Комплексен анализ

Литература

1) Теория на аналитичните функции - Т Арнаудова

2) Б. Шабат , т. I Введение в КА.

3)

за упражненията

3) КА - Ръководство П. Божилов, В. Хаджийски

- на страницата на катедрата

24.02.2014г.

1) Защо Тейлоровият ред на $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ е сходящ само в $(-1,1)$?

$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$f_1(x) = 1 - x + x^2 - \dots, \quad -1 \le x \le 1$

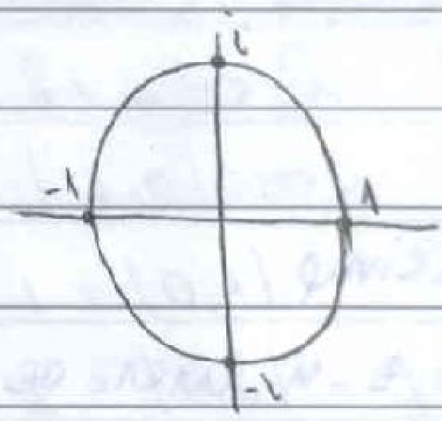
$R_{cx} = dist(0,-1)$

$f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f_2(x) = 1 - x^2 + x^4 \dots, \quad -1 < x < 1$

$x \longrightarrow z$ (на мястото на x пишем комплексната променлива).

$f_2(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 \dots, \quad |z| < 1$



$z = \pm i$ - особени точки

$R_{cx} = 1 = dist(0,i) = dist(0,-i)$

2) Една задача от теория на числата.

Може ли $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ да се раздели на краен брой аритметични прогресии с различни разлики?

Да допуснем, че $\mathbb{N} = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, където

$S_k = \{a_k, a_k + d_k, \dots\}$, $k = 1 \div n$

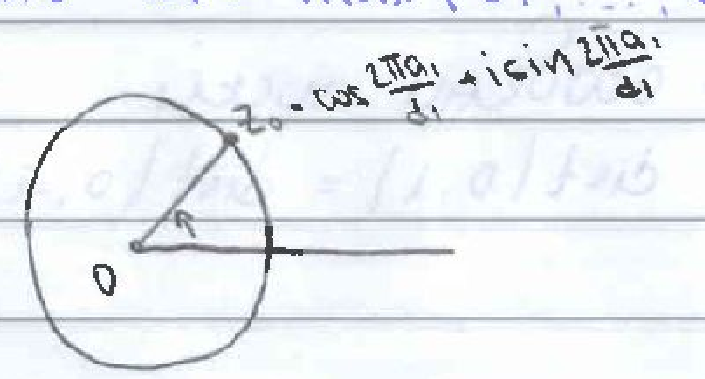
$S_k \cap S_l = \emptyset$, $k \neq l$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{j \in S_1} z^j + \sum_{j \in S_2} z^j + \dots + \sum_{j \in S_n} z^j$$

прогресия $(z^{a_k},\ q = z^{d_k})$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \frac{z^{a_3}}{1-z^{d_3}} + \dots + \frac{z^{a_n}}{1-z^{d_n}}$$

б.о.о. $d_1 = \max(d_1, \dots, d_n)$



$|z| = 1$

$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

φ - ъгъл м/у z и числ. ос

] $z \to z_0$ $(z = r z_0,\ 0 < r < 1,\ r \to 1)$

Тогава

$$\frac{1}{1-z_0} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{\quad}{\quad}}_{\infty} + \dots + \frac{z_0^{a_k}}{1-z_0^{d_k}} + \dots$$

$z_0^{d_k} \neq 1$, $k \neq 1$, защото $d_1 > d_k$, $k \neq 1$

очевидно имаме противоречие.

Комплексни числа

$x^3 = 15x + 4$

$4 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$

Деф $\mathbb{C} = \{(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}\}$

1) $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c,\ b=d$

2) $(a,b) + (c,d) := (a+c,\ b+d)$

3) $(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

Тв $\mathbb{C}, +, \cdot$ - поле

с единица относно $+$ $(0,0)$

с единица относно $\cdot$ $(1,0)$

обратния елемент на (a,b) $\xrightarrow{+}$ $(-a,-b)$

$\xrightarrow{\cdot}$ $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} := \{(a,0),\ a \in \mathbb{R}\}$ - поле

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longleftrightarrow \mathbb{R} \\ (a,0) \longleftrightarrow a \end{array}\right\} \Rightarrow (a,0) := a$

$i = (0,1)$, $i.i = -1 = i^2$

$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0)$

$z = a + ib$ $(a+bi)$ - алгебричен вид на $\mathbb{C}$ числа

Тв $\mathbb{C}$ не наследява наредбата в $\mathbb{R}$

$\leq, >, <, \geq$, в $\mathbb{C}$ нямат смисъл!

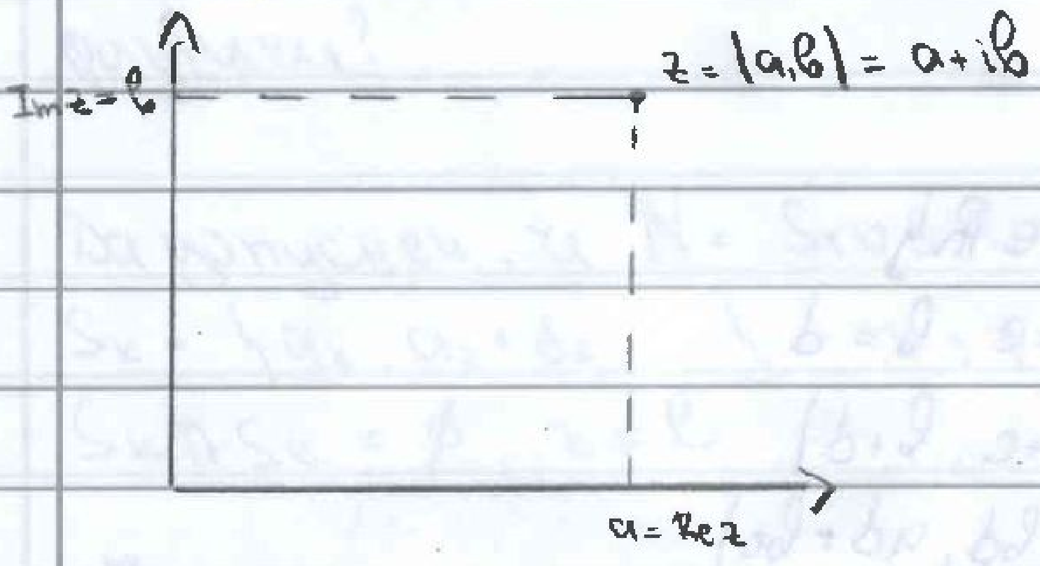
пример:

1) Ако $i > 0$, то $i.i > 0 \Rightarrow -1 > 0$ $>\!<$

2) Ако $i < 0$, то $i.i \geq 0 \Rightarrow -1 > 0$ $\lightning$

Геометрична интерпретация на $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C} = \{ z = (a,b) ,\ a,b \in \mathbb{R} \}$



ограничения $z = a+ib$

$a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$

$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z \iff \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$z . \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z \iff 2i\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$z . \bar{z} = |z|^2$

$\overline{z \pm w} = \bar{z} . \bar{w}$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

$|z . w| = |z| . |w|$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

$z \equiv M \equiv \overrightarrow{OM}$

$\mathbb{C}$ - комплексна равнина