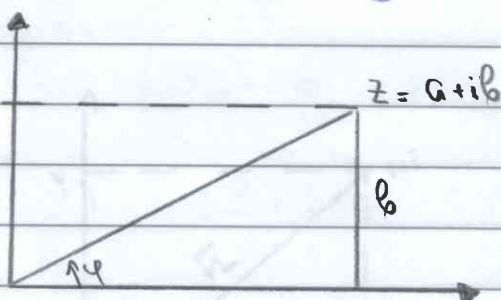


Неравенство на Δ:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Тригонометричен вид на комплексните числа:



φ - ъгъл между вектора z
 $\arg z = \arg z$

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Ако φ е $\arg$ на z , то
 $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ също е
аргумент на z .

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi + \psi)}$$

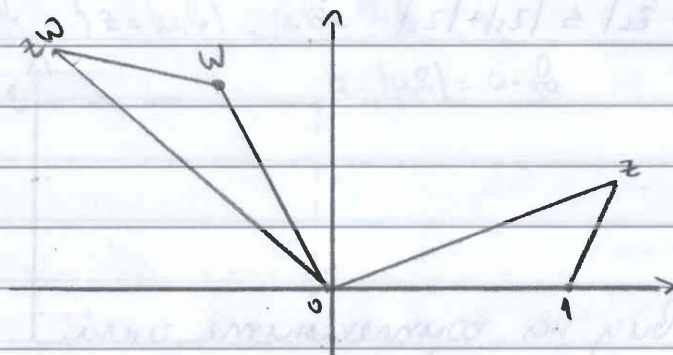
$$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi - \psi)}$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

$$z \cdot w = r \cdot \rho e^{i(\theta + \varphi)}$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \text{ и } \arg zw = \arg z + \arg w!$$



$$\Delta(0, 1, z) \sim \Delta(0, w, zw)$$

Главен аргумент:

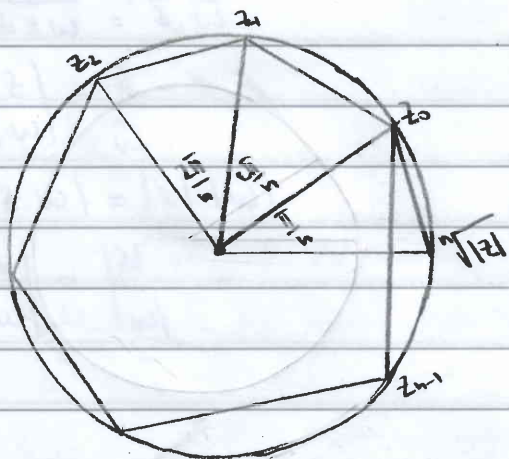
$$\arg z \in (-\pi; \pi]$$

уравнението $z^n = c$, $c \in \mathbb{C}$

$$c = \rho e^{i\theta}, \quad z = r e^{i\varphi}$$

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow r^n = \rho \text{ и } n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ - форми на Муавър}$$

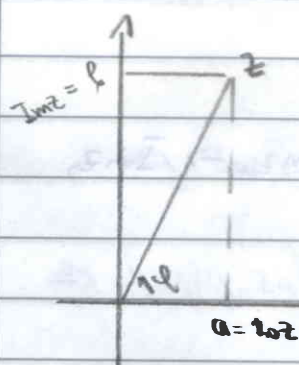
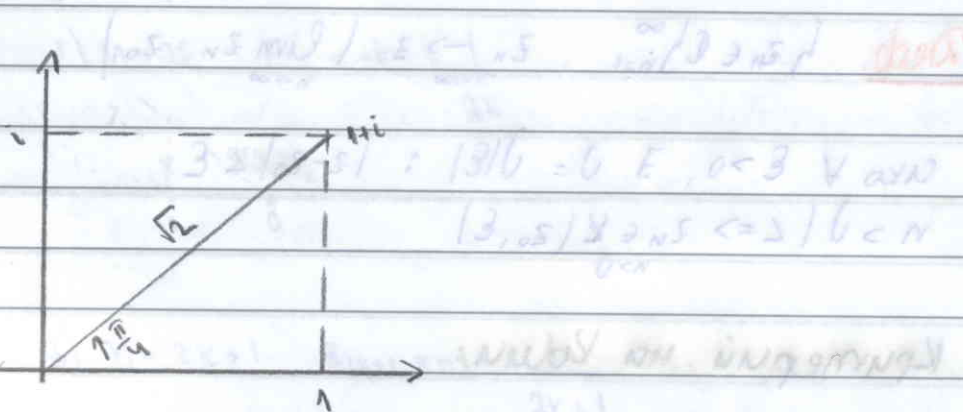
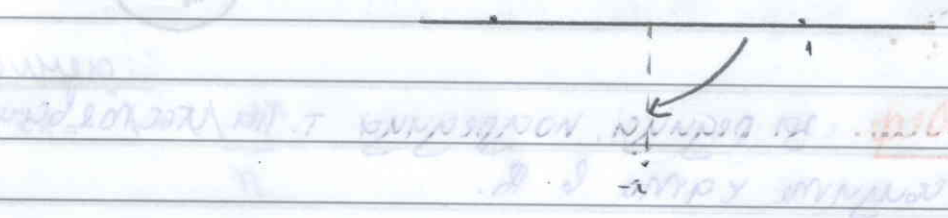


$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ - правилен n -ъгълник, вписан в окр. с $\varphi_0 = 0$ и $R = \sqrt[n]{\rho}$

$$\arg 1 = 0$$

$$\arg i = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

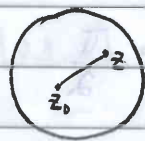


$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Редущи и редове от комплексни числа

Деф. Окръгът на $z_0 \in \mathbb{C}$
 $K(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$



Деф. За редущи, подредущи, т. на съставяне са същите като в $\mathbb{R}$.

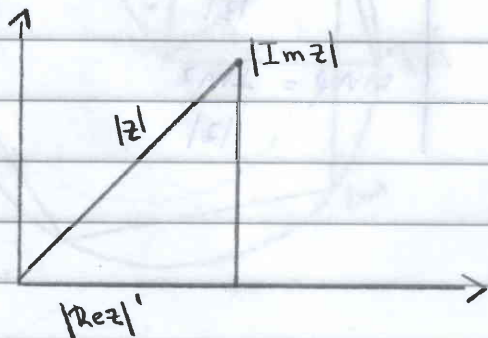
Деф. $\{z_n \in \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \rightarrow z_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$

ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu = \nu(\varepsilon) : |z - z_0| < \varepsilon$,
 $n > \nu \Rightarrow z_n \in K(z_0, \varepsilon)$

Критерий на Коши:

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е с.с. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu = \nu(\varepsilon) :$
 $|z_m - z_n| < \varepsilon, \forall m, n > \nu.$

Тв. $z_n \rightarrow z_0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z_0$



Тв. Ако $z_n = |z_n| e^{i\varphi_n}$ и φ_n - фикс. аргумент на z_n
 $|z_n| \rightarrow |z_0|$ $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$
то $z_n \rightarrow |z_0| e^{i\varphi_0} = z_0$

25.02.2014.

Обратно:

Нека $z_n \rightarrow z \neq 0$, $z_0 = |z_n| e^{i\varphi_n}$ $\varphi_n = \arg z_n$

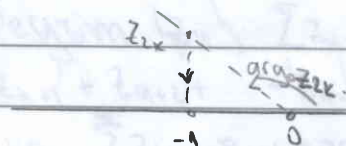
Тогатова е ясно, че $|z_n| \rightarrow |z|$. Но дали $\varphi_n \rightarrow \varphi$ е с? Дали ако е с. $\varphi_n \rightarrow \arg z$?

пример:

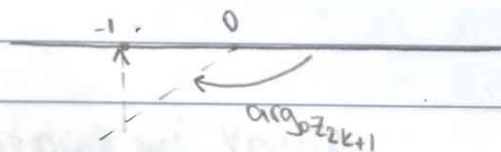
1) $z_n = -1 + i \frac{1}{n}$

$z_n \rightarrow -1$

1) $n=2k$ $z_{2k} = -1 + i \frac{1}{2k}$



2) $n=2k+1$ $z_{2k+1} = -1 - i \frac{1}{2k+1}$

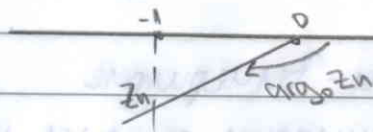


$\arg z_{2k+1} \rightarrow -\pi$

$\Rightarrow \{\arg z_n\}$ е разходящ

2) $z_n = -1 - i \frac{1}{n}$

$z_n \rightarrow -1$



$\arg z_n \rightarrow -\pi \neq \pi = \arg(-1)$

$\arg z \in (-\pi, \pi]$

Но в сила е следното твърдение:

ТВ Нека $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$ и φ_0 е фиксиран аргумент на z_0 .

Тогави ако изберем

$$\text{ако } z_n \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi], n=1, 2, \dots$$

то $\arg z_0 \rightarrow \varphi_0$.

Док се докаже:

Заб. т. z_0 е точка на събъединение на $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако $\forall \varepsilon > 0$, в $K(z_0, \varepsilon) = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ има безброй много z_n .

ТВ z_0 е точка на събъединение на $\{z_n\}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ подредица $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $z_{n_k} \rightarrow z_0$.

Тн Булгари - Вичеризас

Всика ограничена редица има сходяща подредица
($\Leftrightarrow$ има точки на събъединение)

Резюме от комплексни числа

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Деф. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ, ако $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k \text{ е сходяща.}$$

Критерий на Коши:

Резулт $\{z_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) :$
 $|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_n| < \varepsilon, \forall n > m > \delta.$

$\Rightarrow$ Ако $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ, то $z_n = 0$

Деф. $\sum z_n$ е абсолютно сходящ, ако $\sum |z_n| < +\infty$
Ако $\sum z_n$ е абсолютно сх., то той е сходящ.

Критерий на Коши:

Нека $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$. Тогава резулт $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абсолютно сходящ при $\rho < 1$ и разходящ при $\rho > 1$.

Топология в $\mathbb{C}$ -отворени, затворени, компактни и свързани множества.

ТВ: X, τ

1) $x, \varphi \in \tau$

2) ако $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A$ то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$

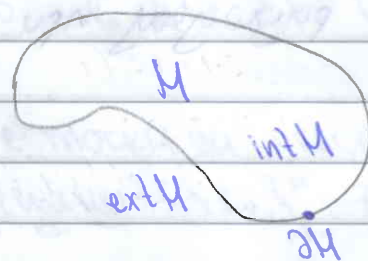
3) ако $U_k \in \tau, k=1, \dots, n$ то $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau$

(X, τ) топологично пространство

$U \in \tau$, U -отворено множество.

Деф. Нека $M \subseteq \mathbb{C}$. Точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича:

- вътрешна точка на M , ако $\exists \epsilon / (z_0, \epsilon) \subset M$ ($z_0 \in M$);
- външна точка на M , ако $\exists \epsilon / (z_0, \epsilon) \subset \mathbb{C} \setminus M$;
- гранична точка на M , ако $\forall \epsilon / (z_0, \epsilon)$ има точки от M и от $\mathbb{C} \setminus M$;



$\text{int } M = \{ \text{вътр. точки на } M \}$
 $\text{ext } M = \{ \text{външните т. на } M \}$
 $\partial M = \{ \text{границните т. на } M \}$

$$\mathbb{C} = \text{int } M \cup \text{ext } M \cup \partial M$$

Def. Прокта околност на $z_0 \in \mathbb{C}$

$$K'(z_0, \epsilon) = \{z : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$$

кръг без център



Def. z_0 е точка на събиране на M , ако във всяка прокта околност на z_0 има точки на M .

$\Rightarrow$ във всяка прокта околност на z_0 има безброй много точки на M

$\bar{M} = M \cup \{ \text{точки на събиране на } M \}$

$\bar{M}$ - затворена обвивка на M

примери:

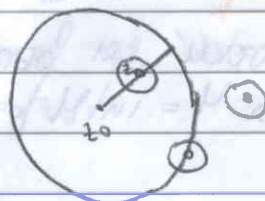
1) $M = K(z_0, \epsilon)$

$\text{int } M = M = K(z_0, \epsilon)$

$\text{ext } M = \{z : |z - z_0| > \epsilon\}$

$\partial M = \{z : |z - z_0| = \epsilon\} = C(z_0, \epsilon)$

$\bar{M} = \{z : |z - z_0| \leq \epsilon\}$



2) $M = \{z : \text{Im } z > 0\}$

$\text{int } M = \{z : \text{Im } z > 0\}$

$\text{ext } M = \{z : \text{Im } z < 0\}$

$\partial M = \{z : \text{Im } z = 0\}$

$\bar{M} = M \cup \{z : \text{Im } z = 0\}$



$$3) M = \{i, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

$$\text{int } M = \emptyset$$

$$\text{ext } M = \mathbb{C} \setminus M$$

$$\partial M = M \cup \{0\}$$

$$\overline{M} = \partial M = M \cup \{0\}$$



$$4) M = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}$$

$$\text{int } M = \emptyset$$

$$\text{ext } M = \mathbb{C}$$

$$\overline{M} = \mathbb{C}$$

$$\text{тв. } \overline{M} = M \cup \partial M = \text{int } M \cup \partial M$$

Def $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича отворено, ако всичките му точки са вътрешни, т.е. $M \subseteq \text{int } M \Rightarrow M$ е отворено
 $\Leftrightarrow M = \text{int } M$

примери:

1) $\mathbb{C}$ - отворено

2) $\emptyset$ - отворено

3) $K(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ - отворено

4) $M = \{z : \text{Im } z \geq 0\}$ - не е отворено



5) $K'(z_0, \varepsilon) = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ - отворено

ТВ 1) Ако $U_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ са отворени множества ($\alpha \in A$)
то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено.

2) Ако $U_k, k=1, 2, \dots, n$ са отворени множества
то $\bigcap_{k=1}^n U_k$ е отворено.

примери:

$K(0, \frac{1}{n})$ - отво мн.-во, $\forall n \geq 1$, но $\bigcap_{n=1}^{\infty} K(0, \frac{1}{n}) = \{0\}$ - не е отвор.

Деф. $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича затворено, ако $\mathbb{C} \setminus M$ е отворено.

ТВ. M е затворено $\Leftrightarrow M$ съдържа всичките си
точки на събстване, т.е. $\overline{M} \subseteq M$ ($\Leftrightarrow M = \overline{M}$)

ТВ. т. z_0 е точка на събстване на $M \subseteq \mathbb{C}$
 $\Leftrightarrow \exists$ редица $\{z_n \in M\}, z_n \rightarrow z_0$

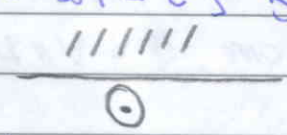
ТВ $M \subseteq \mathbb{C}$ е затворено $\Leftrightarrow$ от $\{z_n \in M\}, z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow z_0 \in M$.

примери:

1) $\mathbb{C}$ - затворено

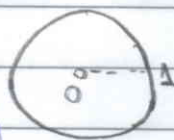
2) $\emptyset$ - затворено

3) $K(z_0, \varepsilon) = \{z \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ - затворено

4) $\{ \operatorname{Im} z \geq 0 \}$  затворено

5) $\{ 0 < |z - z_0| \leq 1 \}$

нищо отво., нищо затворено;



1) **ТВ 1)** Ако $V_k \subseteq \mathbb{C}$, $k=1, 2, \dots, n$ са затворени множества, то $\bigcup_{k=1}^n V_k$ е затворено.

2) Ако $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha \in A$ са затворени множества, то $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ е затворено.

$$V_n = \{ \operatorname{Re} z > 1/n \}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \{ \operatorname{Re} z > 0 \}$$

отворено



$M = N \Leftrightarrow$ компакти в $\mathbb{C}$

Def. $M \subseteq \mathbb{C}$ е компакт, ако M е ограничено и затворено.

примери:

- 1) $M = K(z_0, \varepsilon)$ - не е компакт (не е затворено)
- 2) $M = \{ \operatorname{Re} z \geq 0 \}$ - не е компакт (не е ограничено)
- 3) $\mathbb{C}$ - не е компакт
- 4) $\emptyset$ - компакт
- 5) $K(z_0, \varepsilon)$ - компакт



04.03.2014г.

ТВ1. $K \subseteq \mathbb{C}$ е компактно $\Leftrightarrow$ от всяка редица $\{z_n \in K\}_1^\infty$ може да се избере сходяща подредица $\{z_{n_k}\}_1^\infty$, $z_{n_k} \rightarrow z$, $z \in K$. (така граница е точка от K)

Def. Отворено покритие на $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича съвкупност от отворени множества $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, такова че $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

ТВ2 (Th на Хайне-Борел)

$K \subseteq \mathbb{C}$ е компактно $\Leftrightarrow$ от всяко отворено покритие на K може да се избере крайно подпокритие (т.е. ако $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, то $\exists$ кр. бр. $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ така че $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$)

Свързани множества в $\mathbb{C}$. Област

Def Казваме, че едно подмн. $M \subseteq \mathbb{C}$ е свързано, ако не съществуват некрещещи и отворени множества U и V , $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = M$ и $M \subseteq U \cup V$.

Ако M е отворено: M е свързано, ако не съществуват отворени множества U и V , $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = M$ и $M \subseteq U \cup V$ $\Leftrightarrow$ Ако M е свързано и $M = U \cup V$, и U, V - отворено $U \cap V = \emptyset$, то или $U = \emptyset$ или $V = \emptyset$

пример:

→ едноотображение множество

1) $[1, 1]$ - свързано;

2) $[1, 0, 1]$ - не е свързано;

3) $[z_1, z_2]$ - свързано;

4) $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]$ - свързано множество;

$[z_1, z_2, \dots, z_n]$ - нагледна линия

Деф. Крива (крива) в $\mathbb{C}$ се нарича всяко непрекъснато изображение $\gamma: z = \gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, т.е. това е функция $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t), y(t)$ са непрекъснати в $[a, b]$.

Деф. Кривки, че $M \subseteq \mathbb{C}$ е лин. свързано, ако $z_1, z_2 \in M$ $\exists$ крива (крива) $\gamma \in M$, която се свързва т.е. $\exists$ функция $z = \gamma(t): [a, b] \rightarrow M$, т.е. $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$.

Тв. Ако M е отк. множество, следните тв са $\Leftrightarrow$:

1) M е свързано множество;

2) M е лин. свързано множество;

3) всеки две точки $z, w \in M$ могат да се свържат с нагледна линия $[z, z_1, \dots, z_{n-1}, w] \subseteq M$

$\mathbb{C}$ - свързано множество

$K \subseteq \mathbb{C}$ - свързано множество

ТВ Единствените едновременно отворени и затворени множества са $\emptyset$ и $\mathbb{R}$.

Док. $U \subseteq \mathbb{R}$ едновременно отворено и затворено
Тъгава $\mathbb{R}/U$ е отворено множество и $\mathbb{R} = (U/U) \cup U$.
Тъка като $\mathbb{R}$ е свързано, то или $\mathbb{R}/U = \emptyset \Leftrightarrow$
 $U = \mathbb{R}$ или $U = \emptyset$.

Деф Област $V \subseteq \mathbb{R}$ е нарича всяко отворено и свързано множество.

Деф Компонентите на свързаност на $M \subseteq \mathbb{R}$ се нарича всяко свързано подмножество на M , което не е включено в никакво свързано подмножество на M , те ако K е комп. на свързаност на M и $K \subseteq K_+ \subseteq M$, K_+ свързано, то $K = K_+$.

ТВ Всяко подмножество $M \subseteq \mathbb{R}$ се представя по единствен начин, като обединение на компонентите си на свързаност.

Сл. Ако $M \subseteq \mathbb{R}$ е отворено множество, компонентите на свързаност са обикнети и са изброимо много.

Док. $\exists M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ и нека $z_0 \in U_\alpha$.

Тъка, като M е отворено, $\exists K(z_0, \delta) \subseteq M$, $K(z_0, \delta)$ е свързано множество $\Rightarrow U_\alpha \cup K(z_0, \delta)$ - също е св. множество и $U_\alpha \subseteq U_\alpha \cup K(z_0, \delta)$.

$U_\alpha \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $U_\alpha = U_\alpha \cup K(z_0, \delta) \Rightarrow K(z_0, \delta) \subseteq U_\alpha \Rightarrow U_\alpha$ е отворено на $\mathbb{R}$.

и обратно, т.е. $\mathbb{C}$ е област.

$f_0 = f_2: z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ - изобразява $\mathbb{C}$ навсякъде едно в $\mathbb{C}$.

Разширението на комплексната равнина. Сфера на Риман.

Деф. $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - разшир. комп. равнина.

Деф.

1) $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty, z \in \mathbb{C}$

2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, z \in \bar{\mathbb{C}} / \{0\}$

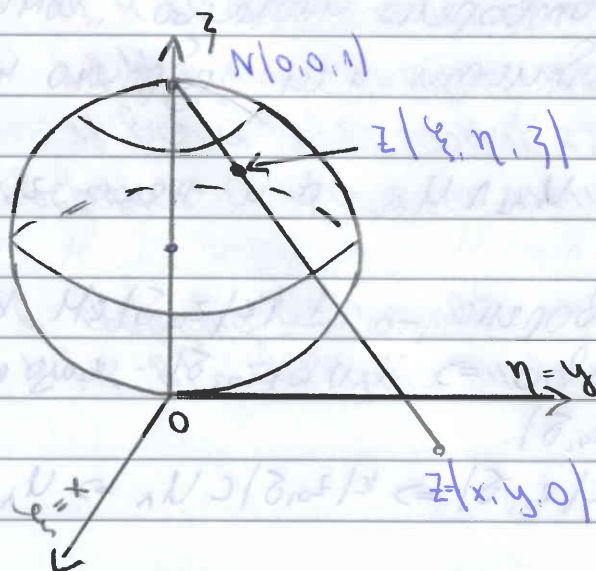
3) $\frac{z}{\infty} = 0, z \in \mathbb{C}$

4) $\frac{z}{0} = \infty, \forall z \in \mathbb{C} / \{0\}$

$|\infty| = +\infty$

Сфера на Риман.

$$S^2 = \{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \}$$



Def (Стереорграфическая проекция): $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow z = N_z \rightarrow \mathbb{C}$$

$$|x, y, z| = 1$$

$$S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\xi = 0 + \lambda x$$

$$\eta = 0 + \lambda y$$

$$z = 1 + \lambda(-1)$$

$\Rightarrow$

$$\xi^2 + \eta^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (1 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$|x^2 + y^2| \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda^2 |x^2 + y^2 + 1| - \lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\lambda = \frac{1}{|z|^2 + 1}$$

$$\xi = \frac{1}{|z|^2 + 1} x$$

$$\eta = \frac{1}{|z|^2 + 1} y$$

$$z = 1 - \frac{1}{|z|^2 + 1} = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}$$

$$x = \frac{\xi}{\lambda} = \frac{\xi}{1 - z}$$

$$y = \frac{\eta}{\lambda} = \frac{\eta}{1 - z}$$

$$z = 1 - z$$

теор. $\infty: \Pi: N \rightarrow \infty$

$\times N$ - ев. полук $\{3\}$ направи на карти - стереографска проекция

ТВ При стереографска проекция на правите ∞ (кр. конт.) съответстват окръжности през N .
На окръжностите ∞ ∞ съответстват окр ∞ S^2 не минаващи през N .

$\Rightarrow$ правите ∞ $\Leftrightarrow$ окр. през ∞ .
(стер. пр. запазва окръжностите!)

ТВ Стереограф. проекция запазва ъглите между окръжностите $\neq$ м/у допират. $=$ $\neq$ м/у где пресичащи се окръжности.