26.02.2014г. ЧМА – упражнение 1

Формула на Тейлор.

$\exists\ f(x)$ е $C^{n+1}[a,b]$ и т. x_0 е произволна (има производна в $[a,b]$) от $[a,b]$.
Тогава за $\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi \in (\min\{x,x_0\}, \max\{x,x_0\})$:

$$\underbrace{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}.(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{полином } P_n(x) \text{ от степен } \leq n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{остатък } = R_n(f;x)}$$

(грешката, която правим като заменим $f(x)$ с $P_n(x)$.)

$f(x) \approx P_n(x)$

Ако фиксираме $n=5$ и $|f^{(6)}(x)| \leq 100$ в $[a,b]$ и $|x-x_0| \leq 10^{-2}$

$$|R_n(f,x)| \leq \frac{100}{6!}.10^{-12} = \frac{10^{-10}}{6!}$$

$\leadsto$

С Π_n – линейното пространство от алгебрични полиноми на степен $\leq n$.

$\Pi_n = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x_2^{n-2}, \dots + a_n \,|\, a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}^{n+1}\}$

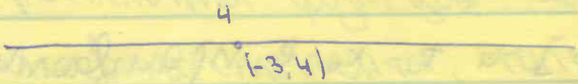
размерността на Π_n е $n+1$

$x^5 + x^4 \in \Pi_5$, $x^3 \in \Pi_5$, $2 \in \Pi_5$, $0 \in \Pi_5$

пример 1: интерполационна на лагранж с 1 възел

Да се намери $P(x) \in \Pi_0$: $P(-3) = 4$

(т.е. в -3 стойността на P да е 4)



очевидно $P(x) = 4$

пример 2:

Да се намери $P(x) \in \Pi_1$: $P(-1) = 1$

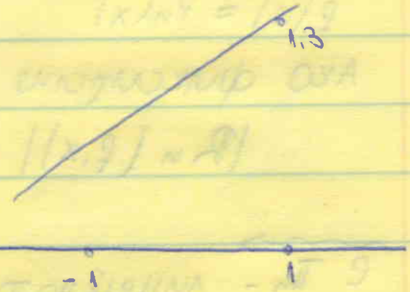
$P(1) = 3$

$P = x+2$ е единствено решение.

$P = ax+b$

$$\left| \begin{aligned} -a + b &= 1 \qquad b = 1+a \\ a + b &= 3 \end{aligned} \right.$$

$2b = 4 \quad b = 2 \quad a = 1$



пример 3

да се намери $P(x) \in \Pi_2$:

$P(-1) = 2$

$P(0) = -3$

$P(1) = 1$

$P(x) = ax^2 + bx + c$ -

$$\left|\begin{aligned} a - b + c &= 2 \\ c &= -3 \\ a + b + c &= 1 \end{aligned}\right. \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ има ! решение

$$\left|\begin{aligned} a - b &= 5 \\ a + b &= 4 \end{aligned}\right. \qquad b = 4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$2a = 9 \quad a = \frac{9}{2}$$

$\frac{9}{2}$,

$$\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$P(x) = \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Интерполационна задача на Лагранж

Дадени са $\neq$ точки x_k $k=0,\dots,n$. (интерп. възли $n+1$) и произволни числа y_k $k=0,\dots,n$

Да се намери $P \in \Pi_n$ удовлетворяващ интерполац. условия $P(x_k) = y_k$ $k=0,\dots,n$

Задачата има единствено решение, защото интерполационните условия представляват линейна система от алгебрични уравнения за коеф. $a_0, a_1, \dots, a_n$ $(P = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n)$ и det на тази система е $\neq 0$ (det на Вандермонд)

Да се намери $P(x) \in \Pi_4$ удовл. ~~удл.~~ инт. услов.

$P(1) = 2$

$P(2) = 4$ $\qquad P(x) = 2x \qquad P(x) \in P_4$ и удовлетворява интерп. условия.

$P(3) = 6$

$P(4) = 8$ $\qquad \Rightarrow$ това е търсения полином.

$P(5) = 10$

Да се намери $P(x) \in \Pi_4$

$P(1) = 0$

$P(2) = 0$ $\qquad 1, 2, 3, 4$ - са корени на P от 4та степен.

$P(3) = 0$

$P(4) = 0$ $\qquad P(x) = A(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$P(5) = 1$ $\qquad P(5) = 1A4! \Rightarrow A = \frac{1}{4!}$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

Да се намери $P_k(x) \in \Pi_n$ удовл. инт. условия зададени са $n+1$ инт. възела $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$P(x_0) = 0$

$P(x_1) = 0$ По аналогия с предишния пример

$\vdots$

$P(x_{k-1}) = 0$

$P(x_k) = 1$

$P(x_{k+1}) = 0$

$\vdots$

$P(x_n) = 0$

$$P_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

полиномите $P_k(x)$, $k=0,\dots,n$ се бележат с $l_{kn}(x)$ - наричат се базисни полиноми на Лагранж. Интерполационния полином решаващ интерполац. задача на Лагранж е дава с формулата

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{kn}(x)$$

линейна комбинация по базиса $l_{kn}(x)$, коефициентите по този базис са точно y_k, $k=0,\dots,n$

Формулата на Лагранж за един възел:

$P(x) = y_0 . 1$

Лагранж за 2 инт. възела:

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Лагранж за 3 инт. възела:

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

<u>задача:</u>

Напишете формулата на Лагранж за $P(x) \in \pi_2$ удовл. интерп. условия

$P(-1) = 2$, $P(0) = 3$, $P(1) = 6$

$$P(x) = \frac{2(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 3\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 6\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}$$

ако търсим представяне на $P(x)$ по степени на x трябва да извършим умноженията.

$$P(x) = \frac{2(x^2-x)}{2} + \frac{3(x^2-1)}{-1} + \frac{6(x^2+x)}{2} = x^2+2x+3$$

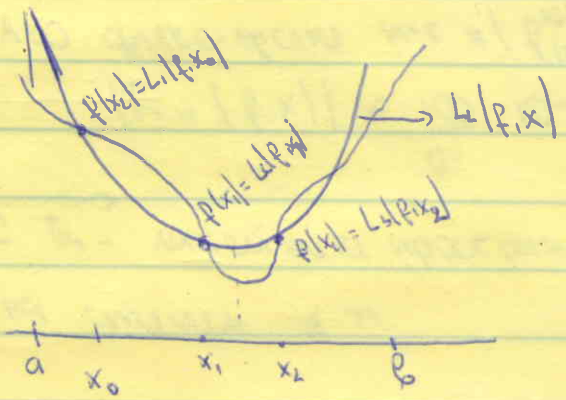
Може да си направим проверка:

1) дали $P \in \pi_2$

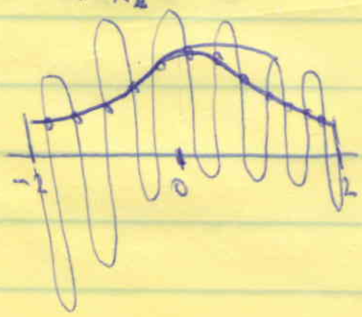
2) заместване с зададените възли.

Много често числата y_k са стойности на някаква функция във възлите x_k. Тогава казваме, че полиномът на Лагранж интерполира $f(x)$ във и той се бележи с $L_n(f,x)$

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad x \in [-2,2]$ $\quad$ Пример на Рунге:



Дали като ↑ степента на полинома, се приближаваме до реалната функция? Не, колкото повече увеличаваме степента, толкова повече се отдалечаваме от реалния вид на ~~полинома~~ функцията. !