Нека k, l и n са натурални числа, такива че $k+l < n$. Колко са различните множества $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ и $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, такива че $|A|=k$, $|B|=l$ и произволно число от A е по-малко от което и да е число от B .

Задача 11: Двама души трябва да си разделят 4 ябълки, 3 круши и 5 банана. По колко начина може да стане това?

Задача 12: Нека M е натурално число със следното представяне:

$$M = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$$

Колко са различните делители на числото M ?

Задача 13: По колко начина сумата X лева може да се плати със съществуващите български банкноти, като:

- разполагаме с точно една банкнота от всяка стойност;
- разполагаме с неограничен брой банкноти от всяка стойност.

Задача 14: Да се докаже с комбинаторни разсъждения:

а. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Упътване: Да се установи биекция между k -елементните и $(n-k)$ -елементните подмножества на едно n -елементно множество.

б. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Упътване: Множеството от k -елементните подмножества на едно n -елементно множество да се разбие на две множества съобразно това, дали подмножеството съдържа фиксиран елемент от базовото множество или не.

в. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-k-1}^0, n > k$

Упътване: Множеството от k -елементните подмножества на едно n -елементно множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ да се разбие на $k+1$ множества, като i -тото множество обединява всички подмножества на базовото, които съдържат елементите a_1, \dots, a_i и не съдържат елемента a_{i+1} от базовото множество.

г. $C_{n+m}^m = \sum_{k=0}^m C_{n+k-1}^k$

Упътване: Да се вземе пред вид равенството $C_{n+m}^m = S_{n+1}^m$, след което множеството от всички комбинации с повторение от $n+1$ елемента клас m да се разбие на $m+1$ множества съобразно броя на срещанията $(0, 1 \dots m)$ на фиксиран елемент от базовото множество в комбинацията.

$$\text{д. } \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

Упътване: Разгледайте разбиване на множеството от всички булеви вектори с дължина n на подмножества, обединяващи векторите с фиксиран брой $(0, 1 \dots n)$ единици.

Задача 15: Колко са 5-елементните подмножества на множеството $[1, 100]$, в които няма съседни числа?

Задача 61: По колко начина n различни топки могат да се поставят в k различни урни? Посочете решавана задача, до която може да се сведе тази.

Задача 17: По колко начина n неразличими топки могат да се поставят в k различни урни? Посочете решавана задача, до която може да се сведе тази.

Задача 18: По колко начина n различни топки могат да се поставят в k неразличими урни?

Задача 19: По колко начина n неразличими топки могат да се поставят в k неразличими урни?

Задача 20: До кой от предишните четири проблема за разполагане на топки в урни може да се сведе следната задача?

- Колко са различните възможни конфигурации на дисковете при решаване на задачата за Ханойските кули?
- Колко са решенията на уравнението $x+y+u=73$
- Колко са разбиванията на натуралното число n на събираеми без да се отчита редът им?

Задача 21: По колко начина могат да се разполжат 8 топа на шахматната дъска така, че да не се стрелят един друг?

Задача 22: По колко начина могат да се разполжат 8 царици на шахматната дъска така, че да не се застрашават една друга?

Тема 8: КОМБИНАТОРИКА - продължение
Принцип за Включване и Изключване

Формулировка 1:

Дадена е фамилията от множества $\{A_i, i \in I_n\}$. Тогава

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \dots \cap \overline{A_n}| = |A| - \sum_{i \in I_n} |A_i| + \sum_{i < j \in I_n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Формулировка 2:

Дадено е множество A и на n брой свойства $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, проверими за всеки един от неговите елементи. Нека с $N(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ да означим броя на елементите, които изпълняват свойствата s_{i_1}, \dots, s_{i_k} , а с $N(\overline{s_{i_1}}, \dots, \overline{s_{i_k}})$ – броя на тези елементи, които не изпълняват свойствата s_{i_1}, \dots, s_{i_k} . Тогава

$$N(\overline{s_{i_1}}, \dots, \overline{s_{i_n}}) = |A| - \sum_{i \in I_n} N(s_i) + \sum_{i < j \in I_n} N(s_i, s_j) - \dots + (-1)^n N(s_1, \dots, s_n)$$

Задачи:

Задача 1: В група студенти всеки човек знае поне един от езиците за програмиране Java, C и Pascal. Известно е, че 15 души знаят Java, 13 души знаят C и 10 човека знаят Pascal. C и Java знаят 5 човека, C и Pascal също 5, а Java и Pascal - 3. Трима души знаят и трите езика за програмиране. От колко души се състои групата?

Решение: Означаваме с J множеството от студентите, знаещи Java, с C множеството на тези, знаещи C, с P множеството на знаещите Pascal, с JC знаещите Java и C, с JP знаещите Java и Pascal, с CP знаещите C и Pascal, с JCP знаещите три езика, а с X – броя на всички студенти. Прилагането на Принципа за включване и изключване ни дава следното равенство:

$$|\overline{J} \cap \overline{C} \cap \overline{P}| = X - (|J| + |C| + |P|) + (|J \cap C| + |J \cap P| + |C \cap P|) - |J \cap C \cap P|$$

От ляво на равенството стои броят на хората, които не знаят нито един език за програмиране, по условие 0.

$$0 = X - (15+13+10) + (5+5+3) - 3$$

$$X = 28$$

Задача 2: Колко са числата от 1 до 100, които не се делят на нито едно от числата 2, 3, 5 и 7?

Задача 3: Дадени са множествата $|A| = n$ и $|B| = m$. Какъв е броят на функциите $f: A \rightarrow B$, които са сюрекции?

Задача 4: Колко са пермутациите на n елемента, в които никой елемент не е на мястото си?

Задача 5: Колко са пермутациите на n елемента, в които точно r елемента са на местата си?

Задача 6: Дадена е фамилията от множества $\{A_i, i \in I_n\}$. Да се докаже, че:

$$|\bigcup_{i \in I_n} A_i| = \sum_{i \in I_n} |A_i| - \sum_{i < j \in I_n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Задача 7: Колко са n -значните десетични числа, в чийто запис участват всички десетични цифри?

Задача 8: Колко са думите над азбуката $\{a, b, c\}$, които съдържат по две букви от всеки вид и в които няма еднакви съседни букви?

Задача 9: Край кръгла маса трябва да се настанят n двойки враждуващи рицари, така че никои двама, които враждуват да не са съседни. По колко начина може да стане това?

Задача 10: Всяко квадратче на мрежа $n \times n$ се оцветява в един от k цвята. Да се намери:

1. Броят на оцветяванията на квадратчетата от контура (първия и последния ред и първия и последния стълб) на мрежата с използване на два цвята;
2. Броят на оцветяванията на квадратчетата, непринадлежащи на контура на мрежата;
3. Броят на оцветяванията на квадратчетата, непринадлежащи на контура на мрежата, такива че всеки цвят се среща поне веднъж
4. Броят на оцветяванията на мрежата, такива че контурът ѝ е двуцветен, а в останалата част от нея всеки цвят се среща поне веднъж.

Тема 9: РЕКУРЕНТНИ ОТНОШЕНИЯ

Рекурентни зависимости и рекурсивни дефиниции. Съставяне на рекурентни отношения.

Пример 1: Да се намери рекурентна зависимост за броя на начините, по които n различни предмета могат да се подредят в редица:

Решение: Да означим броя на подрежданията на n елемента с p_n . Задачата за подреждане на елементите може да се сведе до решение на две задачи:

- първата е да се избере елементът, който заема първо място – това може да стане по n начина;
- втората е за подреждане на останалите $n-1$ елемента, което става по p_{n-1} начина.

Един предмет можем да наредим по единствен начин, т.е. получаваме $p_1 = 1$.

Така получихме следното рекурентно отношение и съответно начално условие:

$$p_n = np_{n-1}, n > 1$$

$$p_1 = 1$$

Пример 2: Нека е дадена стълба с n стъпала и можем да я изкачим като стъпваме през едно или през две стъпала. Да се намери рекурентна зависимост за броя на начините, по които можем да изкачим стълбата.

Решение: Очевидно, стълба с едно стъпало можем да изкачим по единствен начин, а такава с две стъпала – по два начина. Нека стълбата има поне три стъпала. Да означим броя на различните изкачвания с a_n . Изкачването можем да започнем по два начина:

- да изкачим едно стъпало, след което остава да изкачим останалите $n-1$ по a_{n-1} начина;
- да изкачим две стъпала, след което остава да изкачим останалите $n-2$ по a_{n-2} начина;

Така получаваме следното рекурентно отношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2$$

Пример 3: Да се намери рекурентна зависимост за броя на преместванията на дискове в задачата за Ханойските кули.

Решение: Нека означим с T_n минималния брой премествания, необходими за n диска. Лесно се вижда, че $T_1 = 1$ и $T_2 = 3$. Задачата за преместване на n диска може да се сведе до решаване на три задачи:

- преместване на $n-1$ диска на помощния стълб;
- преместване на един диск на крайния стълб;
- преместване на $n-1$ диска от помощния на крайния стълб.

От това следва неравенството:

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1$$

За да се премести най-големият диск, трябва всички останали да са на помощния стълб, а това става с най-малко T_{n-1} премествания. После за да се върнат тези дискове на крайния стълб са необходими поне още толкова операции. От тук лесно се вижда верността и на обратното неравенство:

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1$$

Така стигаме до следното рекурентно отношение и начално условие:

$$T_1 = 1$$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

Линейни рекурентни отношение с постоянни коефициенти

Общият вид на линейно рекурентно отношение с постоянни коефициенти е:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + \dots + c_k s_{n-k} = f(n)$$

където $c_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$ са константи.

Редът на линейното рекурентно уравнение е k тогава, когато $c_0 \neq 0, c_k \neq 0$

Хомогенно е линейното рекурентно отношение тогава, когато $f(n) = 0$. В противен случай отношението е **нехомогенно**.

Линейни рекурентни отношения от първи ред

Общият вид на *линейно хомогенно рекурентно отношение от първи ред* е:

$$c_0 s_n = c_1 s_{n-1}, n > 0$$

$$s_0 = A$$

където c_0, c_1 са константи, а $s_0 = A$ е начално условие.

Същото отношение може да се запише във вида:

$$s_n = rs_{n-1}, n > 0$$

$$s_0 = A$$

При многократно прилагане на рекурентната зависимост получаваме:

$$s_n = rs_{n-1} = r^2s_{n-2} = r^3s_{n-3} = \dots = r^ns_0 = Ar^n$$

Така общото решение на рекурентното отношение е геометрична прогресия с частно r .

Общият вид на *линейно нехомогенно рекурентно отношение от първи ред* е:

$$c_0s_n = c_1s_{n-1} + c_2, n > 0$$

$$s_0 = A$$

където c_0, c_1, c_2 са константи, а $s_0 = A$ е начално условие.

Същото отношение може да се запише във вида:

$$s_n = rs_{n-1} + c_n, n > 0$$

$$s_0 = A$$

При многократно прилагане на рекурентната зависимост получаваме:

$$s_n = rs_{n-1} + c_n = r^2s_{n-2} + rc_{n-1} + c_n =$$

$$= \dots =$$

$$= r^ns_0 + \sum_{i=1}^n r^{n-i}c_i = Ar^n + \sum_{i=1}^n r^{n-i}c_i$$

Ако c_n е константа, например k , то решението изглежда така:

$$s_n = Ar^n + k \frac{r^n - 1}{r - 1}, r \neq 1$$

$$s_n = A + kn, r = 1$$

Във втория случай решението е аритметична прогресия с разлика k .

Итеративни методи за решаване на линейни рекурентни отношения

С последователно прилагане на рекурентната зависимост се достига до решение. Ще разгледаме следния пример:

$$s_n = s_{n-1} + 2, n > 1$$

$$s_1 = 3$$

1. Като се започне от s_n и се движим назад към s_1

$$\begin{aligned}
 s_n &= s_{n-1} + 2 = \\
 &= (s_{n-2} + 2) + 2 = s_{n-2} + 2.2 = \\
 &= (s_{n-3} + 2) + 2.2 = s_{n-3} + 3.2 = \\
 &= \dots\dots\dots = \\
 &= (s_{n-(n-1)} + 2) + (n-1).2 = \\
 &= s_1 + 2.(n-1) = \\
 &= 3 + 2.(n-1)
 \end{aligned}$$

2. Като се започне от s_1 и се движим напред към s_n

$$\begin{aligned}
 s_2 &= s_1 + 2 \\
 s_3 &= s_2 + 2 = (s_1 + 2) + 2 = s_1 + 2.2 \\
 s_4 &= s_3 + 2 = (s_1 + 2.2) + 2 = s_1 + 3.2 = \\
 &= \dots\dots\dots = \\
 s_n &= (s_{n-1} + 2) = (s_1 + (n-2).2) + 2 = s_1 + (n-1).2 = \\
 &= 3 + 2.(n-1)
 \end{aligned}$$

Решаване на линейни хомогенни рекурентни отношения

Нека е дадено линейното хомогенно рекурентно отношение:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + \dots + c_k s_{n-k} = 0$$

Разглеждаме характеристичното уравнение на рекурентното отношение, което има вида:

$$c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k = 0$$

Ако r_1 е решение на това уравнение, то $A.r_1^n$, където A е константа, е решение на рекурентното отношение.

Тъй като характеристичното уравнение е от степен k , то има k корена.

Различаваме два основни случая:

Случай 1: Всичките k корена на характеристичното уравнение са различни. Тогава общото решение на рекурентното отношение има вида:

$$s_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + A_3 r_3^n + \dots + A_k r_k^n$$

където r_1, r_2, \dots, r_k са корените на характеристичното уравнение, а константите A_1, A_2, \dots, A_k следва да бъдат определени от началните условия.

Пример: Да се реши линейното хомогенно рекурентно отношение от втори ред:

$$s_n - 7s_{n-1} + 10s_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 3$$

Решение: Характеристичното уравнение има вида:

$$r^2 - 7r + 10 = 0$$

И има два различни реални корена: $r_1 = 2$ и $r_2 = 5$.

Така общото решение на рекурентното отношение е:

$$s_n = A_1(2)^n + A_2(5)^n$$

Като се вземат пред вид началните условия се получават следните уравнения:

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$2A_1 + 5A_2 = 3$$

Откъдето получаваме: $A_1 = -1$, $A_2 = 1$

Следователно решението на рекурентното отношение с дадените начални условия е:

$$s_n = 2^n + 5^n$$

Случай 2: Характеристичното уравнение има кратни корени. Тогава общото решение на рекурентното отношение има вида:

$$s_n = \sum_{i=1}^p (A_{i1} + A_{i2} \cdot n + \dots + A_{it_i} \cdot n^{t_i-1}) r_i^n$$

като r_1, r_2, \dots, r_p са различните корени на характеристичното уравнение, а A_{ij} , $j=1, 2, \dots, t_i$, $i=1, 2, \dots, p$ са константи, които ще бъдат определени от началните условия.

Пример: Да се реши линейното хомогенно рекурентно отношение от втори ред:

$$s_n - 4s_{n-1} + 4s_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 6$$

Решение: Характеристичното уравнение има вида:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

И има два равни реални корена: $r_1 = r_2 = 2$.

Така общото решение на рекурентното отношение е:

$$s_n = (A_1 + A_2 \cdot n)2^n$$

При прилагане на началните условия се получава системата уравнения:

$$A_1 = 1$$

$$2A_1 + 2A_2 = 6$$

чието решение е: $A_1 = 1, A_2 = 2$

Следователно решението на рекурентното отношение с дадените начални условия е:

$$s_n = (1 + 2n)2^n, n \geq 0$$

Решаване на линейни нехомогенни рекурентни отношения

Нека е дадено линейното нехомогенно рекурентно отношение:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + \dots + c_k s_{n-k} = f(n) \quad (*)$$

Общото решение на линейното нехомогенно рекурентно отношение има вида:

$$s_n = s_n^h + s_n^p$$

където s_n^h е общото решение на съответното линейно хомогенно рекурентно отношение, а s_n^p е частно решение на нехомогенното.

Следващата таблица дава вида на частното решение в зависимост от вида на $f(n)$.

$f(n)$	Частно решение
$k = \text{const}$	$P = \text{const}$
a^n , където $a = \text{const}$ не е корен на характеристичното уравнение	Pa^n
a^n , където $a = \text{const}$ е корен на ХУ с кратност m	$Pn^m a^n$
$a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-2} + \dots + a_m$ Пример: $a_0 n^3 + a_1 n + a_2$	$P_0 n^m + P_1 n^{m-1} + \dots + P_m$ Пример: $P_0 n^3 + P_1 n + P_0$
$a^n (a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-2} + \dots + a_m)$ Пример: $bn^m a^n$	$a^n (P_0 n^m + P_1 n^{m-1} + \dots + P_m)$ Пример: $a^n (P_0 n + P_1)$
$c^n (a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-2} + \dots + a_m)$, където c е характ. корен с кратност m	$c^n n^m (P_0 n^m + P_1 n^{m-1} + \dots + P_m)$
$a^n + b^n + c$, където a, b, c са константи	$P_1 a^n + P_2 b^n + P_3$

Константите в частното решение могат да бъдат намерени при заместването му в самото рекурентно отношение.

Пример: Да се намери общото решение на нехомогенното линейно рекурентно отношение:

$$s_n - 2s_{n-1} = 3^n$$

$$s_0 = 4$$

1. Намираме общото решение на съответното хомогенно рекурентно отношение:

$$s_n - 2s_{n-1} = 0$$

Неговото характеристично уравнение $r - 2 = 0$ има корен $r=2$.

Следователно, общото му решение е:

$$s_n^h = A2^n$$

2. Търсим частно решение на нехомогенното линейно рекурентно отношение от вида $P3^n$, което не е задължително да удовлетворява началното условие. За да намерим константата P заместваме в рекурентното отношение:

$$P3^n - 2P3^{n-1} = P3^n - \frac{2}{3}P3^n = \frac{P}{3}3^n$$

$$\text{т.е. } \frac{P}{3}3^n = 3^n, \text{ от където } P = 3$$

Следователно, частното решение на рекурентното отношение е:

$$s_n^p = 3^{n+1}$$

3. Така общото решение на нехомогенното рекурентно отношение е:

$$s_n = s_n^h + s_n^p = A2^n + 3^{n+1}$$

И можем да намерим стойността на A , която удовлетворява началните условия:

$$4 = 3 + A, \text{ т.е. } A = 1$$

Общото решение на нехомогенното линейно рекурентно отношение, което удовлетворява началното условие е:

$$s_n = 2^n + 3^{n+1}$$

Задачи

Задача 1: Съставете и решете рекурентно отношение, което по зададена начална сума на банков влог и стойност на годишната лихва определя каква е наличната сума на n -тата година от създаване на влога.

Задача 2: Използвайте итеративен подход за да решите рекурентното отношение, което определя броя на операциите преместване на диск в задачата за Ханойските кули.

Задача 3: Намерете общото решение на линейните хомогенни рекурентни отношения от първи ред с дадените начални условия:

a) $s_n - s_{n-1} = 0, n > 0; s_0 = 12$

b) $s_n - 2s_{n-1} = 0, n > 0; s_0 = 1$

c) $s_n - 3s_{n-1} = 0, n > 1; s_1 = 17$

Задача 4: Намерете общото решение на следните линейни хомогенни рекурентни отношения от втори ред:

a) $s_n - 4s_{n-1} + 3s_{n-2} = 0$

b) $s_n - s_{n-1} - s_{n-2} = 0$

c) $s_n + 2s_{n-1} + s_{n-2} = 0$

d) $s_n + 3s_{n-2} = 0$

Задача 5: Намерете общото решение на линейните хомогенни рекурентни отношения с дадените начални условия:

a) $s_n - 7s_{n-1} + 10s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 3$

b) $s_n - 4s_{n-1} + 4s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 1, s_1 = 6$

c) $s_n + 6s_{n-1} + 9s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 1$

d) $s_n - 4s_{n-1} + 3s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 10, s_1 = 16$

e) $s_n - s_{n-2} = 0, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 2$

f) $s_n - 3s_{n-1} + s_{n-2} - 3s_{n-3} = 0; s_0 = 3, s_1 = 7, s_2 = 27$

Задача 6: Намерете общото решение на линейните нехомогенни рекурентни отношения от първи ред с дадените начални условия:

a) $s_n - 3s_{n-1} = 2, n > 1; s_1 = 2$

b) $s_n - s_{n-1} = 5, n > 0; s_0 = 2$

c) $s_n - 2s_{n-1} = 5 \cdot 2^n, n > 0; s_0 = 7$

Задача 7: Намерете общото решение на линейното нехомогенно рекурентно отношение:

$$s_n - 3s_{n-1} = f(n)$$

където $f(n)$ има вида:

a) 2^n b) $n \cdot 2^n$ c) 3^n d) $5 \cdot 3^n$

Задача 8: Намерете общото решение на следните линейни нехомогенни рекурентни отношения от втори ред:

a) $s_n + s_{n-1} - 6s_{n-2} = 2^n - 1$

b) $s_n + 5s_{n-1} + 6s_{n-2} = 24t^2, t = \text{const}$

c) $s_n - 4s_{n-1} + 4s_{n-2} = (n^2 + 1) \cdot 2^n$

Задача 9: Намерете общото решение на линейните нехомогенни рекурентни отношения от втори ред с дадените начални условия:

d) $s_n - 5s_{n-1} + 6s_{n-2} = 4, n \geq 2; s_0 = 1, s_1 = 3$

e) $s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2} = 3, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 1$

f) $s_n - 7s_{n-1} + 10s_{n-2} = 3^n, n \geq 2; s_0 = 0, s_1 = 1$

Задача 10: Намерете затворена формула за следната сума:

a) $\sum_{k=1}^n k^2$

b) $\sum_{k=1}^n k^2 / 2^k$

c) $\sum_{k=1}^n 2^k k^2$

Тема 10: ГРАФИ

Дефиниции:

Краен ориентиран мултиграф
Краен ориентиран граф
Краен неориентиран граф
Краен неориентиран мултиграф
Съседни върхове
Съседни ребра
Степен на връх в неориентиран граф
Изолиран връх
Висящ връх
Входна и изходна степен на връх в ориентиран граф
Регулярен граф
Матрица на съседство
Подграф на даден граф
Маршрут в ориентиран мултиграф
Път в краен неориентиран граф
Верига в краен неориентиран граф
Проста верига в краен неориентиран граф
Контур
Цикъл
Ойлеров цикъл
Хамилтонов цикъл
Диаметър на граф
Свързан граф
Силно свързан (слабо свързан) ориентиран мултиграф
Свързана компонента на граф
Силно свързана компонента на ориентиран граф
Пълен граф
Допълнение на граф
Двуделен граф

Обхождане на графи

Обхождане в дълбочина
Обхождане в ширина

Задачи:

1. Нека $G(V,E)$ е неориентиран мултиграф. Да се докаже, че:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Решение: Горното равенство следва от факта, че при сумиране на степените всяко ребро се преброява два пъти, по веднъж за всеки от върховете – негови краища.

2. Да се докаже, че произволен неориентиран мултиграф има четен брой върхове от нечетна степен.

3. Да се докаже, че за произволен ориентиран мултиграф е изпълнено:

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

4. Да се докаже, че във всеки граф има поне два върха с равни степени.

Указание: Приложете принципа на Дирихле.

5. Нека $G(V,E)$ е граф с n върха, в който някои две ребра нямат общ връх. Какъв е максималният брой ребра в графа?

6. Да се докаже, че ако $G(V, E)$ е свързан граф, то $|E| \geq |V| - 1$.

Указание: Докажете твърдението с индукция по броя на върховете на графа.

7. Нека $G(V, E)$ е граф с n върха и минимална степен на върховете $d_{\min} \geq \frac{n-1}{2}$. Да се докаже, че графът е свързан.

Решение: Допускаме противното, т.е. графът съдържа поне две свързани компоненти $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. Тъй като $|V_1| + |V_2| = n$, то за не по-голямото от двете числа $|V_i|$ е вярно: $|V_i| \leq \lceil n/2 \rceil$. От тук можем да оценим максималната степен на връх в съответната свързана компонента G_i :

$$d_{\max} \leq \lceil n/2 \rceil - 1 \leq n/2 - 1 < \frac{n-1}{2}$$

което е в противоречие с условието на задачата.

Следователно допускането, че графът е несвързан е грешно.

8. Да се докаже, че ако графът $G(V, E)$ е несвързан, то неговото допълнение \overline{G} е свързан граф.

9. Да се докаже, че ако графът $G(V, E)$ е с 6 върха, то той или допълнението му \overline{G} съдържа триъгълник.

10. Да се докаже конструктивно, че всяка последователност от натурални числа $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, за които $\sum_{i \in I_n} d_i \equiv 0 \pmod{2}$ може да бъде редица от степени на върховете на мултиграф с n върха.

11. Нека $G(V, E)$ е свързан граф. Да се докаже, че всеки две максимални прости вериги имат общ връх.

12. Нека $G(V, E)$ е граф с n върха и k свързани компоненти. Да се докаже, че максималният брой ребра в графа е:

$$N(n, k) = \frac{(n - k)(n - k + 1)}{2}$$

Упътване: Покажете, че максимумът на броя на ребрата при граф с n върха и k свързани компоненти се получава в случая, когато $k-1$ от свързаните компоненти са изолирани върхове, а k -тата свързана компонента е пълен граф, съдържащ останалите $n-k+1$ върха.

Следствие: Ако в графа $G(V, E)$ за броя на ребрата е изпълнено:

$$|E| \geq \frac{(|V| - 1)(|V| - 2)}{2}$$

то той е свързан.

13. Да се докаже, че ако в свързан граф се отстрани ребро, принадлежащо на прост цикъл, то графът остава свързан.

14. Да се докаже, че ако в графа $G(V, E)$ има точно два върха с нечетна степен, то между тях има път.

15. Да се докаже, че ако за всяка двойка несъседни върхове v_i и v_j в неориентиран граф G е вярно: $d(v_i) + d(v_j) \geq n$, то G съдържа Хамилтонов цикъл.

Следствие 1 Всеки пълен граф е Хамилтонов.

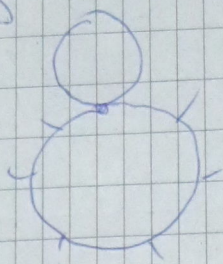
Следствие 2 Всеки регулярен граф от степен $d \geq \frac{n}{2}$ е Хамилтонов.

16. При среща на няколко души, някои от тях се здрависват. Да се докаже, че:

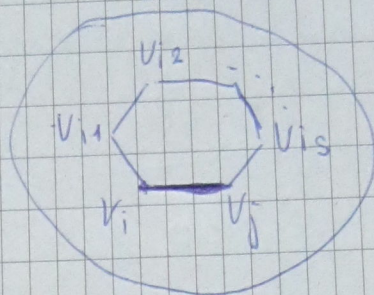
а) броят на хората, които са се здрависали с нечетен брой хора е четно число;

б) има двама души, които са се здрависали с равен брой хора.

Заг 13 - цунора б граф



$G(V, E)$



Ако максимално егито редо (v_i, v_j) графа не е остани
сврзан

Докараме како

$$1) \{v_k | v_r\} \cap \{v_i, v_j\} = \emptyset$$

Нека моѝ не сврзана (v_i, v_j)
2) \exists \mathbb{N} G има \mathbb{N} нвм од v_k до v_r
како сврзана (v_i, v_j)

~~Нема нвм како не то сврзана~~

С. \exists \mathbb{N} v_{p+1}, \dots, v_p

$v_{p+1}, \dots, v_p, (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_j)$

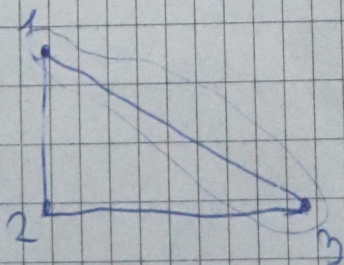
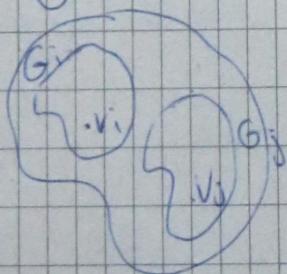
2)

Заг 14

Допускаме зе \exists нвм од v_i до v_j
С. $G(V, E)$ не е сврзан

С. \exists поне 2 св. компоненти

G v_i, v_j са од разликни сврзани компоненти



Степената на v_i в G_i = степената на v_i в G

— " — v_j в G_j = — " — v_j в G

С. в G_i \exists ! връх с нег. степен - противоречие

С. \exists нвм од v_i до v_j
- от етоб изнес граф

- HDU за свързан граф - минава се през всичко ребро
 без да се повтаря ребра

- Хамилтонов цикъл - минава през всички върхове и без да повтаряме върхове

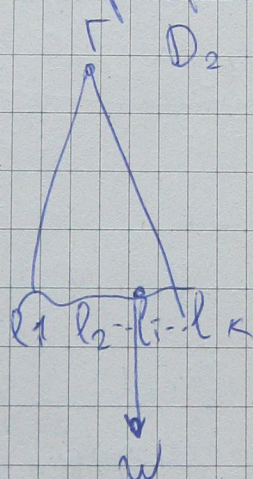
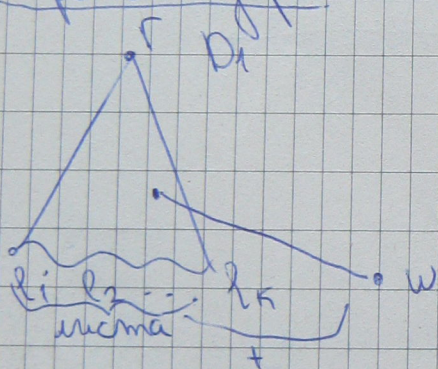
чтвр 10:00

Булгрек парк класовен 9

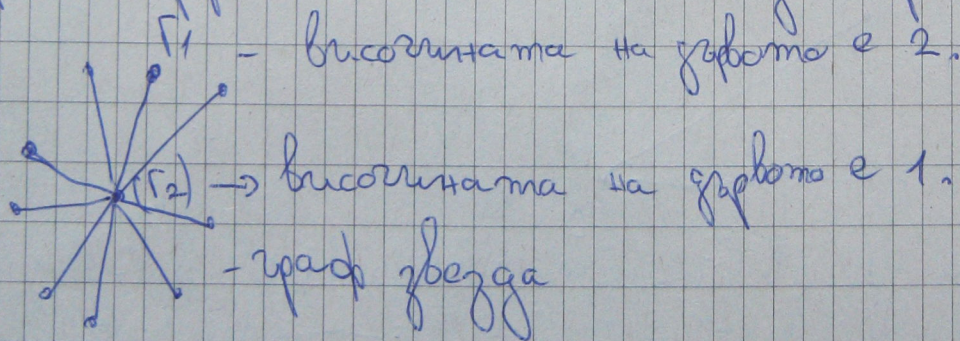
сграда № 6

регенция

Дървета - свързани графове без цикли
Кореново дърво -



кореновото дърво е свързан граф, няма цикли
 Всеки свързан граф без цикли може да бъде направен
 кореново дърво като се обяви един връх за стелумен



Тема 11: ДЪРВЕТА

Дефиниции:

Дърво
Кореново дърво
Височина на дърво
Двоично дърво
Покриващо дърво

Задачи:

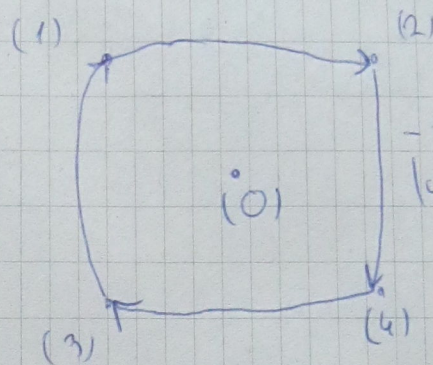
1. Нека графът $G(V, E)$ има поне два върха. Да се докаже еквивалентността на следните твърдения:
 - (1) G е свързан с $|V|-1$ ребра;
 - (2) G е свързан, но при отстраняване на произволно ребро се получава несвързан граф;
 - (3) Всяка двойка върхове е свързана с единствена верига;
 - (4) G няма цикли, но при добавяне на ребро между произволни два върха се получава цикъл.
2. Всяко дърво с поне два върха има поне два висящи върха.
3. Да се докаже, че ако в граф с n върха има висящи $n-1$ върха, то графът или е дърво или не е свързан.
4. Да се докаже, че всяко дърво с поне два върха е двуделен граф.
5. Да се докаже, че в дърво с нечетен диаметър всеки две максимални прости вериги имат общо ребро.
6. Нека n_1 е броят на висящите върхове на дърво с n върха, никой от които не е от степен 2. Да се докаже, че $n_1 \geq n/2 + 1$.
7. Да се намери броя на листата в пълно двоично дърво с височина k .
8. Да се намери броя на ребрата в граф без цикли с n върха k и свързани компоненти.

- алгоритми за обхождане на графи
- търсене на най-кратък път

заг 1

Две твърдения са еквивалентни когато от първото следва второто и от второто следва първото

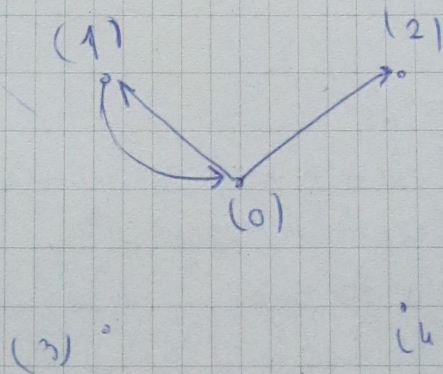
A, B, C
 A → B
 и B → C
 сл. A → C



- свързан граф
 (или свързан)

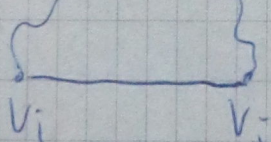
Некореново дърво

$$|E| \geq |V| - 1$$



$$|E| \geq |V| - 1$$

Допускаме, че в G ∃ цикъл



Нека $(v_i, v_j) \in E$ на цикъла

сл. ако го отстраним G' остава свързан

$$|E'| = |V| - 2$$

Но в произволен свързан граф ребрата са най-малко $|V| - 1$ - противоречие ⇒ няма цикли в графа

(0) \rightarrow (2)

Графа е свързана без нити
Трябва да докажем че при махане на едно ребро
графа се не свързана

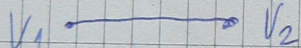
Допускаме че графа е свързана но съществува ребро
такова, че ако се махане графа остава свързана
Нека това е реброто $(v_i, v_j) \Rightarrow$ в G съществува
два пътя м/у върховете (v_i, v_j) което т.в. че да
изглежда \Rightarrow противоречие

(2) \rightarrow (0) Допускаме че в графа има нити но

D_p се говори

заг 2 Виселен връх е този който има степен 1

1. База $|V| = 2$

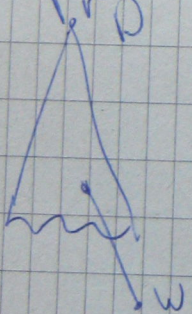


$d(v_1) = d(v_2) = 1$ - изтънено

2.) Инак източно предположение

Допускаме че във всяко графа с n върха има
поне два виселени

3.) Ще докажем че е произволно графа с $|V| = n+1$
върха поне два виселени



D е получено от D' с $|V| = n$

си. по инд. предат че в D' има поне два
виселени

В D имат на нас виселените върхове е
равен или по-голям от този в $D' \Rightarrow$

Тв е вярно за произволно графа

QED заг 1, заг 2

Тема 12: БУЛЕВ КУБ

Дефиниции:

Булев вектор

Дължина на булев вектор

Тегло на булев вектор: $|\tilde{\alpha}| = \sum_{i \in I_n} \alpha_i$

Число (номер) на булев вектор: $v(\tilde{\alpha}) = \sum_{i \in I_n} \alpha_i 2^{n-i}$

Разстояние между булеви вектори: $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i \in I_n} |\alpha_i - \beta_i|$

n-мерен двоичен куб: $B^n (J_2^n, E_n)$, $E_n = \{(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) / \rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 1\}$

Слой в n-мерния двоичен куб: $B_k^n = \{\tilde{\alpha} / |\tilde{\alpha}| = k\}$

Сфера в n-мерния двоичен куб.

Кълбо в n-мерния двоичен куб.

Релация предшества на булеви вектори: $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i, i \in I_n$

Непосредствено предшества на булеви вектори: $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \wedge \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$

Верига в n-мерния двоичен куб.

Стена с ранг k и размерност n-k в n-мерния двоичен куб: всички n-мерни булеви вектори, в които k координати са избрани и фиксирани.

Дефиниция на релация – лексикографска наредба (пълна)

Дефиниция на релация – наредба по номер (пълна)

Задачи:

1. Намерете номерата на векторите: (0111010100), (1111), (10001).
2. Намерете булев вектор с дължина 6 и число 19.
3. Колко са векторите $\tilde{\alpha} \in B_k^n : 2^{n-1} \leq v(\tilde{\alpha}) < 2^n$.
4. Намерете броя на ненаредените двойки съседни върхове на B^n .
5. Намерете броя на ненаредените двойки върхове в B^n такива, че $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = k$.
6. Намерете $|B_k^n|$.
7. Намерете броя на векторите в стена с ранг k в n-мерния двоичен куб.

8. Намерете броя на $(n-k)$ -мерните стени в n -мерния двоичен куб.
9. Дадени са векторите $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in V_n : \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = m$. Да се намери броя на векторите $\tilde{\gamma} : \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = m$.
10. Нека са дадени булевите вектори $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in V^n : \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \wedge \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = k$. Да се намери броя на векторите $\tilde{\gamma} : \tilde{\alpha} \leq \tilde{\gamma} \leq \tilde{\beta}$.
11. Намерете броя на векторите $\tilde{\alpha} \in V_k^n$, в които между всеки две единични координати има поне r нулеви.
12. Да се докаже, че измежду всеки $(n+2)$ n -мерни булеви вектори има двойка несравними вектори.
13. Да се намери броя на различните максимални растящи вериги в V^n .
14. Да се намери броя на различните максимални растящи вериги в V^n , които съдържат фиксиран вектор $\tilde{\alpha} \in V_k^n$.
15. Да се докаже, че V^n е Хамилтонов граф.
16. Да се докаже, че в V^n няма цикли с нечетна дължина.
17. Множеството $A \subseteq V^n$ е пълно, ако произволен вектор $\tilde{\beta} \in V^n$ може да се намери при положение, че са известни разстоянията $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) / \tilde{\alpha} \in A$. Базис ще наричаме минимално пълно множество. Да се докаже, че:
- произволна растяща верига $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n \in V^n$ е базис;
 - V_1^n и V_{n-1}^n са пълни при $n > 2$.
- Да се намери n , при което V_1^n не е базис.
18. Изпълнете следните действия:
- Определете V^3
 - Дайте геометрична интерпретация на V^3
 - Сортирайте във възходящ ред лексикографски и по номер векторите - върхове на куба V^3
 - Определете релацията - предшестване в куба V^3
 - Дайте примери на несравними вектори - върхове на куба V^3
 - Дайте примери на стени на куба V^3
19. Да се провери какви свойства притежава релацията:

1. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, \rho(\alpha, \beta) = 1 \text{ и } \alpha \preceq \beta\}$
2. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, \rho(\alpha, \beta) = 1 \text{ или } \alpha \preceq \beta\}$
3. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, v(\alpha) \leq v(\beta) \text{ и } \alpha \preceq \beta\}$
4. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, v(\alpha) \leq v(\beta) \text{ или } \alpha \preceq \beta\}$
5. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, v(\alpha) \neq v(\beta) \text{ или } \alpha \preceq \beta\}$
6. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, v(\alpha) \neq v(\beta) \text{ и } \alpha \preceq \beta\}$
7. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, |\alpha| \leq |\beta| \text{ и } \alpha \preceq \beta\}$
8. $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in B^n, \beta \in B^n, |\alpha| \leq |\beta| \text{ или } \alpha \preceq \beta\}$

заг 3 свързана $G(V, E)$
 $|V| = n$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

$$(n-1) + d(v_n) = 2|E| \leq 2(n-1)$$

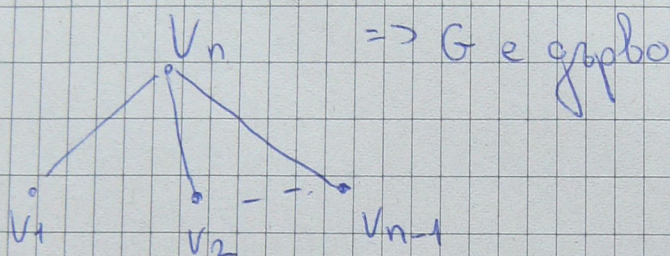
$$2|E| \leq 2(n-1)$$

1 $|E| \leq (n-1)$

$$|E| \leq (n-1)$$

* Сл. G не е свързана

2 $|E| = n-1$ - няма цикли



заг 4

1. База $D(V, E) | V = \{v_1, v_2\}$

$$V' = \{v_1\}, V'' = \{v_2\}$$

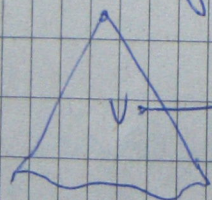
$$\{(v_1, v_2)\} = E'$$

2. Допускаме че за произволно дърво с n върха е вярно следното: множеството V на върховете може да се разбие на две подмножества $V', V'' : \forall e \in E$

$$e = (v_i, v_j) \quad v_i \in V', v_j \in V''$$

3. Индукционна стъпка. Ще докажем че за произволно D с $(n+1)$ върха е ориентиран граф

$\exists D'$ с n върха такава, че да D е получено от D' с добавяне на връх



По UN за D' \exists разбиране V', V''

1. Ако $v: (v, w) \in E$

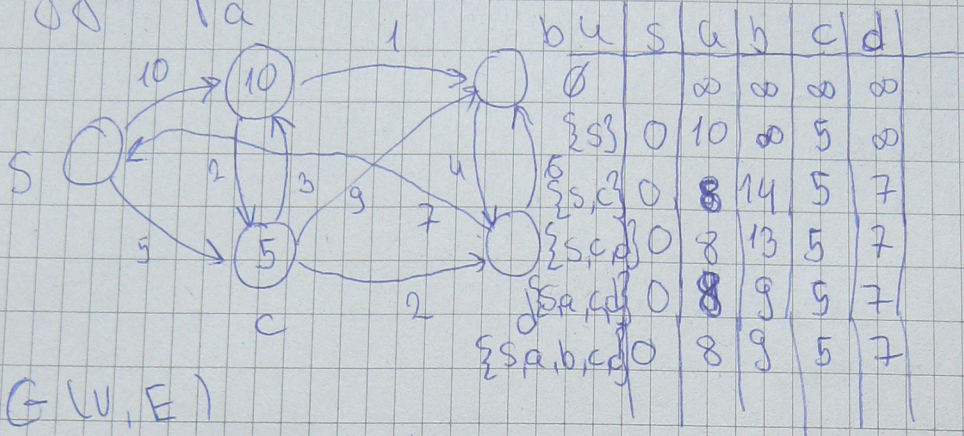
$$v \in V' \Rightarrow w \in V''$$

$$v \in V'' \Rightarrow w \in V'$$

и така D е ориентиран

4. Вери-Вари графо е графизент граф

5 жог - 2 pa



	b	u	s	a	b	c	d
\emptyset	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\{s\}$	0	10	∞	5	∞	∞	∞
$\{s, c\}$	0	8	14	5	7	∞	∞
$\{s, a\}$	0	8	13	5	7	∞	∞
$\{s, a, c\}$	0	8	9	5	7	∞	∞
$\{s, a, b, c\}$	0	8	9	5	7	∞	∞

$G(V, E)$

$V = \{s, a, b, c, d\}$

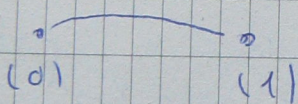
Графизент граф (102)

$B^n(d_2^n, E)$

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{i \in I_n} |\alpha_{ik} - \alpha_{jk}|$$

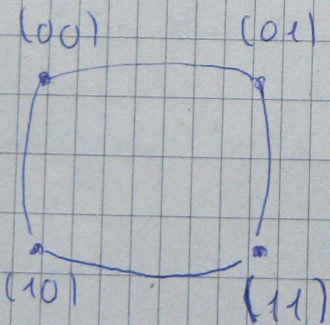
$$e \in E \quad e = (\alpha_i, \alpha_j) \quad \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{Z}_2^n$$

B^1



- едномерен графизент граф

B^2



- двумерен графизент граф

B^n

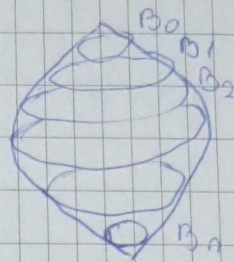
$$\alpha \in \mathbb{Z}_2^n$$


$$d(\alpha) = n$$

n-мерен графизент граф е регуларен граф со степен n

мера на Берноу $|\tilde{\mathcal{I}}| = \sum_{i \in \mathbb{I}_n} d_i$

B^n : $0 \leq |\tilde{\mathcal{I}}| \leq n$
 $|B_k^n|$ - k-мер сфер
 $|B_k^n| = C_n^k$



Берноу код 

$\tilde{\mathcal{I}} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$

$|\tilde{\mathcal{I}}| = \sum_{i \in \mathbb{I}_n} d_i 2^{n-i}$

$\tilde{\mathcal{I}} = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$

$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 91$

$A = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$
 $0 \leq a_i \leq p-1$

$A = b_m q^m + b_{m-1} q^{m-1} + \dots + b_1 q + b_0$

Тема 13: БУЛЕВИ ФУНКЦИИ

Дефиниция на булева функция

Представяне на булева функция с таблица

x	y	f ₀	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	f ₉	f ₁₀	f ₁₁	f ₁₂	f ₁₃	f ₁₄	f ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица на булевите функции на две променливи

Основни свойства на булевите функции:

1. Комутативни свойства: $xy = yx$, $x \vee y = y \vee x$, $x \oplus y = y \oplus x$
2. Асоциативни свойства: $(xy)z = x(yz)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
3. Дистрибутивни свойства: $x(y \vee z) = xy \vee xz$, $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$,
 $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$
4. Идемпотентност: $xx = x$, $x \vee x = x$, $x \oplus x = \tilde{0}$
5. Свойства на отрицанието: $x \wedge x = \tilde{0}$, $x \vee x = \tilde{1}$, $x \oplus x = \tilde{1}$
6. Свойства на константите: $x \wedge \tilde{0} = \tilde{0}$, $x \vee \tilde{0} = x$, $x \oplus \tilde{0} = x$, $x \wedge \tilde{1} = x$,
 $x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$, $x \oplus \tilde{1} = x$
7. Закон за двойното отрицание: $\overline{\overline{x}} = x$
8. Закони на Де Морган: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Съществена/фиктивна променлива на булева функция

Суперпозиция

Формула над дадено множество от функции. Функция, съпоставена на формула.

Задачи:

1. Намерете броя на функциите от F_2^n , които на противоположни вектори приемат:
 - еднакви значения;
 - различни значения.
2. Намерете броя на функциите от F_2^n , които на всяка двойка съседни вектори приемат противоположни стойности.
3. Намерете броя на функциите от F_2^n , които имат значение 1 на повече от k вектора.
4. Да се намери броя на булевите функции на n променливи, които зависят съществено от всичките си променливи.
5. Да се намери броя на функциите от F_2^n , които имат стойност 0 върху вектори с тегло $\leq \frac{n}{2}$.
6. Да се намери броя на функциите от F_2^n , които изпълняват условието:
 - а) Върху дадени k вектори функцията има фиксирани значения, останалите ѝ значения са произволни.
 - б) Функцията $f(\tilde{x}^n)$ съвпада с функцията, получена при разменяте на местата на променливите x_1 и x_2 .
7. Да се докаже, че за следната функция променливата x_1 е фиктивна:
 - а) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1) \wedge (x_2 \uparrow x_2)$
 - б) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1 \mid x_2)$
 - в) $f(\tilde{x}^2) = ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3) \wedge \overline{(x_3 \rightarrow x_2)}$
8. Да се докаже, че ако $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ са два вектора, такива че $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$, то съществуват съседни вектори $\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\beta}_1$, такива че $f(\tilde{\alpha}_1) \neq f(\tilde{\beta}_1)$.
9. Да се докаже, че ако за векторите $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta} < \tilde{\gamma}$ е изпълнено условието $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta}) \neq f(\tilde{\gamma})$, то функцията има поне две съществени променливи.
10. Дадени са функциите:
 - а) $f=(1011)$ и $g=(1001)$
 - б) $f=(1000)$ и $g=(0111)$

Да се определи функцията:

$$а) h(x_2, x_3, x_4) = f(g(x_3, x_4), x_2)$$

$$б) h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$$

11. Като се използва таблицата на функциите на две променливи да се установи еквивалентни ли са формулите:

$$а) x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$б) x \equiv y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$$

$$в) x \uparrow y = ((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))$$

$$г) x \vee (y \equiv z) = (x \vee y) \equiv (x \vee z)$$

12. Да се провери еквивалентни ли са следните формули, като се използват основните тждества:

$$а) U = (x \uparrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}z \rightarrow ((\bar{x} | (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} + z))) \text{ и}$$

$$V = ((x \rightarrow y) | (x \uparrow (y\bar{z}))) \vee \bar{y}z$$

Решение:

$$\begin{aligned} U &= (x \uparrow \bar{y}) \vee (\bar{x}z \rightarrow ((\bar{x} | (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} + z))) = \\ &= (\overline{x \vee \bar{y}}) \vee (\bar{x}z \rightarrow ((\bar{x} | (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} + z))) = \\ &= (\overline{x \vee \bar{y}}) \vee (\bar{x}z \vee ((\bar{x} | (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} + z))) = \\ &= (\overline{x \vee \bar{y}}) \vee (\bar{x}z \vee ((\bar{x}(y \equiv z)) \vee (\overline{xy} + z))) = \\ &= (\overline{xy}) \vee ((x \vee \bar{z}) \vee ((x \vee \overline{y \equiv z}) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z))) = \\ &= (x \vee \bar{y}) \vee ((x \vee \bar{z}) \vee ((x \vee (y + z)) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z))) = \\ &= x \vee \bar{y} \vee x \vee \bar{z} \vee x \vee (y\bar{z} \vee \bar{y}z) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z) = \\ &= x \vee \bar{y} \vee x \vee \bar{z} \vee x \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee ((\bar{x} \vee \bar{y})z \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}) = \\ &= x \vee \bar{y} \vee x \vee \bar{z} \vee x \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} = \\ &= \underline{x \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= ((x \rightarrow y) | (x \uparrow (y\bar{z}))) \vee \bar{y}z = \\ &= ((\bar{x} \vee y) | (x \uparrow (y\bar{z}))) \vee (\bar{y} \vee \bar{z}) = \\ &= ((\bar{x} \vee y) | (\overline{x \vee y\bar{z}})) \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= ((\bar{x} \vee y) | (\bar{x}y\bar{z})) \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= ((\bar{x} \vee y) | (\bar{x}(\bar{y} \vee z))) \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= ((\bar{x} \vee y) | (\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z)) \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= ((\bar{x} \vee y)(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z)) \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= \bar{x} \vee y \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= x\bar{y} \vee (x \vee y)(x \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= x\bar{y} \vee x \vee x\bar{z} \vee xy \vee y\bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ &= \underline{x \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \end{aligned}$$

$$\text{б) } U = (\bar{x}\bar{z}) \vee (xy) \vee (x\bar{z})$$

$$V = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z$$

$$\text{в) } U = (x \rightarrow y) \rightarrow ((x\bar{y}) + (x \equiv \bar{y}))$$

$$V = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$$

$$\text{г) } U = x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)z)$$

$$V = y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

13. Да се упрости следната формула:

$$\text{а) } (\bar{x} \vee \bar{x})(\bar{y} \vee \bar{y}) \vee (x \vee xy)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee xyz$$

$$\text{б) } \overline{xy \vee yz \vee xy \vee xz \vee xz \vee yz}$$

$$\text{в) } (xy \vee \overline{xy})z \vee xy\bar{z}$$

14. Постройте таблицата на функцията f , представени чрез формулата φ над множеството от функции $F = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \downarrow, |, \sim\}$:

$$1. \varphi = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$$

$$2. \varphi = \neg(x \vee y) \vee (x \downarrow z) \downarrow (x \sim y)$$

$$3. \varphi = \bar{x} \rightarrow (\bar{z} \sim (y \oplus (xz)))$$

$$4. \varphi = (((x | y) \downarrow z) | y) \downarrow z$$

Тема 14: ПЪЛНИ МНОЖЕСТВА ОТ БУЛЕВИ ФУНКЦИИ

Дефиниция на затваряне /затворена обвивка/ на множество от булеви функции – $[F]$

Свойства на затварянето:

- $F \subseteq [F]$
- $F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$
- $[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$
- $[[F]] = [F]$

Разлагане на булева функция по i променливи:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\forall \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_i^{\sigma_i} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Пълно множество от булеви функции

$$[F] = F_2$$

Теорема на Бул

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$$

Дизюнктивна нормална форма. Съвършена дизюнктивна нормална форма

Конюнктивна нормална форма. Съвършена конюнктивна нормална форма

Шеферова функция

Задачи:

1. Проверете пълни ли са следните множества от булеви функции:

- a) $\{x_1 \wedge x_2, \bar{x}\}$
- b) $\{x_1 | x_2\}$
- c) $\{x_1 \uparrow x_2\}$
- d) $\{x_1 \wedge x_2, x_1 \oplus x_2, 1\}$
- e) $\{xy \oplus z, (x \equiv y) \oplus z\}$
- f) $\{x \rightarrow y, x \oplus y \oplus z\}$
- g) $\{x \rightarrow y, f = (01011110)\}$
- h) $\{0, m(\tilde{x}^3), x \oplus y \oplus 1\}$
- i) $\{xy \oplus zt \oplus 1, f = (10110110)\}$

2. Намерете СвДНФ на функциите:

- a) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2 x_3$
- b) $f(\tilde{x}^3) = (01101100)$
- c) $f(\tilde{x}^4) = (0001110110011011)$
- d) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1 \bar{x}_2} \rightarrow \bar{x}_3$
- e) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 | x_2) \bar{x}_3$
- f) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \equiv (x_2 \equiv x_3)$
- g) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
- h) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \rightarrow ((x_2 x_3 \rightarrow \bar{x}_4) \rightarrow \bar{x}_2) \bar{x}_3$
- i) $f(\tilde{x}^4) = ((x_1 | x_2) \uparrow x_3) | (x_2 | \bar{x}_4)$
- j) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \rightarrow x_2 \bar{x}_4)$

3. Да се премине от ДНФ към СвДНФ:

- a) $D(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3$
- b) $D(\tilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3$
- c) $D(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$
- d) $D(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_4 x_1$
- e) $D(\tilde{x}^4) = x_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$

4. Да се премине от ДНФ към КНФ:

- a) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_3$
- b) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$
- c) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_3 x_4$
- d) $f(\tilde{x}^4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4$

5. За дадената функция да се намери указаната компонента:

- a) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \rightarrow (x_2 \oplus \bar{x}_1 x_3) \quad f_0^2(\tilde{x}^3)$
- b) $f(\tilde{x}^3) = (01101000) \quad f_1^1(\tilde{x}^3)$
- c) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1 x_4) \quad f_{00}^{24}(\tilde{x}^4)$
- d) $f(\tilde{x}^4) = (0101011011100011) \quad f_{01}^{14}(\tilde{x}^4)$

6. Да се намери броя на булевите функции на n променливи, за които СвКНФ е и СвДНФ.

7. Да се намери броя на булевите функции на две променливи, които изпълняват условието:

$$f_{00}^{ij}(\tilde{x}^n) = f_{11}^{ij}(\tilde{x}^n)$$

8. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, чиято СвДНФ изпълнява условието:

а) Няма елементарна конюнкция, в която броят на буквите с отрицание е равен на броя на буквите без отрицание.

б) Всяка елементарна конюнкция има поне две отрицания.

в) Всяка елементарна конюнкция има четен брой букви с отрицания.

9. Да се намери дължината на СвДНФ на следната функция:

а) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$

б) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$

в) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) + x_4 + \dots + x_n$

г) $f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{i < j} x_i x_j$

д) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (x_3 \rightarrow \dots (x_{n-1} \rightarrow x_n) \dots))$

е) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \rightarrow x_3 \dots x_n$

10. Нека $X^n = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y^m = \{y_1, \dots, y_m\}$, $X \cap Y = \emptyset$. Нека дължината на СвДНФ на функцията $f(\tilde{x}^n)$ е k , а дължината на СвДНФ на функцията $g(\tilde{y}^m)$ е l . Да се намери дължината на СвДНФ на следната функция:

а) $f(\tilde{x}^n) \wedge g(\tilde{y}^m)$

б) $f(\tilde{x}^n) \vee g(\tilde{y}^m)$

в) $f(\tilde{x}^n) + g(\tilde{y}^m)$

Полиноми на Жегалкин – дефиниция. Степен на ПЖ. Дължина на ПЖ. Построяване на ПЖ за произволна булева функция:

- метод на неопределените коефициенти
- чрез еквивалентни преобразувания на формули
- от СвДНФ

Задачи:

1. Намерете булева функция на n променливи, чийто ПЖ е с дължина 2^n пъти по-голяма от дължината на нейната СвДНФ.

2. Намерете броя на различните ПЖ на n променливи с дължина k , които стават 0 на наборите $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$.

3. Намерете броя на монотонните елементарни конюнкции от ранг r над множеството променливи $\{x_1, \dots, x_n\}$.

4. Намерете броя на полиномите от степен r над множеството променливи $\{x_1, \dots, x_n\}$.

5. Намерете дължината на СвДНФ на следния ПЖ:

а) $P(\tilde{x}^n) = x_1 \dots x_k \oplus x_{k+1} \dots x_n$

б) $P(\tilde{x}^n) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus \dots \oplus x_1 x_2 \dots x_n$

6. Да се построи ПЖ за следната функция по метода на неопределените коефициенти:

а) $f(\tilde{x}^2) = (1001)$

б) $f(\tilde{x}^3) = (01101000)$

в) $f(\tilde{x}^3) = (11111000)$

7. Като се използват еквивалентни преобразувания да се получи ПЖ за функцията, представена със следната формула:

а) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 | x_2) \uparrow x_3$

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \uparrow x_3)$

в) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \bar{x}_3) | x_1$

8. Да се построи ПЖ като се използва СвДНФ на следната функция:

а) $f(\tilde{x}^2) = (1101)$

б) $f(\tilde{x}^3) = (11001011)$

в) $f(\tilde{x}^4) = (1000110110100011)$

12) Нека $A \subseteq \mathbb{Z}^n$, $|A| \geq n+2$

$\exists (n+1)$ различни тела на вектори в \mathbb{Z}^n

Следователно в A има поне 2 вектора с равни тела

Нека $|\tilde{\alpha}| = |\tilde{\beta}| \Rightarrow \tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ са несравними

$$\tilde{\alpha} \neq \tilde{\beta} \Rightarrow \exists i: \alpha_i < \beta_i$$

За да са равни $|\tilde{\alpha}| = |\tilde{\beta}|$

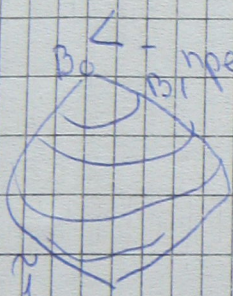
$$\text{следва} \Rightarrow \exists j: \alpha_j > \beta_j$$

т.е. $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ са несравними

19) $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_{k+1}, \dots, \tilde{\alpha}_p$

$$\rho(\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_{k+1}) = 1$$

\forall макс верига в \mathbb{Z}^n започва с $\tilde{0}$ и завършва с $\tilde{1}$



α_k - прегнества

\forall свои съседни \forall вектори с равни тела

$$\tilde{0}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{i-1}, \tilde{1}$$

Тезисът се следва, като от прегнествата на опр. тяло се следва $\tilde{0} < \tilde{1}$.

$$|\tilde{\alpha}_k| = k$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & & & & & & & n \end{array}$$

$$1 \cdot n(n-1)(n-2) \dots (n-i) \dots 1 = n!$$

19) 7) $R = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathbb{B}^n, \beta \in \mathbb{B}^n\}$
 $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha \sim \beta$

1 Рефлексивност - $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}$
 $|\tilde{\alpha}| = |\tilde{\alpha}|$ и $\alpha < \alpha$

$$\begin{aligned}
 x \vee x &= x \\
 x \wedge x &= x \\
 x \vee 0 &= x \\
 x \wedge 1 &= x \\
 x \vee 1 &= 1 \\
 x \wedge 0 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \\
 f(x, y) &= f(y, x)
 \end{aligned}$$

$$N_D \stackrel{?}{=} N_f$$

$$N_{K1}, N_{K2}, \dots, N_{Kj} \subseteq N_f$$

$$N_D = N_{K1} \cup N_{K2} \cup \dots \cup N_{Kj} \subseteq N_f$$

$$d \in N_f \quad d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$K_d = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$$

$$d \in N_D$$

③ Броят на ф-иите от F_2^n които имат значение f на повече от k -вектора
 гръбкватата на вектора $= 2^n$

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=k}^n A_i \quad |A_i| = C_2^i$$

$$|A_i| = C_2^i \quad |A| = \left| \bigcup_{i=k}^n A_i \right| = \sum_{i=k}^n C_2^i$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_n)$$

x_i - произволно

$$d' = (d_1, \dots, d_{i-1}, 0, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

$$d'' = (d_1, \dots, d_{i-1}, 1, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

$$f(d') / f(d'')$$

⑩ $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$
 $g(y_1, \dots, y_m)$

$h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_{i-1},$
 $g(y_1, \dots, y_m, x_{i+1}, \dots, x_n)$

a) $f = (1011)$ $g = (1001)$ $h = (x_2, x_3, x_4) =$
 $= f(g(x_2, x_3, x_4), x_2)$

x_2	x_3	x_4	h
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$g(0,0) = 1$	$f(1,0) = 1$
$g(0,1) = 0$	$f(0,0) = 1$
$g(1,0) = 0$	$f(0,1) = 1$
$g(1,1) = 1$	$f(1,0) = 1$
$g(0,0) = 1$	$f(0,1) = 1$
$g(0,1) = 0$	$f(0,1) = 0$
$g(1,0) = 0$	$f(0,1) = 0$
$g(1,1) = 1$	$f(1,1) = 1$

a) $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$
 $f_1(x, y) = x \vee y$
 $f_1 = (0111)$
 $f_2(x, y) = (x \rightarrow y) \rightarrow y$

x	y	f_2
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

He ca exb.

Множества Базази

① Докажете: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

Реш:

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{A \setminus B} \\ &= A \cap \overline{A \cap \bar{B}} \\ &= A \cap \bar{A} \cup B \\ &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \quad \text{— доказано} \end{aligned}$$

② Да се напише в явен вид 2^A

а) $A = \{\{a\}, \{b\}\}$
 б) $A = \{2\}$

Реш: а) $2^A = \{\emptyset, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}\}$

б) $2^{\{2\}} = \{\emptyset, \{2\}\}$

$2^A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}\}$

③ Да се докаже по индукция:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{за } n \geq 1$$

Доказателство:

$P(n): \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

1.) **База:** Проверяваме верността на $P(1)$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$$

Следователно $P(1)$ е вярно.

2.) Индукционното предположение: $P(k)$ е истина, т.е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

3.) Индукционната стъпка: Ще докажем верността на $P(k+1)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ & = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ & = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+1)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

4.) Заключение: $P(n)$ е вярно за всяко $n \geq 1$

(4) Да се докаже по индукция, че всяко естествено число $n \geq 2$ е просто или е произведение на прости числа

Силна индукция

Доказателство: $P(n)$: n е просто или е произведение на прости числа

1. База: $P(2)$ е вярно, тъй като числото 2 е просто.

2. Индукционното предположение: Нека $n \geq 2$ и $P(k)$ е вярно за всяко k , $2 \leq k < n$.

3. Индукционната стъпка: Ще докажем, че е вярно $P(n)$.

Ако n е просто, то $P(n)$ е вярно. Да предположим, че n не е просто. Тогава $n = xy$, където $2 \leq x \leq n$ и $2 \leq y \leq n$. Съгласно индукционното предположение, $P(x)$ и $P(y)$ са верни, т.е. x и y са прости или произведение на прости числа. Следователно и n е произведение на прости числа, и така $P(n)$ е вярно

и. Заключение: $P(n)$ е вярно за всяко $n \geq 2$

⑤ Да се докаже, че $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$

Реш: $2^{A \cup B} = 2^{\{a, b, c, d\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

$2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \cup \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$

Но $\{b, c, d\} \in 2^{A \cup B}$ и $\{b, c, d\} \notin 2^A \cup 2^B$

Следователно $2^{A \cup B} \neq 2^A \cup 2^B$

⑥ Докажете, че $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Реш: Нека $x \in A \times (B \cup C) \Rightarrow$

$x = (a, z) \mid a \in A$ и $(z \in B$ или $z \in C)$

$\Rightarrow (a, z) \in A \times B$ или $(a, z) \in A \times C \Rightarrow$

$x \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Нека $x \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow$

$x \in (A \times B)$ или $x \in (A \times C)$

ако $x \in (A \times B) \Rightarrow x = (a, b) \mid a \in A, b \in B$

ако $x \in (A \times C) \Rightarrow x = (a, c) \mid a \in A, c \in C$

$x = (a, z) \mid a \in A, z \in (B \cup C) \Rightarrow$

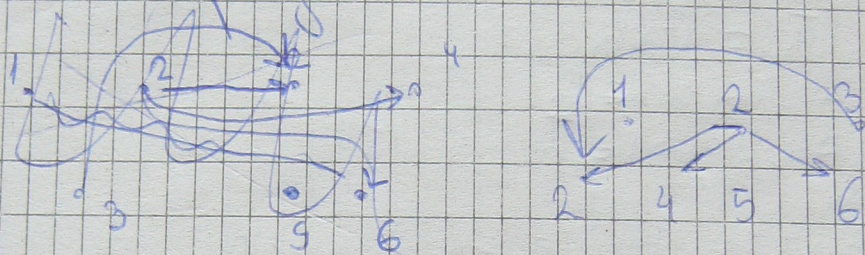
$x \in A \times (B \cup C)$

Следователно $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2. Релации
Задачи

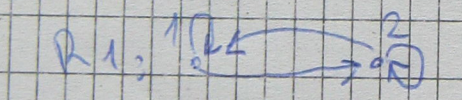
1. Дадени са множествата $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6\}$ и релацията $R \subseteq A \times B$ $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2)\}$.
Намерете представянето на релацията с диаграма и бинарна матрица.

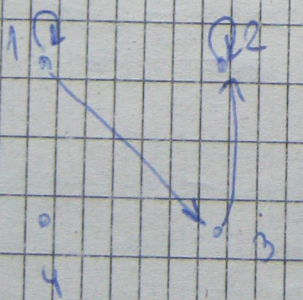
Решение:



	2	4	5	6
1	0	0	0	0
2	1	1	0	1
3	1	0	0	0

2. Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Намерете диаграмата и определете какви свойства притежават релациите $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ и $R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$.

Реш: R_1 :  - рефлексивна
- симетрична
- транзитивна

R_2 :  - Нерефлексивна
- антисиметрична
- Нетранзитивна.

③ Дадена е релацијата $R \subseteq A \times A$. Проверете верноста на тврдeњeта:

- а) Ако релацијата R е рефлексивна, то \bar{R} не е рефлекс.
 б) Ако R е симетрична, то \bar{R} е симетрична
 в) Ако R е транзитивна, то \bar{R} не е транзитивна

Решение: $R \subseteq A \times A$
 $\bar{R} = A^2 \setminus R$

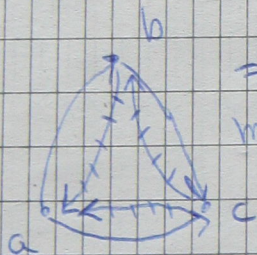
а) $\forall a \in A: (a, a) \in R$
 $\exists a \in A: (a, a) \in \bar{R}$

б) $\forall a, b \in A: (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

Допушаме, ~~е~~ $\exists (a, b) \in \bar{R}$, то $(b, a) \in R$

$\Rightarrow (b, a) \in R$, но тоа е противоречие пошто $(a, b) \in \bar{R} \Rightarrow \bar{R}$ е симетрична

в) $\forall a, b, c \in A: (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$



\Rightarrow Од R - транзитивна $\Rightarrow \bar{R}$ - транзитивна \Rightarrow тврдeњeта е вистинито.

④ Проверете, ~~е~~ следните релации са наредби и определете вида или ~~са~~

а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R \subseteq A \times A$ $R = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

б) $A = \{1, 2, 6, 10, 20, 30\}$ $R \subseteq A \times A$ $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$

Реш: а) $a R b \Leftrightarrow a \leq b$ - рефлексивна - $\forall a \in A: a \leq a \Rightarrow a R a$
 б) $\forall a, b \in A$ или $a \leq b$ или $b \leq a$ - симетрична и симетр.
 в) $\forall a, b, c \in A$ ако $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ - транзитивна \Rightarrow заставата е вистинита наредба

8) $aRb \Leftrightarrow a|b$

1) $\forall a \in A \quad a|a \Rightarrow aRa$ — рефлексивна

2) $2|6$ но $6|2 \Rightarrow R$ е симетр.

$6 \nmid 10$ но $10 \nmid 6 \Rightarrow R$ е антисиметр.

3) ако $a|b$ и $b|c \Rightarrow a|c$ — транзитивна

\Rightarrow Частична наредба

7 Графи - задачи

① Нека $G(V, E)$ е ориентиран мултиграф. Да се докаже че $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Реш: Равенството следва от факта, че при сумиране на степените на всяко ребро се преброява по два пъти, по веднъж за всеки от върховете - негови краища.

② Да се докаже, че ако в свързан граф се отстранят едно ребро принадлежащо на прат функция, то графът ще остане свързан.

Реш: 1) $\{v_k, v_r\} \cap \{v_i, v_j\} = \emptyset$

1.1 В G има път от v_k до v_r .

Нека този не съдържа (v_i, v_j)

1.2 В G има път, който съдържа (v_i, v_j)

$v_{r1}, \dots, v_{rt}, v_i, v_j, \dots, v_s, v_{t+1}, \dots$

$\Rightarrow \exists$ още един път

$v_{r1}, \dots, v_{rt}, (v_i, v_j), \dots, v_s, v_j) v_{r+1}$

\Rightarrow Графа остава свързан.

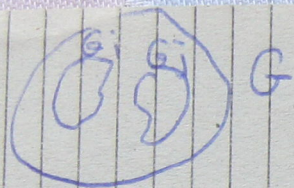
③ Да се докаже, че ако в графа $G(V, E)$ има точно два върха с нечетна степен, то между тях има път.

Реш: Нека v_i и v_j са върховете с нечетна степен.

Допускаме, че \nexists път от v_i до $v_j \Rightarrow G(V, E)$ не е свързан.

$\Rightarrow \exists$ поне 2 свързани компоненти

v_i, v_j са от различни свързани компоненти.



Степенката на v_i в $G_i =$ Степенката на v_i в G

Степенката на v_j в $G_j =$ Степенката на v_j в G

\Rightarrow в G_i $\exists!$ връзка с четната степен - противоречие

$\Rightarrow \exists$ връзка от v_i до v_j

3 Функции - задачи

1. Определите множество от всех функций, с дефиниционным множеством A и множеством значений B :

а) $A = \{1\}, B = \{2, 3\}$

б) $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b\}$

Реш: а) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3)\}$

$f_1: A \rightarrow B \quad f_1(1) = 2$

$f_2: A \rightarrow B \quad f_2(1) = 3$

б) $A = \{a, b, c\} \quad B = \{a, b\}$

$A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_3 = \{c\}, A_4 = \{a, b\} \quad A_5 = \{a, c\}$

$A_6 = \{b, c\}, A_7 = \{a, b, c\}$

$f_{11} = \{(a, a)\}$

$f_{12} = \{(a, b)\}$

$f_{21} = \{(b, a)\}$

$f_{22} = \{(b, b)\}$

$f_{31} = \{(c, a)\}$

$f_{32} = \{(c, b)\}$

$f_{41} = \{(a, a), (b, a)\}$

$f_{42} = \{(a, b), (b, b)\}$

$f_{43} = \{(a, a), (b, b)\}$

$f_{44} = \{(a, b), (b, a)\}$

$f_{51} = \{(a, a), (b, a)\}$

$f_{52} = \{(a, b), (c, b)\}$

.

Булеви функции - задачи

Заг 1) Да се докаже законът $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Реш: Построяваме Wahrheitstabelle за изразите при всички възможни набори от логически стойности на съдържателните променливи:

x	y	$x \wedge y$	$\overline{x \wedge y}$	\overline{x}	\overline{y}	$\overline{x} \vee \overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Сравняваме логическите стойности от лявата страна на израза и от десната (3 и 7 колона) се вижда че са еднакви $\Rightarrow \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Заг 2) Да се докаже законът $(x \wedge y) \vee z \Leftrightarrow (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

Реш:

x	y	z	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \vee z$	$x \vee z$	$y \vee z$	$(x \vee z) \wedge (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Сравняваме 5 стълб с 8 стълб се вижда че:

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

zag 2 Da se proverimo: $F = \bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee abc$

Peru: $\bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee abc = \bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee abc \vee abc$
 $= (\bar{a}bc \vee abc) \vee (a\bar{b}c \vee abc) \vee (ab\bar{c} \vee abc) =$
 $= ((bc)\bar{a} \vee (bc)a) \vee ((ac)\bar{b} \vee (ac)b) \vee ((ab)\bar{c} \vee (ab)c) =$

Opn zak. za men, $\Rightarrow = (bc) \vee (ac) \vee (ab) = bc \vee ac \vee ab$

zag 4 Da se proverimo $G = a \vee \bar{a}b \vee b \vee a\bar{b} \vee \bar{b}c \vee c \vee a\bar{c}$

Peru: $a \vee \bar{a}b \vee b \vee a\bar{b} \vee \bar{b}c \vee c \vee a\bar{c} =$
 $= a \vee \bar{a}b \vee b \vee a\bar{b} \vee \bar{b}c \vee c \vee a\bar{c} \vee b =$
 ~~$= (a \vee \bar{a}b) \vee (b \vee a\bar{b}) \vee (\bar{b}c \vee c) \vee (a\bar{c} \vee b) =$~~
 $= (a \vee b) \vee (b \vee a) \vee (b \vee c) \vee (c \vee a) =$
 $= a \vee a \vee a \vee b \vee b \vee c \vee c =$
 $= a \vee b \vee c$

zag 5 Da se proveru ekvivalenciju ili sa sledećimte formulama, kako se upotrebljavaju osnovne tabele:

$U = (x \uparrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}z \rightarrow ((\bar{x} \uparrow y \equiv z) \vee (\bar{x}y + z))) \vee$
 $V = ((x \rightarrow y) \uparrow (x \uparrow (y \equiv z))) \vee y\bar{z}$

Peru: $U = \overline{(x \uparrow \bar{y}) \vee (\bar{x}z \rightarrow ((\bar{x} \uparrow y \equiv z) \vee (\bar{x}y + z)))} =$
 $= \overline{(x \vee \bar{y}) \vee (\bar{x}z \rightarrow ((\bar{x} \uparrow y \equiv z) \vee (\bar{x}y + z)))} =$
 $= \overline{(x \vee \bar{y}) \vee (\bar{x}z \vee ((\bar{x} \uparrow y \equiv z) \vee (\bar{x}y + z)))} =$
 $= \overline{(x \vee \bar{y}) \vee (\bar{x}z \vee ((\bar{x} \uparrow y \equiv z) \vee (\bar{x}y + z)))} =$
 ~~$= (\bar{x}y) \vee ((x \vee \bar{z}) \vee ((x \vee y \equiv z) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z))) =$~~
 $= (x \vee \bar{y}) \vee ((x \vee \bar{z}) \vee ((x \vee (y + z)) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z))) =$
 $= x \vee \bar{y} \vee x \vee \bar{z} \vee x \vee (y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z) =$
 $= x \vee \bar{y} \vee x \vee \bar{z} \vee x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{y} \vee z \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) + z) =$
 $= x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{y} \vee z \vee x \vee \bar{z} \vee \bar{y} \vee z =$
 $= x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

$$\begin{aligned}
V &= \|x \rightarrow y\| (x \uparrow (y \bar{z})) \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= (\bar{x} \vee y) \|x \uparrow (y \bar{z})\| \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= (\bar{x} \vee y) \|x \vee y \bar{z}\| \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= (\bar{x} \vee y) \|x \vee y \bar{z}\| \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= (\bar{x} \vee y) \|x (\bar{y} \vee z)\| \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= (\bar{x} \vee y) \|x \bar{y} \vee x z\| \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= (\bar{x} \vee y) \|x \bar{y} \vee x z\| \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= \bar{x} \vee y \vee x \bar{y} \vee x z \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= x \bar{y} \vee (x \vee y) \|x \vee z\| \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= x \bar{y} \vee x \vee x z \vee x \bar{y} \vee y \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z} = \\
&= \underline{x \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \quad \text{необходимо } u = V
\end{aligned}$$

4 Принципите на изброявателната комбинаторика - задачи

5 Основни комбинаторни конфигурации

1. В множество от n човека е дефинирана реална познаноства която е симетрична. Да се докаже, че в множеството има поне една група, която има т равен брой познати

Реш: $f: X \rightarrow \text{Познати}$
 $|X| = n$

Бр. познанства $\in [0, n-1]$

1.) Нека \exists човек който няма познати

$\Rightarrow \nexists$ други има $\max n-2$ познати

\Rightarrow бр. познанства $\in [0, n-2]$

Но бр. позн. $< |X| \Rightarrow$ от принципа на Дирихле \exists поне една група с равен брой познати

2.) Нека \exists човек който познава всички $\Rightarrow \exists$ човек който няма познанства \Rightarrow бр. позн $\in [1, n-1]$

Но бр. позн. $< |X| \Rightarrow$ от принципа на Дирихле \exists поне една група с равен брой познати

2. Колко различни форми могат да се появят в шрифта 6^0 от 48?

Реш: $C_{48}^6 = \frac{48!}{6! \cdot 42!}$

3. Колко са различните комбинации на две най-големи азбуки $\{0, 1\}$ с дължина на 10 и точно 4 единици

Реш: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 10 \cdot 7 \cdot 3 = 210$

4. Колко са различните бинарни вектори с 15 нули и 6 единици, такива, че след всяка нула има единица?

Реш: Опн. двойката $(n, k) = (15, 6) \subset X \Rightarrow$ има 6 броя X и 9 броя 0
 \Rightarrow брой бинарни вектори е $C_{15}^6 = C_{15}^9 =$
 $= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot$

5. По колко различни начина могат да се поставят 5 червени и 7 сини топчета като:
 - в купите има не повече от една топка
 - в купите има не повече от една топка от цвета

Реш:
 а) $C_{20}^7 \cdot C_{13}^5$
 б) $C_{20}^7 \cdot C_{20}^5$

6. Колко са двоичните вектори с дължина n , които започват и завършват с различни символи?

Реш: Нека търсеното множество е X . Представете X като $X = A \cup B$. $A = \{ \text{двоичните вектори, започващи с 1 и завършващи с 0} \}$, $B = \{ \text{двоичните вектори, започващи с 0 и завършващи с 1} \}$
 При векторите от A за първата позиция има един вариант за поставяне - 1, а за останалите места $n-2$ на броя има по два варианта - 0 или 1 \Rightarrow
 $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 2^{n-2}$. Аналогично при B , но първата позиция е 0, а посл. 1 $\Rightarrow |B| = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 2^{n-2}$
 От принципа на събирането \Rightarrow
 $|A \cup B| = |A| + |B| = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$

7) Дадени са множествата $|A| = n$ и $|B| = m$, Колко са възможностите за различни функции от A в B ?

Реш: $f: A \rightarrow B$ $|A| = n$ $|B| = m$
 Броят на всички възможна функции е $|A|^{|B|} = m^n$

Броят на инекциите е $\prod_{i=1}^{|A|} (|B| - i + 1) = \frac{m!}{(m-n)!}$

Броят на биекциите е $P_{|A|}$

8) Колко прави минават през 8 точки, никои три от които не лежат на една права?

Реш: Две точки определят една права и няма значение, коя е първа и коя втора. \Rightarrow

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 28$$

9) Колко равнини минават през 7 точки, никои 4 от които не лежат в една равнина?

Реш: Три точки, не лежащи на една права определят една равнина \Rightarrow

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

10) Колко диагонала има правилен n -ъгълник?

Реш: Всички прави през две точки са $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$

$= \frac{n(n-1)}{2}$. Но n -ъгълника има n страни, които не са диагонали \Rightarrow резултатът е:

$$\frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

11) По колко начина могат да бъдат разпределени в един ден 9 учебни предмета, ако в дневната програма се включват 5 различни учебни предмета

$$\text{Реш: } \text{Ч} \quad V_9^5 = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15120$$

12) На работ са подредени 30 тома

6. Рекурентни отношения - задачи

1 зад Да се намери рекурентна зависимост, за броя на начините, по които n различни предмета могат да се подредят в редица.

Реш: Означаваме броя на предметите подредените на n предмета с P_n .

а) Първото място може да се земе по n начина.

б) Останалите места могат да се заемат по $n-1$ предмета по P_{n-1} начина

в) Един предмет може да подреди по един начин $\Rightarrow P_1 = 1$
Следователно рекурентното отношение е:

$$P_n = n P_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$P_1 = 1$$

2 зад Нека е дадена стъпка с n стъпала и можем да я изкачим като стъпваме през едно или през две стъпала. Да се намери рекурентната зависимост за броя на начините, по които можем да изкачим стъпалата

Реш: а) Означаваме броя на различните изкачвания с a_n при стъпка с n стъпала.

а) Стъпка с 1 стъпало може да се изкачи по един начин. Стъпка с 2 стъпала може да се изкачи по два начина.

б) Нека стъпката има още 3 стъпала. Изкачването може да започне по два начина:

- да изкачим едно стъпало, след което остава да изкачим останалите $n-1$ стъпала по a_{n-1} начина

- да изкачим две стъпала, след което остава да изкачим останалите $n-2$ стъпала по a_{n-2} начина.

Така получаваме следното рекурентно отношение:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n > 2$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2$$

3 заг Да се реши рекурентното отношение:

$$a_n = a_{n+1} + 2, n > 1$$

$$a_1 = 3$$

Реш 1:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 = \\ &= (a_{n-2} + 2) + 2 = a_{n-2} + 2 \cdot 2 = \\ &= (a_{n-3} + 2) + 2 \cdot 2 = a_{n-3} + 2 \cdot 3 = \\ &= \dots = \\ &= (a_{n-(n-1)} + 2) + (n-1) \cdot 2 = \\ &= a_1 + 2 \cdot (n-1) = \\ &= 3 + 2(n-1) \end{aligned}$$

Реш 2:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 2 = (a_1 + 2) + 2 = a_1 + 2 \cdot 2 \\ a_4 &= a_3 + 2 = (a_1 + 2 \cdot 2) + 2 = a_1 + 3 \cdot 2 \\ &\dots \\ a_n &= (a_{n-1} + 2) = (a_1 + (n-2) \cdot 2) + 2 = a_1 + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 3 + 2(n-1) \end{aligned}$$

4 заг Да се реши линейното хомогенно рекурентно отношение от втори ред:

$$a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0, n \geq 2$$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 3$$

Реш: $x^2 - 7x + 10 = 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

$$a_n = A_1(2)^n + A_2(5)^n$$

$$a_0 = A_1 + A_2 = 0 \quad A_1 = -A_2$$

$$a_1 = A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 5 = 3 \quad -2A_2 + 5A_2 = 3 \quad 3A_2 = 3 \Rightarrow A_2 = 1 \quad A_1 = -1$$

$$\rightarrow \underline{a_n = -1 \cdot (2)^n + 1 \cdot (5)^n}$$

5 zag Да се реши линейното хомогенно рекурентно отношение от втори ред:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 6$$

Реш: $x^2 - 4x + 4 = 0 \quad x_1 = x_2 = 2$

$$a_n = (A_1 + A_2 \cdot n) 2^n$$

$$a_0 = (A_1 \cdot 1) = 1 \Rightarrow A_1 = 1$$

$$a_1 = (A_1 + A_2 \cdot 1) 2^1 = 6 \quad 2 + A_2 \cdot 2 = 6 \quad 2A_2 = 4 \Rightarrow A_2 = 2$$

$$A_1 = 1 \quad A_2 = 2$$

$$a_n = (1 + 2 \cdot n) 2^n$$

6 zag Да се намери общото решение на нехомогенното линейно рекурентно отношение:

$$a_n - 2a_{n-1} = 3^n$$

$$a_0 = 4$$

Реш: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ на хомогенното отношение е:

Общото му решение е: $a_n = A \cdot 2^n = A \cdot 2^n$ на хомог.

Търсим частното решение от вида $P \cdot 3^n$ Заменяваме в хомогенното уравн.

$$P \cdot 3^n - 2P \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad P \cdot 3^n - \frac{2}{3} P \cdot 3^n = \frac{P}{3} \cdot 3^n$$

$$\frac{P}{3} 3^n = 3^n \Rightarrow P = 3$$

Следователно частното решение е: $a_n^p = 3^{n+1}$ на нехомог. отн.

Общото решение на нехомогенното рекурентно отношение е:

$$a_n = a_n^n + a_n^p = A \cdot 2^n + 3^{n+1}$$

$$a_0 = A + 3 = 4 \Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow a_n = 2^n + 3^{n+1}$$

7309 Найдите общее решение на линейного негетометно рекуррентно отношение:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 4 \quad n \geq 2 \quad a_0 = 1; a_1 = 3$$

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

а) Решение: а) Найдите общее решение на соответного гомогенно рекуррентно отношение:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad D = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$a_n^h = A_1(2)^n + A_2(3)^n$$

$$a_0 = A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = 1 - A_1$$

$$a_1 = A_1(2) + A_2(3) = 3 \Rightarrow 2A_1 + 3 - 3A_1 = 3 \Rightarrow A_1 = 0$$

б) Найдите частното релм. на негетомет. рек. отношение

$a_n^p = P$ - заместване в рекуррентното отношение:

$$P - 5P + 6P = 4$$

$$P = 2$$

в) Общо релм. на негетомет. рек. отношение:

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

$$a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n + 2$$

$$a_0 = A_1 + A_2 + 2 = 1 \Rightarrow A_2 = -1 - A_1$$

$$a_1 = A_1 \cdot 2 + 3A_2 + 2 = 3$$

$$2A_1 - 3 - 3A_1 + 2 = 3$$

$$-A_1 = 4 \quad A_1 = -4$$

$$A_2 = 3$$

$$a_n = -4 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n + 2$$

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+2} + 2$$

8 зааа) Намерете общото решение на линейното нехомогенно рекурентно отношение:

$$a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 3^n \quad a_0 = 1; a_1 = 3$$

Реш: а) Намираме общото реш. на съответното хомогенно рекурентно отношение:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

$$a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 5^n$$

б) Търсим частното решение от вида $P \cdot 3^n$

$$P \cdot 3^n - 7P \cdot 3^{n-1} + 10P \cdot 3^{n-2} =$$

$$= P \cdot 3^n - \frac{7}{3} P \cdot 3^n + \frac{10}{9} P \cdot 3^n =$$

$$= \frac{9}{9} P \cdot 3^n - \frac{21}{9} P \cdot 3^n + \frac{10}{9} P \cdot 3^n$$

$$= -\frac{2}{9} P \cdot 3^n = 3^n$$

$$a_n^P =$$

$$P = -\frac{9}{2}$$

1. Докажете, че елементът a_{ij}^k в k -тата степен на матрицата на съседство M^k на графа G е равен на броя на маршрутите от i до j с дължина k .

11 т.

6. Колко са пермутациите на числата от 80 до 91, в които четните числа и само те заемат собствената си позиция в наредбата на естествените числа по големина?

11 т.

2. Решете рекурентното отношение :

$$d_0 = -2 \quad d_1 = 5 \quad d_2 = 1$$

$$d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2} - 2d_{n-3}$$

8 т.

7. Намерете броя на релациите, дефинирани над декартовия квадрат на множеството $A = \{a, b, c, d\}$ които са симетрични. Обосновете полученния резултат.

8 т.

3. Намерете базовото решение на зададеното рекурентно отношение :

$$d_n = -5d_{n-1} - 6d_{n-2} + 3 + n^2 \cdot 2^n$$

8 т.

8. В кутия има 3 жълти, 5 червени и 6 бели топки. Топките се изваждат една по една като се записва редът на изваждане.

а) По колко начина могат да бъдат извадени всички топки?

б) В колко от случаите за всеки цвят е изпълнено условието – топките от този цвят не са извадени една след друга.

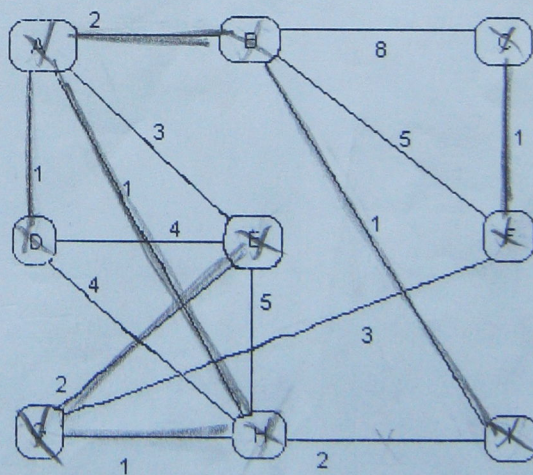
13 т.

9. За дадения граф намерете покриващо дърво с корен D чрез обхождане:

а) в ширина

б) в дълбочина.

8 т.



4. Колко числа най-малко трябва да изберем :

а) измежду естествените числа от 1 до 700, така че да има поне две, които дават един и същи остатък при деление на 7;

б) измежду естествените числа от 311 до 329, така че да има поне две, чиято сума е 640.

в) Нека измежду естествените числа от 1 до 29 са избрани две непресичащи се подмножества – всяко от 8 числа. Ще има ли поне две различни двойки числа, в които първото число е от едното множество, а второто – от другото, които са с еднаква сума.

Обосновете отговорите.

13 т.

5. Да се определи броят на думите с дължина n над азбуката $A = \{a, b, c, d, e\}$, в които има нечетен брой букви d .

8 т.

10. За дадения граф намерете минимално покриващо дърво с корен D чрез :

а) алгоритъма на Прим.

б) алгоритъма на Крускал.

Посочете реда, по който върховете се включват в дървото.

12 т.

вариант 2

Заг 1 Докажете, че е a_{ij}^k в k -тата степен на матрицата на следство M^k на графа G е равен на броя на маршрутите от i до j с дължина k .

Доказателство: Нека $|V| = n$ - бр. на върховете на G
 Ще докажем твърдението с индукция по k .

а) Нека $k=1$. Твърдението е в сила: $M^1 = M$ и a_{ij}^1 е броят на маршрутите с дължина 1 от v_i до v_j във. граф. за матр. на следства.

б) Да допуснем, че за някое $k > 1$ броят на маршрутите с дължина $k+1$ от v_i до v_j е a_{ij}^{k+1} , $\forall i, j \in I_n$

в) Разглеждаме $M^k = \|a_{ij}^k\|$, $k > 1$. Обясно правилото за умножение на матрици:

$$a_{ij}^k = a_{i1}^{k-1} a_{1j}^1 + \dots + a_{il}^{k-1} a_{lj}^1 + \dots + a_{in}^{k-1} a_{nj}^1$$

Разбиваме множеството от всички маршрути T_{ij}^k от v_i до v_j с дължина k на подмножества $T_{ij}^{k,l}$ с ед-накъв предпоследен връх $v_l \in V$, $l \in I_n$. От приликата за разбиването следва, че $|T_{ij}^k| = \sum_{l=1}^n |T_{ij}^{k,l}|$. Всеки маршрут с дължина k от v_i до v_j и предпоследен връх v_l се получава от някои маршрут от v_i до v_l с дължина $k-1$ и някои маршрут с дължина 1 от v_l до v_j . Обясно индукционното предположение броят на различните маршрути от v_i до v_l с дължина $k-1$ е a_{il}^{k-1} , а на ребрата от v_l до v_j по дефиниция е a_{lj}^1 . От приликата на умножението следва

$$|T_{ij}^k| = \sum_{l=1}^n |T_{ij}^{k,l}| = \sum_{l=1}^n a_{il}^{k-1} a_{lj}^1 = a_{ij}^k$$

за **заг 2** Решете рекурентното отношение:

$$d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2} + 2d_{n-3} \neq$$

$$d_0 = -2; d_1 = 5; d_2 = 1$$

Реш: $d_n - 2d_{n-1} - d_{n-2} + 2d_{n-3} = 0$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2(x-2) - (x-2) = 0$$

$$(x^2-1)(x-2) = 0 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

$$d_n = A_1 \cdot (-1)^n + A_2 \cdot 1^n + A_3 \cdot 2^n$$

$$d_0 = A_1 + A_2 + A_3 = -2 \Rightarrow A_3 = -2 - A_1 - A_2$$

$$d_1 = -A_1 + A_2 - 4 - 2A_1 - 2A_2 = 5$$

$$-3A_1 - A_2 = 9 \Rightarrow A_2 = -3A_1 - 9 \Rightarrow A_3 = -2 - A_1 + 3A_1 + 9$$

$$d_2 = A_1 + (-3A_1 - 9) + 16A_1 + 29 = 1 \quad A_3 = 2A_1 + 7$$

$$6A_1 = -18$$

$$A_1 = -3 \quad A_2 = 9 - 9 = 0 \quad A_3 = -6 + 7 = 1$$

$$d_n = -3 \cdot (-1)^n + 0 \cdot 1^n + 1 \cdot 2^n$$

заг 5 Да се определи броят на думите с дължина n над азбуката $A = \{a, b, c, d, e\}$, в които има нечетен брой букви d .

Реш: Нека във думата има 1 път d . То може да се постави на n места. Остават $n-1$ позиции на думата, които могат да се попълнят с 4 различни букви - $4A_4^{n-1}$. Думите с 1 d са $n \cdot 4^{n-1}$ на брой.
Нека в думата има 3 пъти d . Те могат да се поставят в думата по C_n^3 . Останалите $n-3$ позиции могат да се попълнят с 4 букви по A_4^{n-3} . Думите с 3 пъти d са $C_n^3 \cdot 4^{n-3}$ на брой. Индуктивно получаваме:

Думите с дължина n , в които има нечетен брой букви d са $C_n^1 A_4^{n-1} + C_n^3 A_4^{n-3} + \dots + C_n^{n-2} A_4^{n-(n-2)} + 1$ ако n е нечетно и $C_n^1 A_4^{n-1} + C_n^3 A_4^{n-3} + \dots + C_n^{n-3} A_4^{n-(n-3)} + C_n^{n-1} A_4^{n-(n-1)}$ ако n е четно

вариант 2

Заг 6) Колко са пермутациите на числата от 80 до 91, в които четните числа и само те заемат собствената си позиция в наредбата на естествените числа по големина?

Реш: Има 12 позиции за подреждането на 12 числа. 6 от тях са четни, 6 са нечетни. По условие четните числа са на местата си. Нечетните числа могат да се подредят на 6 позиции по P_6 начина \Rightarrow Решението е $P_6 = 6!$

Заг 7) Намерете броя на реалните дефинирани над декартовия квадрат на множеството $A = \{a, b, c, d\}$ които са симетрични:

Реш: Нека първо определим броя на вариантите на различна реализация от вида $a^i b^j$ в различните реализации. Реализациите в които има единствена $a^i b^j$ са C_4^1 . Реализациите в които има две двойки от вида $a^i b^j$ са C_4^2 и т. н. т. \Rightarrow Броят на вариантите за двойки от вида $a^i b^j$ в различните реализации са $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$

Могат да се образуват $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 6$ двойки от елементите a, b, c, d , като $2 \cdot 2$ редът им няма значение, защото за да бъде реализацията симетрична трябва $a^i b^j$ и $b^j a^i$. Намираме броя за n вариантните двойки от вида $a^i b^j$ в различните реализации. Аналогично с реал. от вида $a^i b^j$ получават $C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^6$. На всеки един избор от първите реал. съответства избор от вторите реализации \Rightarrow

Решението е: $(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4) \cdot (C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^6)$

3 зад В кучица има 3 жолти, 5 червени и 6 бели точки.
Точките се изваждат една по една като се
замисва редът на изваждане

а) По колко начина могат да бъдат извадени всички
точки?

б) В колко от случаите за всеки цвят е изпълнено
условието - точките от този цвят не са извадени
една след друга?

Реш: а) Всички точки могат да бъдат извадени
по $P_{14} = 14!$ начина

4 зад Колко числа най-малко трябва да изберем:
а) измисляме ест. числа от 1 до 700, така, че да
има поне две които дават един и същи остатък
при деление с 7?

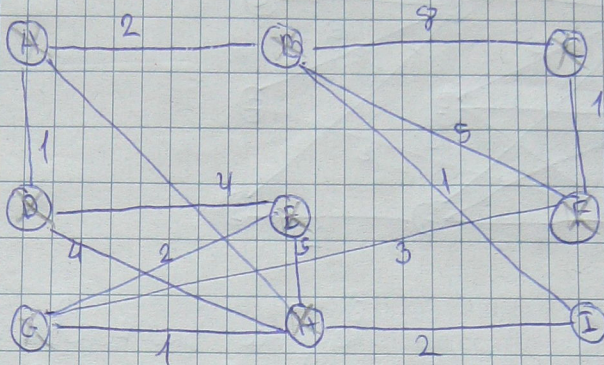
б) измисляме естествените числа от 311 до 329
така, че да има поне две, чиято сума е 640

в) Нека измисляме ест. числа ^{от 1 до 29} са избрани две не-
прекриващи се подмножества - всяко с 8 числа. Ще има
~~поне две~~ ^{поне две} числа, кои в които първо поне две двойки
различни числа, в които първото число да е от ед-
ното множество, а второто - от другото, които да са
с еднаква сума?

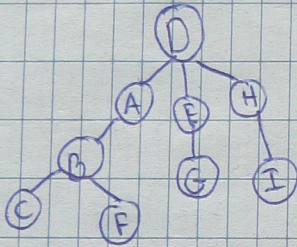
вариант 2 За

9 Заг. За даден граф намерете покриващо дърво с корен D , чрез обхождане:

- а) в широчина
- б) в дълбочина

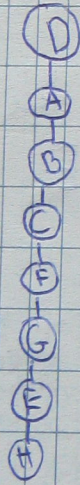


Реш: а)



- $L_0 = \{D\}$ $E_0 = \{\}$
- $L_1 = \{A, E, H\}$ $E_1 = \{(D,A), (D,E), (D,H)\}$
- $L_2 = \{B, G, I\}$ $E_2 = \{(A,B), (E,G), (H,I)\}$
- $L_3 = \{C, F\}$ $E_3 = \{(B,C), (B,F)\}$

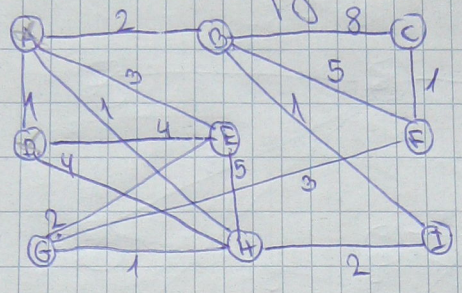
б)



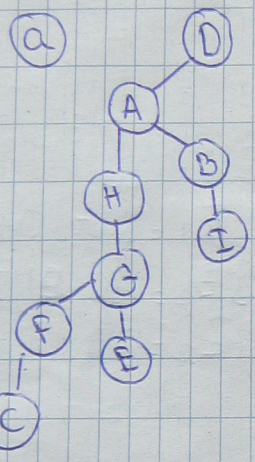
- $t = D$ см. H. (D, A)
- $t = A$ см. H (A, B)
- $t = B$ см. H (B, C)
- $t = C$ см. H (C, F)
- $t = F$ см. H (F, G)
- $t = G$ см. H (G, E)
- $t = E$ см. H (E, H)
- $t = H$ см. H (H, I)
- $t = I$ см. H (I, A) , $t = H$ см. H (H, A) ...

10) За даден граф намерете минимално покриващо дърво с корен D чрез:

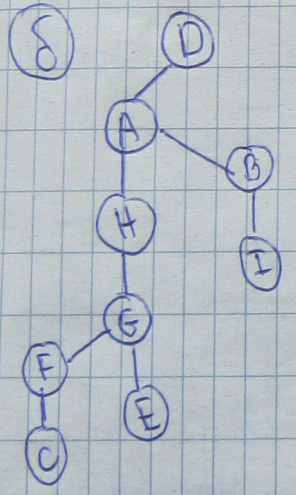
- а) алгоритъм на Прим,
- б) алгоритъм на Крускал.



Реш:



Ред на включване на ел:
D, A, H, G, B, I, E, F, C



Ред на включване на ел:
D, A, B, I, H, G, F, C, E

1. За редицата от суми

$S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$ където

$$S_i = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + i \cdot 2^i + (i+1) \cdot 2^{i+1}$$

а) дефинирайте съответното рекурентно отношение и намерете формула за общия

член S_n ;

б) докажете верността на получената формула чрез метода на математическата индукция.

18 т.

2. Намерете броя на различните решения в цели неотрицателни числа на уравнението

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 33$$

$$\text{ако } 1 \leq X_4 \leq 11$$

10 т.

5. Да се докаже, че ако в един граф $G(V, E)$, $|V| = n$ и за всяко $v_i \in V$ е изпълнено

$$d(v_i) \geq \frac{n-1}{2}, \text{ то графът е свързан.}$$

11 т.

6. Нека $A \subseteq \mathbb{J}_2^n$ и $|A| > 2^{n-1}$. Да се докаже, че в A има поне n двойки съседни вектори.

11 т.

3. Да се намери броя на n -значните десетични числа (цели, без знак), които:

а) съдържат поне две еднакви съседни цифри;

б) са съставени чрез използване на точно две различни цифри.

16 т.

7. Да се определи броя на различните растящи вериги с дължина n в \mathbb{J}_2^n , съдържащи фиксиран вектор $\alpha \in \mathbb{B}_k^n$.

12 т.

4. Напишете класовете на еквивалентност, на които дефинираната по-долу релация R разбива множеството $A^{\leq 3}$, състоящо се от всички думи с дължина не по-голяма от 3 над азбуката $A = \{a, b\}$.

$R \subseteq A^{\leq 3} \times A^{\leq 3}$, такава, че $(\alpha, \beta) \in R \Leftrightarrow \alpha$ и β са с една и съща дължина и имат един и същи предпоследен символ.

8 т.

8. Да се определи броя на двоичните функции $f(\tilde{x}^n)$, за които:

а) $\exists \alpha, \bar{\alpha}$ такива, че $f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = 1$;

б) $|N_f| \leq k$ (k – фиксирано, $0 \leq k \leq 2^n$).

14 т.

Вариант 1

Заг (a) Да се намери броя на n значните десетични числа, които:

- (a) съдържат по-малко от две еднакви съседни цифри.
(b) са съставени чрез използване точно на две различни цифри.

Реш: (a) Нека $1 \leq i \leq n-1$. Нека на позициите i и $i+1$ има две еднакви цифри. Другите позиции могат да се попълнят по $A_{10}^{n-1} = 10^{n-1}$ начина. Двете еднакви цифри могат да се разположат по C_n^2 начина. Трябва да извадим от всички варианти тези при които 0 е на първо място - A_9^{n-2} .

Резултатът е:

$$C_n^2 \cdot (A_{10}^{n-1} - A_9^{n-2}) = \frac{n!}{2!(n-2)!} (10^{n-1} - 10^{n-2})$$

(b) $A_2^n = 2^n$

3

1. Нека $U \subseteq V$ е получено след поредната стъпка на алгоритъма на Дейкстра за графа $G(V, E)$, с начален връх 0. Докажете, че $\forall k \in U$ в $d[k]$ е дължината на най-късия специален път от k до 0.

11 т.

2. Докажете, че всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин.

11 т.

3. Намерете полинома на Жегалкин за зададената функция и конструирайте схема от функционални елементи за получения полином.

$$f(\tilde{x}^3) = (10010111)$$

8 т.

4. Определете дали зададените формули

$$(x.\bar{y} \vee \bar{x}.z) \oplus ((y \rightarrow z) \rightarrow \bar{x}.y)$$

и

$$(x.(\bar{y}.\bar{z}) \oplus y) \oplus z$$

са еквивалентни :

а) чрез еквивалентни преобразувания

б) чрез таблица.

14 т.

5. Да се намерят всички прости импликанти на двоичната функция $f(\tilde{x}^4)$, зададена с

$$N_f = \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14\}$$

12 т.

6. Да се определи дължината на СвДНФ на двоичната функция.

$$f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n, \quad n \geq 3$$

10 т.

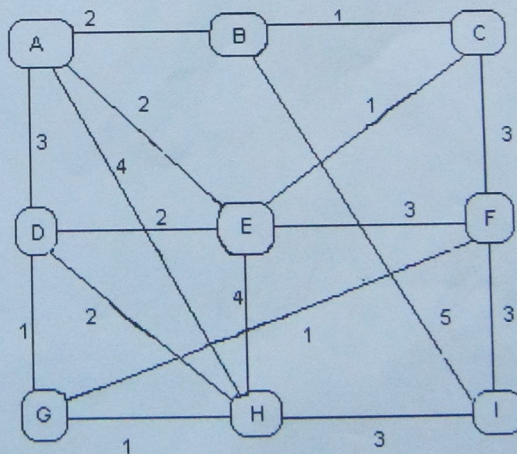
7. Да се определи дължината на СвДНФ на функцията $f(\tilde{x}^n) \oplus g(\tilde{x}^n)$, ако \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 са съответните дължини на СвДНФ на двоичните функции

$$f(\tilde{x}^n) \rightarrow g(\tilde{x}^n) \quad \text{и} \quad g(\tilde{x}^n) \rightarrow f(\tilde{x}^n).$$

10 т.

8. Прилагайки метода на Дейкстра за дадения по-долу граф, намерете дължините на най-късите пътища от върха **D** до всеки от останалите върхове на графа.

12 т.



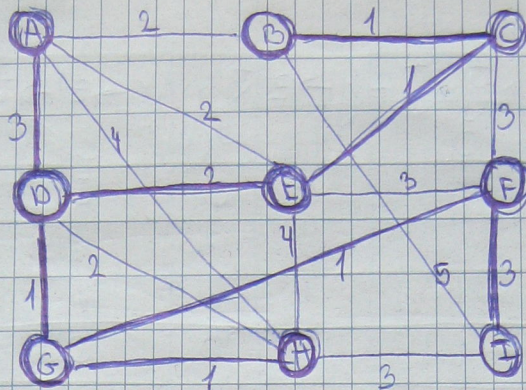
9. Да се намери броя на двоичните вектори $\tilde{\alpha} \in B_k^n$, за

които $2^i \leq v(\tilde{\alpha}) \leq 2^j$, където $0 < i < j \leq n-1$.

12 т.

Вариант 3

Заг 8



Начинаем връзка е D. Съседният връзка на D с най-малко тегло на реброто е с D е G. Присъединяваме към дървото на минималните тегла с D корен D, реброто (D, G). Нека отн. път на даден връзка Q с $dist(Q)$ от D до Q. С най-малко път до D от съседните на присъединените връзки към дървото е връзката H. Присъединяваме реброто (G, H). По същата причина присъединяваме връзка E и реб. (D, E)

Най-малко път от D до A е $D-A = 3$

— || — от D до B е $D-E-C-B = 2+1+1 = 4$

— || — от D до C е $D-E-C = 2+1 = 3$

— || — от D до E е $D-E = 2$

— || — от D до F е $D-G-F = 1+1 = 2$

— || — от D до G е $D-G = 1$

— || — от D до H е $D-G-H = 1+1$

— || — от D до I е $D-G-F-I = 1+1+3 = 5$

4 Заг 1

$x \backslash y$	x	y	z	$x \cdot y$	$\bar{x} \cdot z$	$y \rightarrow z$	$\bar{x} \cdot y \vee (y \rightarrow z) \rightarrow \bar{x} \cdot y$
0/0	0	0	0				
0/1	0	0	1				
1/0	0	1	0				
1/1	0	1	1				
	1	0	0				
	1	0	1				
	1	1	0				
	1	1	1				

4. 3. 2019

X	Y	Z	\bar{X}	\bar{Y}	$X\bar{Y}$	$\bar{X}Z$	$X\bar{Y} \vee \bar{X}Z$	$Y \rightarrow Z$	$\bar{X}Y$	$(Y \rightarrow Z) \rightarrow \bar{X}Y$	$(X\bar{Y} \vee \bar{X}Z) \oplus ((Y \rightarrow Z) \rightarrow \bar{X}Y)$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

X	Y	Z	\bar{Z}	\bar{Y}	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X(\bar{Y}\bar{Z}) \oplus Y$	$(X(\bar{Y}\bar{Z}) \oplus Y) \oplus Z$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0

Сравнявайки двете таблици формулите са еквивалентни

$$\begin{aligned}
 (X\bar{Y} \vee \bar{X}Z) \oplus ((Y \rightarrow Z) \rightarrow \bar{X}Y) &= (X\bar{Y} \vee \bar{X}Z) \oplus ((\bar{Y} \vee Z) \vee \bar{X}Y) \\
 &= (X\bar{Y} \vee \bar{X}Z) \oplus ((\bar{Y} \cdot \bar{Z}) \vee \bar{X}Y) = (X\bar{Y} \vee \bar{X}Z) \oplus Y(\bar{Z} \vee \bar{X})
 \end{aligned}$$