Класическа вероятност

Условна вероятност $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Пълна вероятност $P(A)=\sum_i P(H_i)P(A\mid H_i)$

Формула на Бейс $P(H_k\mid A)=\dfrac{P(H_k)P(A\mid H_k)}{\sum_i P(H_i)P(A\mid H_i)}$

Дискретни случайни величини $p_i=P(\xi=x_i)$

Математическо очакване $E\xi=\sum_i x_i p_i \quad Eh(\xi)=\sum_i h(x_i)p_i$

Дисперсия $D\xi=E(\xi-E\xi)^2=E\xi^2-(E\xi)^2$

Ковариация $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)=E\xi\eta-E\xi\,E\eta$

Кофицент на корелация $\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Пораждаща функция $g_\xi(x)=\sum_i x^i p_i$

$E\xi=g'(1) \quad D\xi=g''(1)+g'(1)-(g'(1))^2$

$g_{\xi+\eta}(x)=g_\xi(x)g_\eta(x)$

Дискретни разпределения

$\xi\in Bi(n,p)\Leftrightarrow P(\xi=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,\dots,n$ $E_\xi=n.p$ $D_\xi=n.p.q$

$\xi\in Ge(p)\Leftrightarrow P(\xi=k)=p(1-p)^k,\ k=0,\dots$ $E_\xi=\frac{1}{p}$ $D_\xi=\frac{q}{p^2}$ ($E_\xi=\frac{q}{p}$, ако е от 0)

$\xi\in Po(\lambda)\Leftrightarrow P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,\dots$ $E_\xi=D_\xi=\lambda$

$\xi\in HG(N,M,n)\Leftrightarrow P(\xi=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $E_\xi=\frac{Mn}{N}$

Полиномно разпределение

$P(\xi_1=l_1,\xi_2=l_2,\dots,\xi_k=l_k)=\dfrac{n!}{l_1!l_2!\dots l_k!}p_1^{l_1}p_2^{l_2}\dots p_k^{l_k}$

$$\frac{\Sigma\xi_i-E\Sigma\xi_i}{\sqrt{D\Sigma\xi_i}}\xrightarrow{d}\eta\in N(0,1)$$

ξ,η-случайни величини, $f_\xi(x)$-плътност на ξ, $F_\xi(x)$-функция на разпределение на ξ, $f_{\xi,\eta}(x,y)$-съвместна плътност на ξ и η

$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx=1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy=1$

$f_\xi(x)=\dfrac{\partial F_\xi(x)}{\partial x} \qquad f_{\xi,\eta}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$

$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt \qquad F_{\xi,\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv$

$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy \qquad F_\xi(x)=F_{\xi,\eta}(x,\infty)$

$P(\xi\in A)=\int_A f_\xi(x)\,dx \qquad P((\xi,\eta)\in D)=\iint_D f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy$

$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx \qquad E\,g(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x)\,dx$

$D\xi=E(\xi-E\xi)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2 f_\xi(x)\,dx$

$f_{\xi|\eta}(x\mid y)=\dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} \qquad E(\xi\mid\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta}(x\mid y)\,dx$

$P(\xi\in A\mid \eta=y)=\int_A f_{\xi|\eta}(x\mid y)\,dx$

$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty} P(A\mid\xi=x) f_\xi(x)\,dx$

$F_\xi(x) = P(\xi < x)$ ф-я на разпределение

$f_\xi(x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}$

$P(a < \xi < b) = \int_a^b f_\xi(x)\,dx$

Равномерно разпределение

$\xi \in U(a,b)$ $\quad f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin \end{cases}$

$E\xi = \dfrac{a+b}{2}$

$D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Експоненциално разпределение

$\xi \in Ex(\lambda)$

$E\xi = \dfrac{1}{\lambda}$

$D\xi = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Нормално разпределение

$\xi \in N(\mu, \sigma)$ $\quad f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\eta = \dfrac{\xi - \mu}{\sigma} \in N(0,1)$

$\mu = E\xi$

$D\xi = \sigma^2$

$P(-1 < \eta < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$\Phi(-q) = 1 - \Phi(q)$

$y = g(x)$

$x = h(y)$

$|J| = \left|\dfrac{\partial h}{\partial y}\right|$

$f_\eta(y) = f_\xi(h(y))\,|J|$

границите!

(Бі. разпр. напр. $\dfrac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} N(0,1)$)

Марг. плътност

$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dy$

$P(\underset{\text{мн-во}}{\eta \in O} \mid \underset{\text{фикс}}{\xi = x_0}) = \int_O f_{\eta\xi}(y|x)\,dy \Big/_{x = x_0}$

$E(\xi\eta) = \iint_{R^2} xy\, f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy$

2рр - Мода с --? ?

?

Формули по вероятности

Комбинаторика	$V_n^{\ k} = n(n-1)...(n-k+1)$, $\widetilde{V}_n^{\ k} = n^k$ $C_n^{\ k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ $\widetilde{P}_{k_1+k_2+...+k_n} = \dfrac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{(k_1!)(k_2!)...(k_n!)}$
Формула за събиране на вероятности	$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} P(A_\kappa) - \sum\limits_{\substack{\kappa,j=1 \\ k<j}}^{n} P(A_k A_j) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$
Формула за пълната вероятност	$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i),$ $A_1, A_2, ..., A_n$ – *пълна група*
Формула на Бейс	$P(A_j \mid B) = \dfrac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)},$ $A_1, A_2, ..., A_n$ – *пълна група*
Бернулиево разпределение	$P(X=1) = p,$ $P(X=0) = 1-p,$ $EX = p,$ *Дисперсия* $= p(1-p)$
Биномно разпределение n опита, p=P(Успех)	$P(X=k) = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k},$ $k = 0,1,...n$ $EX = np$ *Дисперсия* $= np(1-p)$
Поасоново разпределение	$P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$ $k = 0,1,2,3...$ $EX = \lambda$ *Дисперсия* $= \lambda$
Геометрично разпределение	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1},$ $k = 1,2,3,....$ $EX = \dfrac{1}{p}$ *Дисп.* $= \dfrac{1-p}{p^2}$
Хипергеометрично разпределение	$P(X=k) = \dfrac{C_m^{\ k} C_{N-m}^{\ \ n-k}}{C_N^{\ n}},$ $k = 0,1,...n$ $EX = \dfrac{nm}{N}$ *Дисперсия* $= \dfrac{nm}{N}\left[\dfrac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \dfrac{nm}{N}\right]$
Равномерно дискретно разпределение	$P(X = x_k) = \dfrac{1}{n},$ $k = 1,2,...n$ $EX = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$
Равномерно непрекъснато разпределение	$f(x) = \dfrac{1}{b-a},$ $x \in [a,b]$ $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a},$ $x \in [a,b]$ $EX = \dfrac{a+b}{2}$ *Дисперсия* $= \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Експоненциално разпределение	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x};$ $x \geq 0$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},$ $x \geq 0$ $EX = \dfrac{1}{\lambda}$ *Дисперсия* $= \dfrac{1}{\lambda^2}$
Нормално разпределение	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$ $-\infty < x < \infty$ $EX = \mu$ *Дисперсия* $= \sigma^2$

Доц. С. Христова

Непрекъснати разпределения.

- Плътност на непрекъсната случайна величина $f(x)$:
  - $f(x) \geq 0$
  - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
  - $P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$
- Функция на разпределение: $F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$
  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- Очакване: $E(H(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx$, ако $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(x)|f(x)dx < \infty$
- Трансформация на променливи: X е случайна величина с плътност $f_X(x)$, а $Y = g(X)$, където g е строго монотонна и диференцируема функция. Плътността на Y тогава е

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

- Непрекъснато равномерно разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},\ a < x < b;\ \ E(e^{tX}) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)};\ \ EX = \frac{a+b}{2};\ \ VX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Експоненциално разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta},\ x, \beta > 0;\ \ E(e^{tX}) = \frac{1}{1-\beta t};\ \ EX = \beta;\ \ VX = \beta^2;$$

- Нормално разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2};\ \ E(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}};\ \ EX = \mu;\ \ VX = \sigma^2$$

Съвместни, маргинални и условни (непрекъснати) разпределения.

- Съвместно разпределение на X и Y: $\int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)dxdy = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$, $f_{XY}(x,y) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

- Маргинални разпределения на двумерно (X,Y) разпределение със съвместна плътност $f_{XY}(x,y)$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$

- Независимост: ако $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ за всяко x и y.

- Математическо очакване: $E(H(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy$, ако съществува $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x,y)|f_{XY}(x,y)dxdy$.

- Ковариация: $Cov(X,Y) = E((X-\mu_x)(Y-\mu_y)) = E(XY)-E(X)E(Y)$. Ако X и Y са независими ковариацията им е 0, обратното НЕ Е вярно.

- Корелационен коефициент: $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}}$

- Условна плътност: $f_{X|y}(x) = f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$
условно математическо очакване: $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y}(x)dx$

- Трансформация на променливи: (X,Y) са случайни величини със съвместна плътност $f_{XY}(x,y)$, а $U = g_1(X,Y)$, $V = g_2(X,Y)$, където g_1, g_2 дефинират взаимно еднозначна трансформация. Ако означим обратната трансформация с $X = h_1(U,V)$, $Y = h_2(U,V)$, то плътността на (U,V) тогава е

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(h_1(u,v), h_2(u,v))|J|,$$

където

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

е якобианът на обратната трансформация.

ЗАДАЧИ: