

01.10.2013г.

Упражнение

гл. ас. Цветана Стоянова
sveti@fmi.uni-sofia.bg
534 каб.

Писмен- 8 задачи - 6 т. за 6
1 от зад. - Тъ Конспект ДИ
Ръководство по ДУ, Ангел Живков

Обикновени диференциални уравнения от първи ред

Изрази от вида

$$I = \frac{d}{dx}$$

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$,
където x е независима променлива,
а $y(x)$ търсената функция, се
наричат обикновени ДУ от n -ти ред.
Редът на ур-та се определя от
най-старшата производна, участваща
в уравнението.

Измежду у-та от 1 ред най-важни
са ^{така наречените} уравненията, разрешими относно
производните, т.е. уравненията, които
могат да се запишат във вида
$$y' = f(x, y)$$

Уравнения с разделящи
се променливи

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y)$$

Решаване: 1. Вляво оставиме изразите,
зависещи само от y , а вдясно тези,
които зависят само от x :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

2. Интегрираме

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

ред на y -е

общо решение на уравнението

зад. Задачи

1) $y' = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

" $\frac{dy}{dx}$

$$e^{-y} dy = e^x dx$$

Интегрираме:

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx + c$$

$$\boxed{-e^{-y} = e^x + c} \text{ общо решение}$$

$$2) xy' + y = y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y^2 - y}{x} \text{ разделящи се променли-}$$

ви

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x}$$

Интегриране

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\ln|x| + c$$

$$\int \frac{1-y+y}{y(y-1)} dy = - \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} =$$

$$= -\ln|y| + \ln|y-1|$$

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln|x| + c = \ln e^c$$

$$\frac{y-1}{y} = Cx$$

$$\ln e^c \cdot |x|$$

$$3) \sqrt{y^2+1} dx = xy dy \quad | : dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy = \int \frac{dy^2+1}{\sqrt{y^2+1}} =$$

$$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C$$

$$4) y' = \cos(y-x)$$

$$y-x = t$$

$$y = t+x$$

Пологаме $y-x := z(x)$ - не е зад.
 $\frac{d}{dx}$ ф.а на какво е

Новото уравнение

$$z' = y' - 1 = \cos z - 1$$

$z' = \cos z - 1$ разделим
 с промен-
 ливи

ф.а на x е 1

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$

Умтезрпаме

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx + C$$

$$= x + C$$

~~cos z - 1 = -2 sin^2(z/2)~~

$$\cos z - 1 = -2 \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$- \int \frac{dz}{2 \sin^2 \frac{z}{2}} = x + C$$

$$\cotg \frac{z}{2} = x + C$$

Връщане към старите променливи

$$\cotg \frac{y-x}{2} = x + C - \text{общо реш.}$$

Хомогенни уравнения

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Решаване: 1. Полагаме $\frac{y}{x} := z(x)$. тогава

$$y = z \cdot x$$
$$y' = z + x z'$$

Заместваме в y -ното и получаваме

$$z + x z' = f(z)$$

новото y -ние

$$z' = \frac{f(z) - z}{x} - \text{уравнение с}$$

разделящи се променливи

Задачи 1) $2x^3 \cdot y' = y(2x^2 - y^2)$

$$y' = \frac{y(2x^2 - y^2)}{2x^3} =$$

$$= \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

хомогенно
(Уравнение на Бернули)

Положение $\frac{y}{x} = z(x)$

Тогава

$$y = x \cdot z \quad \text{и}$$

$$y' = z + x z'$$

Заместваме в y -ето

$$z + x z' = z - \frac{1}{2} z^3$$

Новото y -ние

$$\frac{dz}{dx} = z' = -\frac{z^3}{2x} \quad \text{— } y\text{-е с разделящи се променливи}$$

$$-2 \frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{x}$$

След интегриране

$$-2 \int \frac{dz}{z^3} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\frac{1}{z^2} = \ln|x| + C$$

Връщаме към старите променливи

$$\frac{x^2}{y^2} = \ln|x| + C$$

$$2) (x-y) dx + (x+y) dy = 0 \quad (: dx)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(x-y)}{x+y} = \underline{\text{хом. пошном}} !$$

$$\frac{x+y-2y}{x+y} = \cancel{\frac{x-y}{x+y}}$$

$$= - \frac{x \left(1 - \frac{y}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{y}{x}\right)} \quad \text{хомогенно}$$

Полагаме $\frac{y}{x} = z(x)$

Тогава $y = x \cdot z$ и

$$y' = z + x \cdot z'$$

Заместваме в y -ето

$$z + x z' = - \frac{1-z}{1+z}$$

Новото y -е е

$$z' = - \left(\frac{1-z}{1+z} + z \right) \cdot \frac{1}{x}$$

y -е с разделящи се
променливи

$$z' = - \frac{1+z^2}{1+z} \cdot \frac{1}{x}$$

Разделяме променливите

$$\frac{1+z}{1+z^2} dz = -\frac{1}{x} dx$$

Интегрираме

$$\int \frac{1+z}{1+z^2} dz = - \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\int \arctg z + \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = -\ln|x| + C$$

Връщаме ^{към} старите променливи, получаваме

$$\arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = -\ln|x| + C$$

общо решение

$$3) (x^2 + y^2) y' = 2xy$$

$$\left(\frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy} \right) y' = 1$$

$$\left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} \right) y' = 1$$

$$\left(\frac{1}{z} + z \right) y' = 2$$

$$y = z \cdot x$$

$$y' = z' \cdot x + z$$

$$\frac{y}{x} = z$$

$$\left(\frac{1+z^2}{z} \right) y' = 2$$

$$y' = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$x z' + z = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$x z' = \frac{2z}{1+z^2} - z = \frac{2z - z - z^3}{1+z^2}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{z - z^3}{1+z^2} = \frac{-z(1+z^2)}{1+z^2}$$

$$\frac{x}{dx} dz =$$

$$\frac{z - z^3}{1+z^2}$$

$$\frac{z - z^3}{1+z^2} =$$

$$\frac{z - z^3}{1+z^2} =$$

$$\ln|z| - \ln|1-z| - \ln|1+z| = \ln|x| + C$$

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

$$xy' = |x| \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + y$$

$$y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$y' = z + z'x$$

$$y' = \sqrt{1 - z^2} + z'x$$

$$\cancel{z} + x z' = \sqrt{1 - z^2} + \cancel{x z}$$

$$x z' = \sqrt{1 - z^2} + x z - z$$

Нового y-e

$$\sqrt{1 - z^2}$$

$$z' = \sqrt{1 - z^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\arcsin z = \ln|x| + C$$

$$\text{ну } z = \frac{y}{x}$$

Уравнения, произлизащи от пълен диференциал

Нека

$$F(x, y, y') = 0 \text{ е нашието } y\text{-е}$$

Ако то може да се представи във
вида

$$dG(x, y) = 0$$

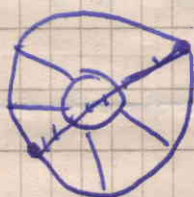
$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy = dG(x, y) \right),$$

$$\text{то } G(x, y) = C = \text{const}$$

общото р-е на $y\text{-ето}$

В сила е следната теорема

Th Нека $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(D)$,
където D е едносвързана област в
 $\mathbb{R}^2$. (в затв. път се затваря до точка,
в път, свързващ 2 точки $\in D$)



не е едносвързана
област

Тогава изразът

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \text{ е}$$

пълнен диференциал (∃ ф-ция $U(x, y)$):

$$dU = P dx + Q dy$$

потенциални полета)

тогава и само тогава, когато

$$P'_y = Q'_x$$

Задача 1) $2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0$

$$P'_y = 2x = Q'_x$$

има такава ф-я
частичи Dy

$$\underline{2xy dx + x^2 dy - y^2 dy = 0}$$

диференциал-мн. оператор

$$\cancel{x^3} - d\left(\frac{y^3}{3}\right)$$

$$df(x) = f' dx$$

$$d(y \cdot x^2)$$

$$d\left(yx^2 - \frac{y^3}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{yx^2 - \frac{y^3}{3} = C}$$

общо
решение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad \text{— хомогенно}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} = -\frac{1}{2y} \cdot x + \frac{y}{2} x^{-1}$$

у-е на Бернули
за $x(y)$

$$2) \quad e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$$

~~$$e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$$~~

$$e^{-y} dx - xe^{-y} dy - 2y dy = 0$$

$$- dy^2$$

$$d(xe^{-y})$$

$$d(xe^{-y} - y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{xe^{-y} - y^2 = C}$$

общо решение

Доп.: по друг начин

$$3) \quad y dx = (x + y^2 \sin y) dy$$

$$P'_y = 1$$

$$Q'_x = -1$$

$$y dx - x dy = y^2 \sin y dy$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = \sin y dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(-\cos y)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = -\cos y + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^2 \sin y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2 \sin y}{y} = \frac{1}{y} x + y \sin y$$

линейно уравнение
от $\frac{1}{y}$ рег

1a - полный дифференциал

$$4) y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

$$\sqrt{4x + 2y - 1} = t$$

$$4x + 2y - 1 = t^2$$

$$y = \frac{t^2 + 1 - 4x}{2}$$

$$\frac{t^2 + 1 - 4x}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{2tt' - 2}{2} \right) = \frac{tt' - 1}{2}$$

$$y' = t$$

$$tt' - 1 = 2t$$

$$t' = \frac{2t + 1}{t}$$

Изобщо y -ни от вида

$$y' = f(ax + by + c)$$

могат да се сведат до y' -а с разделяйки се променливи чрез смяната

$$ax + by + c = z(x) \quad (\text{може и}$$

$$f(ax + by + c) := z(x))$$

може и нелинеен аргумент

03.10.2013г.

четвъртък

Лекция

Isaac Newton (1642-1727)

Природните закони се изразяват чрез ДУ

$$F = ma$$

↓ ↓ ↓
сила маса уск.

$$m \ddot{x} = F$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \text{ - координати в } \mathbb{R}^3$$

вектор

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{dx}{dt}$$

Скорост
(3-скорост)

$$\ddot{x} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} \text{ ускорение (3-ускорение)}$$

$$|F| = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

гравитационна const

"Principia..."

$$x = e^t$$

↓

решението на ДУ $\dot{x} = x$, с начално условие $x(0) = 1$

$$x = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots = e^t$$

$$\ddot{x} = -x$$

sin

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 1$$

$$x = \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$\ddot{x} = -x$$

$$x(0) = 1$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$x = \cos t$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

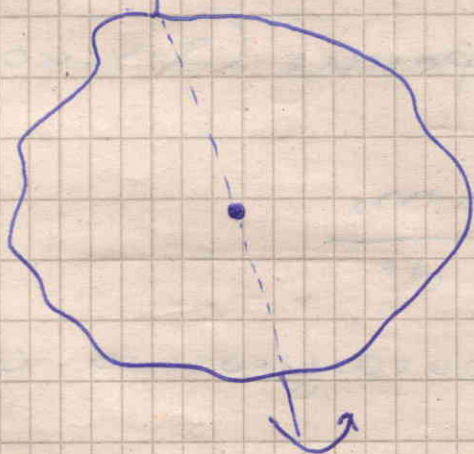
швейцарец

Leonard Euler (1707-1783) - теория на трептенята

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

- линейни ДУ

Ейлер: свободно въртене на твърдо тяло



C. G. J. Jacobi - решение (1804-1851)

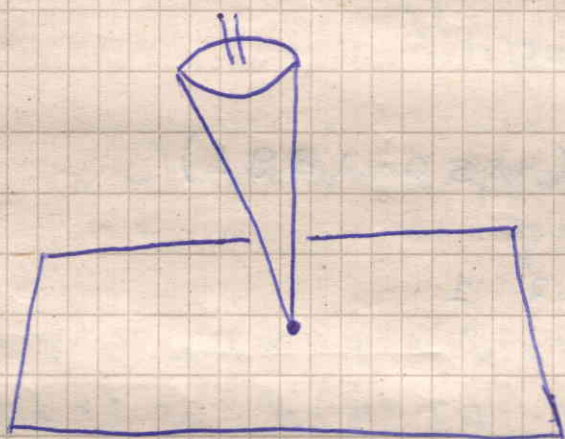


сила на променливите
(лекции по Механика)

J. L. Lagrange (Lagrange) (1736-1813)

- лин. ДУ

- ЛА



грапава повърхнина

Маркиз

 Pierre Simon Laplace (1749-1827)

- Небесна механика

- Детерминизъм

Carl Fri. Gauss (1777-1855)

- теория на пертурбациите



разлика - пертурбации
Ceres

- Церера - 1801

Joseph Liouville

$$\dot{x} = x^2 - t$$

$$x(0) = 0$$

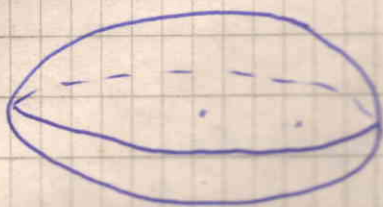
не може да се
решава в квадратура
специални ф-ции
развива се в ред

Marius Sophus Lie (1842-1899)

- симетрии в DU
- групи на Ли в DU

София В. Ковалевская (1850-1891)

2:2:1



U. Le Verrier (1811-1877)

23 sept. 1846

• Neptune

Uranus

1850-неправил-
ности в орбитата на
Меркурий Vulcanus

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

- Γ за $\exists$ и $!$

Henri Poincaré (1854-1918)

- качественна теория на DU
- небесна механика
1916г.

1916г. A. Einstein (- 1955)
ОТО

В. Арнольд

Т. Тао

Чаи

08.10.2013г.

Упражнение

Линейни уравнения от първи
ред

$$(1) \quad y' = a(x)y + b(x)$$

$a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати в
интервала $I \subset \mathbb{R}$

- Ако $b(x) \equiv 0$, то (1) е хомогенно y -ние
на линейно y -ние

- Ако $b(x) \not\equiv 0$, то (1) е нехомогенно
 y -ние

y -нието (1) става към класа на
линейните уравнения от n -ти ред

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots$$

$$\dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

това разглеждаме
в момента

Според **Th (Държавен Изпит)**
за линейните y -ние от n -ти ред за
уравнението (1) има

1. Общото решение на (1) се дава с
 $y(x) = y_{хом}(x) + y_{гас}(x)$,
където $y_{хом}(x)$ е общо решение
на хомогенното y -е, съответстващо
на (1), а $y_{гас}(x)$ е едно гасно
решение на нехомогенното y -ние.

2. Общото решение на (1) е непрекъс-
ната ф-ция в целия интервал I
(решенията върши там, където
вършат $a(x)$ и $b(x)$)
 $y = y_{хом} + y_{гас}$

Решаване : 1. Намираме общото
реш. на хомогенното
 y -ние (това е (1) $b(x) \equiv 0$)

$y' = a(x)y$ - y -е с разделящи се
променливи

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x) dx + C$$

$$\Rightarrow \ln y = \int a(x) dx + C$$

$$\Rightarrow y_{хом} = C e^{\int a(x) dx}$$

$$y_{hom} = c e^{\int a(x) dx}$$

2. Намиране на частно решение на (1) - без интегр. const

Използваме метода на Лагранж за

вариране на константите

Метод на Лагранж: Съществува частно решение $y_{част}$ на (1) във вида на хомогенното y -е, като c се полага да е ф.я на x .

$$y_{част} = c(x) e^{\int a(x) dx}$$

Намирането на $c(x)$: Диференцираме $y_{част}$ и го заместяваме в (1)

$$y'_{част} = c'(x) e^{\int a(x) dx} + c(x) a(x) e^{\int a(x) dx}$$

В (1)

$$c' = e^{\int a(x) dx} + c a e^{\int a(x) dx} =$$

$$= a c e^{\int a(x) dx} + b(x)$$

y -члът за $c'(x)$

$$c'_{(x)} = b(x) e^{-\int a(x) dx}$$

$$c'(x) = b(x) e^{-\int a(x) dx}$$

Тогава $c(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx$
! без const

и частното решение $y_{\text{част}}$ става

$$y_{\text{част}} = e^{\int a(x) dx} \cdot \left[\int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right]$$

3. Намиране на общото решение

$$y(x) = y_{\text{хом}} + y_{\text{част}} =$$

$$= C e^{\int a(x) dx} + e^{\int a(x) dx} \left[\int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right]$$

Формулата ~~y(x) =~~

$$y(x) = e^{\int a(x) dx} \left[c + \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right]$$

е известно като ф-ла за общото решение на линейното у-ние

$$y(x) = e^{\int a(x) dx} \left[c + \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx \right]$$

Задача :

$$1) (2x+1)y' = 4x + 2y$$

$$y' = \frac{2}{2x+1} y + \frac{4x}{2x+1} \quad \text{— линейно}$$

$$a(x) = \frac{2}{2x+1}$$

$$b(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{2x+1} dx} \left[C + \int \frac{4x}{2x+1} e^{-\int \frac{2}{2x+1} dx} dx \right]$$

$$\approx e^{\ln(2x+1)}$$

$$e^{\ln(2x+1)} \left[C + \int \frac{4x}{2x+1} e^{-\ln(2x+1)} dx \right] =$$

$$= (2x+1) \left[C + \int \frac{4x}{(2x+1)^2} dx \right] =$$

$$= (2x+1) \left[C + \cancel{2 \int \frac{2x+1-1}{(2x+1)^2} dx} \right]$$

$$= (2x+1) \left[C + 2 \ln(2x+1) + (2x+1)^{-1} \right]$$

$$= (2x+1) \left[C + \ln(2x+1) + \frac{1}{2x+1} \right]$$

$$y' + y = \sqrt{x} y$$

$$2) \quad x(y' - y) = e^x$$

$$y' = y + \frac{e^x}{x}$$

$$a(x) = 1$$

$$b(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int 1 dx} \cdot \left[c + \int \frac{e^x}{x} e^{-\int 1 dx} dx \right] = \\ &= e^x \cdot \left[c + \int \frac{e^x \cdot e^{-x}}{x} dx \right] = \\ &= e^x \left[c + \ln|x| \right] \text{ общо решение} \end{aligned}$$

$$3) \quad (xy' - 1) \cdot \ln x = 2y$$

$$\cancel{xy'}$$

$$xy' \ln x - \ln x = 2y$$

$$y' = \frac{2y}{x \ln x} + \frac{\ln x}{x \ln x}$$

$$y' = \frac{2y}{x \ln(x)} + \frac{1}{x}$$

$$a(x) = \frac{2}{x \ln x}$$

$$b(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 y(x) &= e^{\int \frac{2}{\ln x} dx} \left[c + \int \frac{1}{x} e^{-\int \frac{2}{\ln x} dx} dx \right] = \\
 &= e^{2 \ln(\ln x)} \left[c + \int \frac{1}{x} e^{-2 \ln(\ln x)} dx \right] \\
 &= e^{2 \ln(\ln x)} \left[c + \int \frac{1}{x \cdot 2 \ln x} dx \right] = \\
 &= 2 \ln x \left[c - \frac{1}{\ln x} \right] = \\
 &= \ln^2 x \left[c - \frac{1}{\ln x} \right]
 \end{aligned}$$

$$4) (2e^y - x) \cdot y' = 1$$

$$y' =$$

$$2e^y \cdot y' - xy' = 1$$

$$y' = \frac{1}{2e^y - x}$$

не является

$$2e^y - x = t$$

$$e^y = \frac{x+t}{2}$$

$$y = \ln \left(\frac{x+t}{2} \right)$$

~~$$\frac{2}{x+x}$$~~

~~$$\frac{2}{x+x}$$~~

$$y' =$$

Положение $2e^y - x = z(x)$
Дифференцирование

$y(x)$ Диф. по x

$$2e^y \cdot y' - 1 = z'$$

Ново y -е

$$z' = \frac{2e^y}{z} - 1 = \frac{z+x}{z} - 1 =$$

$$= \frac{x}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = \frac{x}{z}$$

разделяме се
променливи
(и хомогенно)

$$z dz = x dx$$

Интегриране

$$\int z dz = \int x dx + C$$

$$\frac{z^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\underline{\underline{2C := C}}$$

$$z^2 = x^2 + C$$

Връщаме към старите променливи

$$\boxed{[2e^y - x]^2 = x^2 + C}$$

общо
решение

$$4e^{2y} - 4xe^y + x^2 = x^2 + C$$

$$\Rightarrow e^y(e^y - x) = 0$$

II н. решаваме отн. x като ф.ч. и y . В шла е

$$y'x = \frac{1}{x'y}$$

$$(т.е. \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}})$$

Функцията $x=x(y)$ е дефинирана там, където правата и ф.ч.ч $y=y(x)$ е монотонна ф.ч.ч или все едно там, където $y' \neq 0$

В нашия случай $y' \neq 0$

=, можем да разгледаме y -ните

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2e^y - x}$$

$$\frac{dx}{dy} = -x + 2e^y, \text{ което}$$

е лн. y -е за $x(y)$ с $a(y) = -1$
 $b(y) = 2e^y$

Общото решение е

$$x(y) = e^{-y} \left[c + \int 2e^y \cdot e^y dy \right] =$$
$$= e^{-y} [c + e^{2y}]$$

$$x = c \cdot e^{-y} + e^y$$

$$\frac{dx}{dy}$$

$$(x - e^y) e^y = c$$

Уравнение на Бернули

$$(1) \quad y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^m$$

При $m = 1$ y -нисто е с
разделни се променливи

При $m = 0$ y -нисто⁽¹⁾ е линейно

Решаване: Полагаме $z(x) := y^{1-m}(x)$

Погава

$$\begin{aligned} z' &= (1-m) y^{-m} \cdot y' = \\ &= (1-m) y^{-m} [ay + by^m] = \\ &= (1-m) ay^{1-m} + b(1-m) = \\ &= (1-m) az + (1-m)b \end{aligned}$$

Новото y -е е линейно y -е от 1 ред

$$z' = (1-m)az + (1-m)b$$

Задачи: 1) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$

$$y' = \frac{x}{2(x^2-1)} y + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{y}$$

уравнение на Бернули
(може и като
хомогенно) $m = -1$

Положим $z = y^{1-m} = y^2$
 $z(x) = y^2(x) \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$

Получава

$$z' = 2yy' = \frac{x}{x^2-1} y^2 + x =$$

$$= \frac{x}{x^2-1} z + x$$

Новото y -член е

$$z' = \frac{x}{x^2-1} z + x - \text{линейно}$$

$$c \quad a(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$b(x) = x$$

$$y(x) = e^{\int \frac{x}{x^2-1} dx} \left[c + \int x e^{-\int \frac{x}{x^2-1} dx} dx \right]$$

$$= e^{\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}} \left[c + \int \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}} dx \right] =$$

$$= \sqrt{|x^2-1|} \left[c + \sqrt{x^2-1} \right] = z = y^2$$

$$2) \quad xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$$

$$y' = \frac{4y}{x} + 2x\sqrt{y} =$$

$$= \frac{4y}{x} + 2x \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$z(x) = \cancel{y(x)} y^{\frac{1}{2}}(x)$$

$$z'(x) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}(x) \cdot y'(x) =$$

$$= \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4y}{x} + 2x y^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x} + x =$$

$$= \frac{2 y^{\frac{1}{2}}}{x} + x$$

$$z' = \frac{2 z(x)}{x} + x$$

$$a(x) = \frac{2}{x}$$

$$b(x) = x$$

$$\begin{aligned}
 z(x) &= e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[c + \int x e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx \right] = \\
 &= e^{2 \ln x} \left[c + \int x e^{-2 \ln x} dx \right] = \\
 &= x^2 \left[c + \int \frac{x}{x^2} dx \right] = \\
 &= x^2 [c + \ln |x|] = y^{1/2}
 \end{aligned}$$

3) ~~уравнение~~ $y' \cdot x^3 \sin y = xy' - 2y$

~~уравнение~~

$$xy' - y'x^3 \sin y = 2y$$

$$y' = - \frac{2y}{x^3 \sin y - x}$$

Решаваме задачата относно $x(y)$, като се припомняме, че

$$y'x = \frac{1}{x'y}$$

$$y' \neq 0$$

В случая това е законно само при $y' \neq 0$ или все едно само при $y \neq 0$

Първо проверяваме дали $y \equiv 0$ е решение на y -ето

1. $y \equiv 0$ е решение на y -ето

2. При $y \neq 0$ решаване y -это

~~$\frac{dx}{dy}$~~

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = - \frac{2y}{x^3 \sin y - x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = - \frac{x^3 \sin y - x}{2y} =$$

$$= \frac{1}{2y} \cdot x - \frac{\sin y}{2y} x^3,$$

което е y -лине на Бернули
с $m = 3$

$x(y)$

~~$z(y)$~~

~~$z(y)$~~

$$z(y) = x^{-2}$$

$$z(y) = x^{-2}(y)$$

$$z'(y) = -2x^{-3}(y) \cdot x'(y) =$$

$$= -2x^{-3}(y) \left[\frac{1}{2y} \cdot x - \frac{\sin y}{2y} x^3 \right] =$$

$$= \cancel{-2x^{-2}(y)} \left[\right]$$

$$= - \frac{2x^{-2}(y)}{2y} + \frac{x \sin y}{xy}$$

$$z' = - \frac{x}{y} + \frac{\sin y}{y}$$

$$a(y) = - \frac{1}{y}$$

$$b(y) = \frac{\sin y}{y}$$

$$\Rightarrow z = e^{-\int -\frac{1}{y} dy} \left[c + \int \frac{\sin y}{y} e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy \right] =$$

$$= e^{-\ln y} \left[c + \int \frac{\sin y}{y} \cdot y dy \right] =$$

$$= \frac{1}{y} [c + \cos y]$$

не на
изпит

Уравнение на Рикати

$$(1) y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

$c(x) \neq 0$ Бернули

$a(x) \neq 0$ линейно

Уравнението (1) в общо положение е неразрешимо в квадратури. Но ако знаем едно частно решение $y_1(x)$ на (1), то ~~смената~~ смената:

1) $z(x) := \frac{1}{y - y_1}$ праца (1) в линейно от първи ред

2) $z(x) := y - y_1$ праца в ⁽¹⁾ y -е на Бернули

Наша метод за намиране на частно решение. Може да го търсите във вида на коефициентите $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$

Решението на (1) зависи само там, където зависи $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ и никъде другаде.

(В степенен ред (Маклорен))

Ако (1) има частно решение

$y_1 = ax^n$, то може да бъде намерено.

у₁ - решение
 $z = y = y_1$

Задача: 1) $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$

~~у₁ = ах^п~~

$$y_1 = ax^n$$

$$a = ?$$

$$n = ?$$

$$\left(3anx^{n-1} + a^2x^{2n} + \frac{2}{x^2} = 0 \right)$$

$$y_1' = anx^{n-1}$$

Заместваме в у-нието и търсим
ни а с метода на неопределените
коэффициенти.

$$3anx^{n-1} + a^2x^{2n} + \frac{2x^{-2}}{x^2} \equiv 0 \quad \forall x$$

$$x^{-2}$$

~~$3anx^{n-1} + a^2x^{2n} + \frac{2x^{-2}}{x^2} \equiv 0$~~

степенен показател $n-1 = 2n = -2$

$$y_1 = \frac{a}{x} \quad \boxed{n = -1}$$

Горсим a , т.е. сумата от коеф.
трябва да е 0

$$-3a + a^2 + 2 = 0$$

$$b = 1$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$Z(x) = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

y_1, y_2 - две $\neq$
частни
решения

$$y_1 = \frac{2}{x}$$

Полагаме

$$Z = \frac{1}{y - \frac{2}{x}}$$

Тогава

$$Z' = - \frac{y' + \frac{2}{x^2}}{\left(y - \frac{2}{x}\right)^2} =$$

$$= - \frac{-\frac{y^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\left(y - \frac{2}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{y^2}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^2}}{\left(y - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3} \left(y - \frac{2}{x}\right)^2}{\left(y - \frac{2}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} z \left(y + \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{3} z \left(y - \frac{2}{x} + \frac{4}{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} z \left(\frac{1}{z} + \frac{4}{x} \right)$$

$$z' = \frac{4z}{3x} + \frac{1}{3} \text{ — линейно } y\text{-е}$$

$$z(x) = x^{4/3} \left[c + \frac{1}{3} \int x^{-4/3} dx \right] =$$

$$= x^{4/3} \left[c + \frac{1}{3} \frac{x^{-1/3}}{-1/3} \right] =$$

$$= z(x) = \frac{1}{y - \frac{2}{x}}$$

за ∞

Дом.: Трез подходяща смена на променливите прагете лин. уравнение от I ред $y' = a(x)y + b(x)$ & y -е с разделящи се променливи и изведете от него ф-лата за общор-е на линейното y -ние.

2) $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

$$y = ax^n$$

$$anx^{n-1} + 2ax^n e^x - a^2 x^{2n} = e^{2x} + e^x$$

$$nax^{n-1} + 2ax^ne^x - a^2x^{2n} = e^{2x} + e^x$$

$$x^n(2ae^x - a^2) + nax^{n-1}e^{2x} - e^x = 0$$

$$2ae^x - a^2 = 0$$

$$2a \nabla x$$



$$x=1$$



$$na + 2ae^x - a^2 = e^{2x} + e$$



$$y_1 = e^x$$

$$z = y - y_1 = y - e^x$$

$$z' = y' - e^x =$$

$$= e^{2x} + e^x + y^2 - 2ye^x - e^x =$$

$$= (e^x - y)^2$$

$$z' = z^2$$

с разделением переменных

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx + C$$

$$-\frac{1}{z} = x + C$$

$$\boxed{-\frac{1}{y - e^x} = x + C}$$

общо
решение

10.10.2013г.

четвъртък

Лекция

1. Уравнения с разделливи се променливи

$$\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$$

$$\cdot = \frac{d}{dt}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

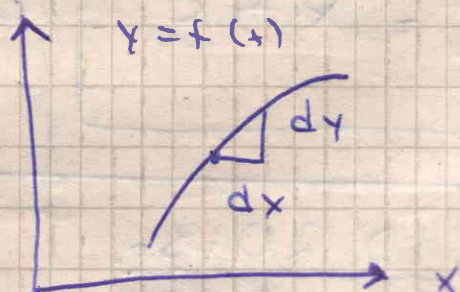
$$\frac{dx}{dt}$$

диференциал на ф-я? = нарастване

$$\underline{df(x) = f'(x) dx}$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$



$$\frac{dx}{dt} = f(t) g(x)$$

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t) dt$$

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t) dt + C$$

"
"

$G(x)$
 $F(t)$

$$(*) \quad G(x) = F(t) + C,$$

където C е
произволна
const

(*) наричаме "общо решение" на (1)
" ($\forall$ решения)

~~Урав~~

Общото решение на ~~дифференциал-~~но уравнение от $1^{ва}$ ред зависи от произволна константа C .

Решенията на ДУ от $1^{ва}$ ред

$y' = f(x)$ наричаме
неопределен интеграл и бележим

$$y = \int f(x) dx + C$$

$\forall$ два неопределени интеграла се
разлизават с const.

Заб. От една фиксирана ф-я
числото $y(b) - y(a)$ наричаме
определен интеграл от f в
границы от $x=a$ до $x=b$; бележим

$$\int_a^b f(x) dx$$

зад. Решете y -ето

$$\dot{x} = x^2 t^2$$

Решение: Уравнението е с разделящи
се променливи:

$$\frac{dx}{dt} x^2 = t^2 dt$$

$$-\frac{1}{x} = \frac{t^3}{3} + C$$

$$-\frac{1}{x} = \frac{t^3 + 3C}{3}$$

$$x = -\frac{3}{t^3 + 3C} = -\frac{3}{t^3 + C}$$

Заг. $\dot{x} = \sin t \cdot \cos x$

Уравнението е разгледано и се

Решение: $\frac{dx}{dt} = \sin t \cos x$ променливи:

$$\frac{dx}{\cos x} = \sin t dt$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sin t dt + C$$

||
- cos t

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x - \frac{\pi}{2})} = x - \frac{\pi}{2} = y$$

$$x - \frac{\pi}{2} = y$$

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{dy}{2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{y}{2} dy}{\sin \frac{y}{2} \cos^2 \frac{y}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{y}{2}} =$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right|$$

$$\ln \operatorname{tg} \frac{y}{2} = -\cos t + C$$

~~Выводим~~

$$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos t + C$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = e^{C - \cos t} =$$

$$= e^{-\cos t} \cdot C$$

Окончательно,

$$\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = C \cdot e^{-\cos t}$$

2. Однородные уравнения

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Положиме $z(x) := \frac{y(x)}{x}$, т.е.

$$\frac{y(x)}{x} = x \cdot z(x) \text{ и}$$

дифференцируете полагаете по x :

$$y' = z(x) + xz'(x) = f(z)$$

$$x \frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} = G(x)$$

Решаване полутеното уравнение с разделици се променливи:

$$f(z)$$

$$F(z) = \ln x + c$$

Полагаме обратно

$$z := \frac{y}{x}$$

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + c$$

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{y+x-2x}{y+x} = 1 - \frac{2x}{y+x}$$

Решение. Уравнението е хомогенно.

$$1 - \frac{2x}{y+x} = 1 - \frac{2}{1+\frac{y}{x}}$$

Критерий за хомогенност

$$y \rightarrow Ly$$

$$x \rightarrow Lx$$

и y -то остава
същото

$$L \frac{dy}{dx} = \frac{Ly - Lx}{Ly + Lx}$$

$$z(x) := \frac{y}{x}$$

Положавам $y(x) = xz(x)$,
диф. по отношение x

$$y = xz(x)$$

~~y~~

~~$x + z$~~

$$z(x) + xz'(x) = \frac{xz - x}{xz + x}$$

$$z + xz' = \frac{xz - x}{xz + x}$$

$$xz^2 + \cancel{xz} + x^2 z z' + x^2 z' = \cancel{xz} - x$$

$$z'(x^2 z + x^2) = -xz^2 - x$$

$$z'(xz + x) = -z^2 - 1$$

$$z' = -\frac{(z^2 + 1)}{z + 1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{(z^2+1)}{z+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$- \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int - \frac{z+1}{z^2+1} dz = \ln x + C$$

||

①

$$- \int \frac{z^2+1+z-z^3}{z^2+1} dz =$$

$$= \int 1 dz + \int \frac{z-z^3}{z^2+1} dz =$$

$$= z + \int \frac{z}{z^2+1} dz -$$

$$\int \frac{z^3}{z^2+1} dz =$$

$$= z + \frac{1}{2} \int \frac{d(z^2+1)}{z^2+1} - \int \frac{z^3+1-1}{z^2+1} dz =$$

$$= z + \frac{1}{2} \ln |z^2+1| - \int \frac{1}{z^2+1} dz =$$

$$= z + \frac{1}{2} \ln |z^2+1| + \arctan z$$

~~Окончательно~~

$$\ln |z^2 + 1| + 2 \operatorname{arctg} z = 2 \ln x + C$$

$$\ln \left| \frac{y^2}{x^2} + 1 \right| + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -2 \ln x + C$$

Окончательно, общее реш. е

3. Линейные уравнения

а) линейные однородные уравнения

$$y' = a(x)y - \text{где } a - \text{функция на } x$$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx$$

$$\ln y = \int a(x) dx$$

$$y = e^{\ln y} = e^{\int a(x) dx}$$

Общее решение е

$$y = C \cdot e^{\int a(x) dx}$$

б) линейные неоднородные у-я

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Общее решение е

$$y = e^{\int a(x) dx} \left[C + \int e^{-\int a(x) dx} b(x) dx \right]$$

Извод на формулата:

$$\left[y e^{-\int a(x) dx} \right]' = y' e^{-\int a(x) dx} + y \cdot e^{-\int a(x) dx} \cdot - (a(x))$$

$$= (ay + b) e^{-\int a(x) dx} - ay e^{-\int a(x) dx} =$$

$$= b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

$$\Rightarrow y e^{-\int a(x) dx} = \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C$$

~~##~~

Забелешка: ВЗВ (**)

$$\int a(x) dx = - \left[- \int a(x) dx \right]$$

зад. 1 $y' = y \cdot \ln x$

Ин. Решение. Уравнението е линейно и хомогенно.

Общото решение е

$$y = C \cdot e^{\int \ln x dx}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d \ln x =$$

$$= x \ln x - x = x (\ln x - 1)$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e$$

II н. Решение.

Уравнението е с разделящи се променливи

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln x$$

$$\frac{dy}{y} = \ln x \, dx$$

$$\ln y = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\Rightarrow y = C e^{x \ln x - x}$$

заг. 2 $y' = -y \cdot \operatorname{tg} x + \sec x$

$$\sec x = \frac{1}{\sin x}$$

Решение. Уравн. е нехомогенно

$$y = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} \left[c + \int \frac{1}{\sin x} e^{+\int \operatorname{tg} x dx} dx \right]$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} =$$

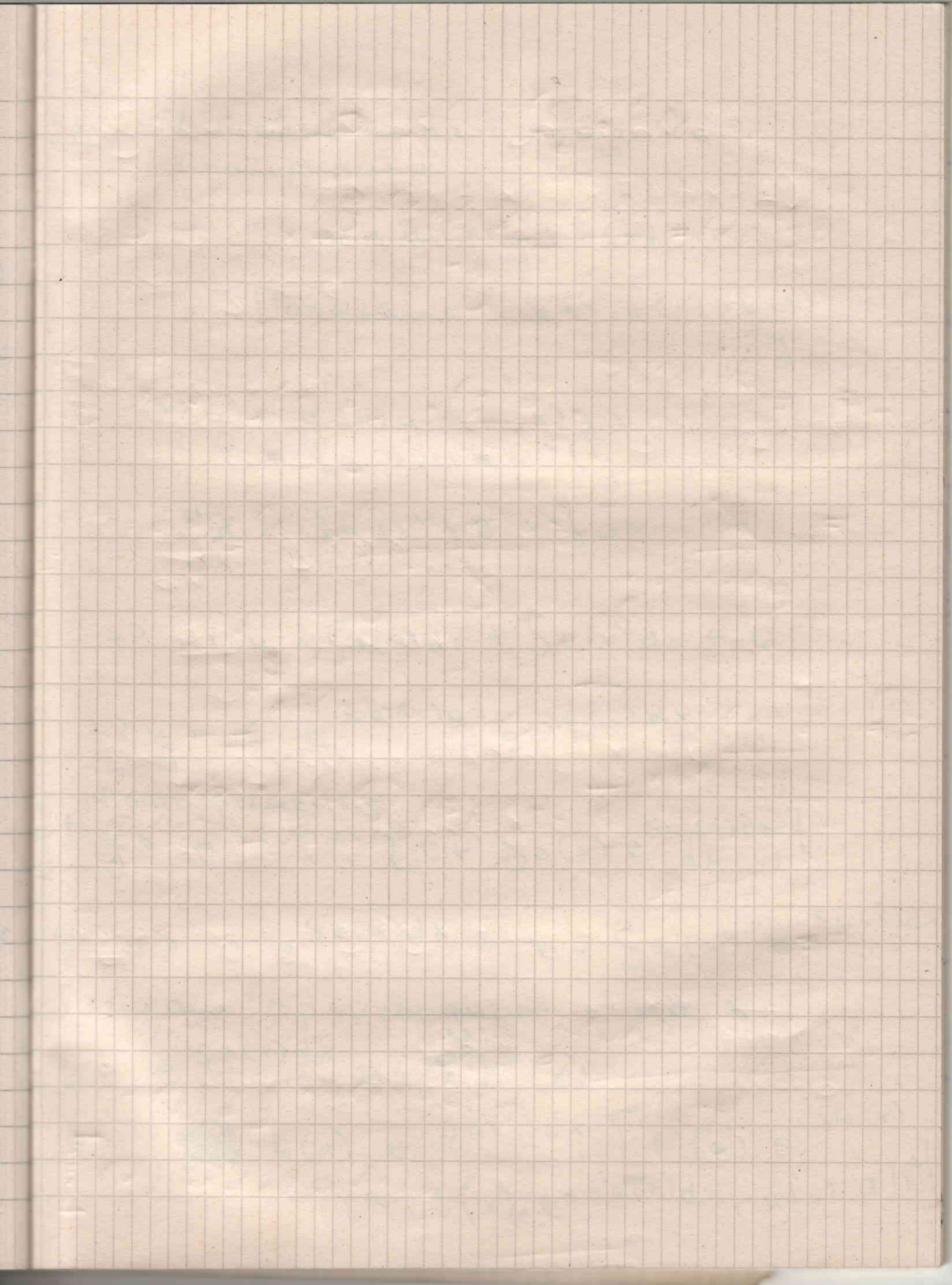
$$= - \ln \cos x$$

$$y = \cos x \left[c + \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx \right] =$$

$$= \cos x \left[c + \int \frac{\cos x dx}{\sin x \cos^2 x} \right] =$$

$$= \cos x \left[c + \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} \right] =$$

$$= \cos x (c + \ln(\operatorname{tg} x))$$



320

Q

B3

L

R

заг. Линейно $\rightarrow$ разделящи се
променливи

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Полагаме $b(x)z(x) := \frac{b(x)}{y}$

$$\Rightarrow y' = a(x)y + z(x)y = \\ = \{a(x) + z(x)\}y$$

$$\frac{dy}{dx} = \{a(x) + z(x)\}dx$$

$$\Rightarrow \ln y = \int a(x)dx + \int z(x)dx + C$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{\int a(x)dx} \cdot e^{\int z(x)dx}$$

Общо решение

$$y = e^{\int a(x)dx} \left\{ C + \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} dx \right\}$$

$$Q \Rightarrow C \cdot e^{\int z(x)dx} = C + \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}$$

Взимаме производната по x

$$L = e^{\int z(x)dx} \cdot z(x) \cdot z'(x)$$

$$R = \cancel{b(x)} \cdot e^{-\int a(x)dx} \cdot \left[b'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \right. \\ \left. = b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \cdot a(x) \cdot a'(x) \right]$$

$$z(x) = \frac{b(x)}{y}$$

$$z'(x) = \frac{b'(x)y - b(x) \cdot y'}{y^2}$$

$$L = e^{\int a(x) dx} \cdot \frac{b(x)}{y^3} \cdot [b'(x)y - b(x) \cdot y'] =$$

$$= \frac{\cancel{y}}{e^{\int a(x) dx}} \cdot \frac{b(x)}{\cancel{y} \cdot y^2} [b'(x)y - b(x) \cdot y']$$

$$R = \frac{b(x)}{e^{\int a(x) dx}} \left[b'(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} - b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} \cdot a(x) \cdot a'(x) \right]$$

$$L = R$$

($\Rightarrow$)

$$\frac{[b'(x)y - b(x)y']}{y^2} = \cancel{e^{-\int a(x) dx}} \cdot e^{-\int a(x) dx} [b'(x) - b(x) \cdot a(x) \cdot a'(x)]$$

(=)

$$b'(x)y - b(x)y' = e^{\int a(x) dx} \cdot e^{\int z(x) dx}$$

$$\{ \underbrace{b'(x) - b(x) \cdot a(x)}_t \cdot y \}$$

$$b'(x)y - b(x) \cdot y \cdot [a(x) + z(x) \cdot z'(x)] =$$

$$= y \cdot e^{\int z(x) dx} \cdot t$$

$$z'(x) = \frac{b'(x)y - b(x)y a(x) - b^2(x)}{y^2}$$

~~$\int z(x) dx$~~

$$\int \frac{b(x)}{y} dx = \ln y \cdot b(x) - \int \ln y b'(x) dx$$

$$e^{\int z(x) dx} = \frac{y b(x)}{\int \ln y b'(x) dx}$$

$$y = e^{\int a(x) dx} \cdot e^{\int z(x) dx} \cdot C_1$$

$$? e^{\int z(x) dx} = \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C$$

$$\int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx =$$

$$= \int \frac{b(x) \cdot e^{\int z(x) dx} \cdot C_1 dx}{y} =$$

$$= \int z(x) \cdot e^{\int z(x) dx} \cdot C_1 dx =$$

$$z(x) = \frac{b(x)}{y}$$

$$= \int \frac{z(x)}{z'(x) z(x)} \cdot b(x) dx =$$

$$= \int \frac{b(x)}{z'(x)} dx$$

$$\frac{y}{e^{\int a(x) dx}} = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx$$

$$e^{\int a(x) dx}$$

"

L

$$L' = \underbrace{y' e^{\int a(x) dx}}_{\text{product rule}} - \underbrace{y \cdot e^{\int a(x) dx} \cdot a(x)}_{\text{product rule}}$$

$$(y \cdot e^{-\int a(x) dx})' =$$

$$= y' \cdot e^{-\int a(x) dx} + y \cdot e^{-\int a(x) dx} \cdot (-) a(x) a'(x) =$$

$$= e^{-\int a(x) dx} [y' - y a(x) a'(x)]$$

$$R' = b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} [b'(x) e^{-\int a(x) dx} + b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} a(x) a'(x)] =$$

$$L' = \frac{y' e^{\int a(x) dx} - y e^{\int a(x) dx} a(x) a'(x)}{e^{2 \int a(x) dx}}$$

$$? b(x) \cdot b'(x) - b^2(x) a(x) a'(x) =$$

$$= e^{\int a(x) dx} y' - y e^{\int a(x) dx} a(x) a'(x) =$$

$$= e^{\int a(x) dx} (a(x) y + b(x)) - y e^{\int a(x) dx} a(x) a'(x) =$$

$$= e^{\int a(x) dx} a(x) y + b(x) \cdot e^{\int a(x) dx} - y e^{\int a(x) dx} a(x) a'(x)$$

$$y = e^{\int a(x) dx} \cdot e^{\int z(x) dx}$$

$$L' = e^{\int z(x) dx} = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx + C$$

~~$$R' = e^{\int z(x) dx} \cdot z'(x) \cdot z(x)$$~~

~~R' = e^{\int z(x) dx} \cdot z'(x) \cdot z(x)~~

$$R = \int \frac{b(x) \cdot e^{\int z(x) dx}}{y} dx =$$

$$= \int z(x) \cdot e^{\int z(x) dx} dx$$

$$R' = z(x) \cdot e^{\int z(x) dx} \left[z'(x) e^{\int z(x) dx} + z(x) \cdot e^{\int z(x) dx} \cdot z'(x) z(x) \right]$$

~~$$L' = e^{\int z(x) dx} \cdot z'(x) \cdot z(x) = z'(x) e^{\int z(x) dx} [1 + z^2(x)]$$~~

$$(e^{\int z(x) dx})' = e^{\int z(x) dx} \cdot z(x) \cdot z'(x)$$

$$\left(\int z(x) \cdot e^{\int z(x) dx} dx \right)' =$$

$$= z(x) \cdot e^{\int z(x) dx} \left[z'(x) e^{\int z(x) dx} + z(x) \cdot e^{\int z(x) dx} \cdot z'(x) z(x) \right]$$

$$? \quad 1 = e^{\int z(x) dx} [1 + z^2(x)]$$

$$R' = z(x) \cdot e^{\int z(x) dx}$$

$$L' = z(x) \cdot e^{\int z(x) dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = R + C}$$

$$C \cdot e^{\int z(x) dx} =$$

$$= \int \frac{1}{z(x)} \cdot e^{\int z(x) dx}$$

$$C \cdot e^{\int z(x) dx} \cdot z(x)$$

$$e^{\int z(x) dx} z(x) \cdot C$$

15.10.2013г.

Упражнение

Уравнения от втори и по-висок
ред

$$c) F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Нелинейни уравнения

Уравненията (1) се решават, като се понижават до уравнения от първи
ред.

Методи за понижаване на реда

o) Когато (1) има вида:

$$y^{(n)}(x) = f(x)$$

Редът се понижават с директно
интегриране, т.е.

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x) dx + C_1 \text{ и т.н.}$$

1) Нека (1) има вида

$$F(x, y^{(k)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

$y(x)$ не присъства в явен вид

Редът му се понижава чрез смяната

$$y^{(k)}(x) := z(x)$$

Тогава $y^{(k+1)}(x) = z'$

Пример: 1) $x^2 y'' = (y')^2$

Положаие $y' = z(x)$. Тогава

Новото уравнение е $y'' = z'$

$$x^2 z' = z^2 \quad y \text{ - е с разделящи се променливи}$$

$$\frac{dz}{dx} x^2 = \frac{z^2}{x^2}$$

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$-z^{-1} = -x^{-1} + C_1$$

$$\boxed{\text{ред } y \cdot e = \text{брой const}}$$

$$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot x^2$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + C_1$$

$$z = \frac{x}{1 - C_1 x}$$

Връщаме към първоначалните променливи

$$y' = \frac{x}{1 - C_1 x} \quad \text{— } y \text{ — не е с разделимост се променливи}$$

$$y(x) = \int \frac{x}{1 - C_1 x} dx + C_2$$

$$-\frac{1}{C_1} \frac{(1 - C_1 x - 1)}{1 - C_1 x} =$$

$$= -\frac{1}{C_1} \left[1 - \frac{1}{1 - C_1 x} \right]$$

$$y(x) = -\frac{1}{C_1} x - \frac{1}{C_1^2} \ln |1 - C_1 x| + C_2$$

общо решение

2) Нека (1) има вида

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

x не присъства явно в уравнението
Резултат се постигава чрез
смяната

$$y'(x) = p(y)$$

няма x !!!

Тогава $y''(x) = p'_y \cdot y'_x = p \frac{dp}{dy}$

Пример: 1) $y^3 y'' = 1$

няма явно x в y -ето

Полагаме

$$y' = p(y)$$

Тогава $y'' = p(y) \frac{dp}{dy}$

Новото уравнение е

$$y^3 \cdot p(y) \frac{dp}{dy} = 1 \Rightarrow$$

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{y^3} \quad - \quad y \text{ - е с разделящи се променливи}$$

$$p dp = \frac{dy}{y^3}$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + C_1$$



$$p^2 = -\frac{1}{y^2} + A$$

Връщане към изходните променливи 2)

$$(y')^2 = -\frac{1}{y^2} + A$$

$$\Rightarrow y' = \pm \sqrt{A - \frac{1}{y^2}} \quad \text{— } y \text{ — е с}$$

разделен
се

променливи По

$$\frac{y}{\sqrt{Ay^2 - 1}} dy = \pm dx$$

Интегриране

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{Ay^2 - 1}} = \pm \int dx + B$$

$$\frac{1}{A} \frac{1}{2} \int \frac{d(Ay^2 - 1)}{\sqrt{Ay^2 - 1}} = \frac{1}{2} \pm x + B$$

$$\frac{1}{2A} \sqrt{Ay^2 - 1} = \pm x + B \quad \text{общее решение}$$

$$2) \quad y'' = 2yy'$$

Очевидны решения:

$$y' \equiv 0 \Rightarrow \boxed{y = C}$$

Положение

$$y' = p(y)$$

$$\text{Тогда} \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$$

Заместим в y -е то

$$p \frac{dp}{dy} = 2y \cdot p$$

Решение на $P \equiv 0$?

$$y' \equiv 0 \Rightarrow y'' \equiv 0$$

$$\frac{dp}{dy} = 2y \quad y\text{-е с разделливи се променливи}$$

$$dp = 2y dy$$

$$p = \cancel{2} \frac{y^2}{\cancel{2}} + C_1$$

$$p = y^2 + C_1$$

Връщаме към изходните променливи

$$y' = y^2 + C_1 \quad y\text{-е с разделливи се променливи}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{y^2 + C_1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + C_1} = x + C_2$$

Разглеждаме 3 случая:

1. Нека $C_1 \equiv 0$

Тогаво общото решение е

$$-\frac{1}{y} = x + C_2$$

2. Нека $C_1 > 0$

Тогаво

$$\int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{C_1}}}{C_1} \int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{C_1}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{C_1}}}{C_1} \arctg \frac{y}{\sqrt{C_1}}$$

Общото решение е

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{C_1}}}{C_1} \arctg \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$$

3. $C_1 < 0$. Положим $C_1 = -A$, $A > 0$

Тогаво

$$\int \frac{dy}{y^2 - A} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left(\int \frac{1}{y - \sqrt{A}} - \int \frac{1}{y + \sqrt{A}} \right) dy =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{A}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{A}}{y + \sqrt{A}} \right|$$

Тогава общото решение е

$$\frac{1}{2\sqrt{A}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{A}}{y + \sqrt{A}} \right| = x + C_2$$

$\frac{1}{2}$

$$3) \quad y y'' + 1 = (y')^2$$

$$y' = p(y)$$

$$y'' = p'(y) \cdot y' = \frac{p(y) dp}{dy}$$

Заместваме в y -ето

~~$p(y)$~~

$$y \cdot p(y) \frac{dp}{dy} + 1 = (p(y))^2$$

$$y p \frac{dp}{dy} + 1 = p^2$$

$$y p \frac{dp}{dy} = p^2 - 1$$

y -е с разделящи
се променливи

$$\frac{p}{p^2 - 1} dp = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{p}{p^2 - 1} dp = \ln y + C_1$$

3)

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(p^2 - 1)}{p^2 - 1} = \ln y + C_1$$

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 - 1) = \ln y + C_1$$

$$p^2 - 1 = C_1 \cdot y^2$$

$$p^2 = C_1 y^2 + 1$$

Връщаме към изходните променливи

$$y' = \pm \sqrt{C_1 y^2 + 1}$$

y-е с
разделящи
се променливи

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 1}} = \pm \int dx + C_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln | \sqrt{C_1} y + \sqrt{C_1 y^2 + 1} | = \pm x + C_2$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln | x + \sqrt{a^2 + x^2} |$$

общо
решение

3) Нека (1) е хомогенно относно y и производните на y, т.е.

ако заместиме в (1) $y = xy$

$$\begin{aligned} y' &= xy' \\ y'' &= xy'' \\ y^{(n)} &= xy^{(n)}, \text{ то} \end{aligned}$$

да се получи

$$F(x, xy, xy', xy'', \dots, xy^{(n)}) = x^k$$

$$F(x, y, \dots, y^{(n)})$$

$\forall x$

Редът се понижават чрез смяната

$$\frac{y'}{y} = z(x)$$

Тогава $y' = yz$ и $y'' = y'z + z'y = yz^2 + y \cdot z' = y(z^2 + z')$

Примери: 1) $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$

Ако $y \rightarrow xy$

$$y' \rightarrow xy'$$

$$y'' \rightarrow xy''$$

$$x^2(xy y'' + x(y')^2) = x^2 \cdot 2yy'$$

Полагаме $\frac{y'}{y} = z(x)$

Тогава $y' = y z$
 $y'' = y(z^2 + z')$

Заместваме в y -ето

$x y y'(z^2 + z) + x y^2 z^2 = 2 y y z$

$y \equiv 0$ е решение

Новото уравнение е

$x z^2 + x z' + x z^2 = 2 z$

$x(\cancel{z})$

$z' = \frac{2 z - 2 x z^2}{x} =$

$= \frac{2}{x} \cdot z - 2 z^2$ - уравнение на Бернул

$m = 2$

Полагаме $u(x) = z^{1-m} = z^{-1}(x)$.

Тогава

$u' = -z^{-2} \cdot z' = -z^{-2} \left[\frac{2}{x} z - 2 z^2 \right] =$

$= -\frac{2}{x} z^{-1} + 2 = -\frac{2}{x} u + 2$

Получаваме линейно от първи ред

$$u(x) = e^{5x - \frac{2}{x} dx} \left[c_1 + \int (+2) e^{25 \frac{1}{x} dx} \right]$$

$$u(x) = \frac{1}{x^2} \left[c_1 + 2 \int x^2 dx \right] =$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left[c_1 + \frac{2}{3} x^3 \right]$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{1}{x^2} \left[c_1 + \frac{2}{3} x^3 \right]$$

y-нието

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{3c_1 + 2x^3}$$

у-е с
разделен
се промен-
ливи

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3x^2}{3c_1 + 2x^3} dx + C_2$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x^3 + 3c_1)}{(3c_1 + 2x^3)} + C_2$$

$$= \frac{1}{2} \ln |2x^3 + 3c_1| + C_2$$

$$(y')^2 = 2y' y^2$$

4) Нека $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
се представя във вида

$$\frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

Тогава $G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_1$

Примери: 1) $y'' = 2yy'$

$$\frac{d}{dx} (y') = \frac{d}{dx} (y^2)$$

$$\Rightarrow y' = y^2 + C_1$$

...

2) $y y'' + (y')^2 = 1$

$$(y')^2 (y + y') =$$

$$(y \cdot y')' = y' y' + y \cdot y''$$

- в y -это няма явно x и може да се понижи по друг начин със замената $y' = p(y)$

По друг начин

$$\frac{d}{dx} (y \cdot y') = \frac{d}{dx} (x) \Rightarrow$$

$$y \cdot y' = x + C_1$$

- y -е с разделящи се променливи

$$\int y dy = \int (x + C_1) dx + C_2$$

$$\left| \frac{y^2}{2} = \frac{(x + C_1)^2}{2} + C_2 \right| \text{ общо решение}$$

3) $y \cdot y''' = y' \cdot y'' \quad | : y y''$ няма явно x
— хомогенно е

— редът може да се понижи по 3
начина



двете
Разделяме страни на
 y -ето на $y \cdot y''$

$y'' \equiv 0$ е решение на y -ето,
като y

$$y' = C$$

~~$y = Ax + B$~~ $y = Ax + B$

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y'}{y}$$

~~$\frac{y'}{y} = \frac{y''}{y'}$~~

$$\frac{d}{dx} (\ln y'') = \frac{d}{dx} (\ln y)$$

$$\Rightarrow \ln y'' = \ln y + C_1$$

$$y'' = c_1 y$$

$$y'' = c_2 y$$

мн. ч. 2 or n-ty

peg c const coef.

3ag. $y' \cdot y''' = 2(y'')^2$

$$y' = z(x)$$

$$y'' = z'(x)$$

$$y''' = z''(x)$$

$$z \cdot z'' = 2 \cdot (z')^2$$

~~$$z \cdot z'' = 2 \cdot (z')^2$$~~

$$z \cdot z'' = 2 \cdot (z')^2$$

~~$$z = P(z)$$~~

~~$$z' = P'(z) \cdot z' =$$~~

$$z' = P(z)$$

$$z'' = P'(z) \cdot z' = \frac{dP}{dz} \cdot P(z)$$

$$Pz \cdot \frac{dP}{dz} = 2 \cdot (P(z))^2$$

$$P = 0$$

$$Pz \frac{dP}{dz} = 2P^2 \quad | : P$$

$$z \frac{dP}{dz} = 2P \quad \frac{1}{2} \frac{dP}{P} =$$

$$\dots \left| y = -c_1 P_n | x + c_1 c_2 | + c_3 \right|$$

3ag. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{(y')^2}{y}$

$$\frac{y'}{y} = z(x)$$

$$y' = yz$$

$$\begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = \\ &= yz^2 + yz' = \\ &= y(z^2 + z') \end{aligned}$$

$$\frac{y}{x^2} + \frac{yz}{x} + (z^2 + z')y = \frac{y^2 z^2}{y}$$

$$\cancel{yz} + yz' + \frac{yz}{x} + \frac{y}{x^2} = \cancel{yz^2} \quad y \neq 0$$

$$\cancel{yz'} =$$

$$z' + \frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

~~again~~

$$z' = -\frac{z}{x} - \frac{1}{x^2} =$$

$$= -z \cdot x^{-1} - x^{-2}$$

$$t(x) = \text{---} \bullet$$

$$m = -2$$

$$t(x) = z^{1-m} = z^3$$

$$t(x) = x$$

$$t(x) = x$$

$$z' = -z \cdot x^{-1} - x^{-2}$$

~~$$z' = -z \cdot x^{-1} - x^{-2}$$~~

$$a(x) = -x^{-1}$$

$$b(x) = -x^{-2}$$

$$\textcircled{10} \quad z = e^{-\int x^{-1} dx} \left[c + \int b(x) x^{-2} e^{\int x^{-1} dx} \right]$$

$$= e^{-\ln x} \left[c - \int \frac{1}{x^2} \cdot x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{x} [c - \ln x]$$

$$z = \frac{1}{x} [c_1 - \ln x]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} [c - \ln x]$$

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{1}{x} c - \frac{\ln x}{x} \right] dx$$

$$\ln y = C_1 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{\ln x}{x} dx + C_2 \quad (*)$$

$$\ln y = C_1 \cdot \ln x - \int \ln x d \ln x + C_2$$

$$\ln y = C_1 \cdot \ln x - \frac{\ln^2 x}{2} + C_2$$

$$y = e^{C_1 \ln x - \frac{\ln^2 x}{2} + C_2}$$

$$y = e^{C_1 \ln x - \ln x + C_2} =$$

$$= e^{C_1 \ln x} \cdot e^{-(1-C_1) \ln x} \cdot e^{C_2} =$$

$$= C_2 \cdot x^{C_1-1}$$

$$y = C_2 \cdot x^{C_1-1}$$

$$y = C_2 x^{C_1-1} \cdot \frac{1}{2} \ln x$$

$$xy'' = 2yy' - y'^2$$

$$(y^2)' = 2yy'$$

$$(y^2)' = 2yy'$$

$$xy'' + y' = 2yy'$$

$$(xy)' = y' + xy$$

$$(xy')' = y' + xy''$$

$$\frac{d}{dx}(xy') = \frac{d}{dx}(y^2)$$

$$xy' = y^2 + C_1$$

$$y' = \frac{y^2}{x} + \frac{C_1}{x}$$

y - е с р. азг. се

променлива

$\neq$

~~$$xy' = \frac{y^2}{x} + \frac{C_1}{x}$$~~

интеграли

$$\int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \int \frac{dx}{x} + C_2$$

309

$$yy'' - 3(y')^2 + 3yy' = 0$$

$$y' = P(y)$$

и $y' = 0$
хomoгенo $y = C$ е реш.

$$y'' = P'(y) \cdot y' = \frac{P(y) dp}{dy}$$

$$y \cdot \frac{dp}{dy} - 3P^2 + 3y \cdot P = 0 \quad | : P$$

$$y \frac{dp}{dy} = 3P - 3y$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{3p - 3y}{y} = 3 \frac{p}{y} - 3$$

dp

$$y \frac{dp}{dy} = 3p - 3y$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{3p}{y} - 3$$

$$p' = \underbrace{\frac{1}{y}}_{a(y)} \cdot 3p - \underbrace{3}_{b(y)}$$

$$p = e^{3 \int \frac{1}{y} dy} \left\{ c_1 + \int -3 e^{-3 \int \frac{1}{y} dy} dy \right\} =$$

$$= e^{\ln y^3} \left[c_1 - 3 \int e^{-\ln y^3} dy \right] =$$

$$= y^3 \left[c_1 - 3 \int \frac{1}{y} dy \right] =$$

$$= y \left[c_1 - 3 \ln y \right]$$

$$y' = y c_1 - 3 y \ln y$$

$$\frac{dy}{y(c_1 - 3y \ln y)} = dx$$

$$\frac{1}{y(c_1 - 3y \ln y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{c_1 - 3y \ln y}$$

$$1 = A(c_1 - 3y \ln y) + By$$

$$y=0$$

$$A = 1$$

$$y' = \frac{y(c_1 - 3y \ln y)}{y(c_1 - 3y \ln y)} = y(c_1 - 3y \ln y)$$

$$\frac{y'}{y} = c_1 - 3y \ln y$$

$$y' = \frac{c_1 y}{any} - 3y \ln y$$

$$\int \frac{dy}{y(c_1 - 3y \ln y)} = \int \frac{d \ln y}{c_1 - 3 \ln y} =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{d \ln(c_1 - 3 \ln y)}{c_1 - 3 \ln y} =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln |\ln |c_1 - 3 \ln y||$$

$$\frac{1}{3} \ln(\ln(c_1 - 3 \ln y)) = -3x$$

$$\ln(c_1 - 3 \ln y)$$

$$c_2 - \frac{1}{3} \ln(\ln(c_1 - 3 \ln y)) = x$$

$$3c_2 - \ln(\ln(c_1 - 3 \ln y)) = 3x$$

$$3c_2 - 3x = \ln(\ln(c_1 - 3 \ln y))$$

$$c_2 \cdot e^{-3x} = \ln(c_1 - 3 \ln y)$$

$$e^{c_2 \cdot e^{-3x}} = c_1 - 3 \ln y$$

$$\ln y = \frac{c_1 - e^{c_2 \cdot e^{-3x}}}{3}$$

$$y = e^{\frac{c_1 - e^{c_2 \cdot e^{-3x}}}{3}}$$

$$y' = y^3 \left(1 + \frac{1}{2} y\right)$$

$$y^2 = \frac{A e^{3x}}{2 - c e^{3x}}$$

22.10.2013г.

Упражнение

Упражнение

Задачи: 1) $x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$

~~Y~~

$$y - xy' = z(x)$$

$$y'' - y' - xy'' = z(x)$$

$$-xy'' = z(x)$$

~~Y~~

$$x^3 \cdot \frac{z(x)}{-x} = z \cdot (z - x)$$

$$\boxed{-x^2 \cdot z' = z \cdot (z - x)}$$

$$-x^2 = z - x$$

$$x - x^2 = z$$

$$-xy'' = x - x^2$$

$$y'' = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1$$

$$y' = \int x - 1 dx = \frac{(x-1)^2}{2} + C_1$$

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)^2}{2} d(x-1) + C_2 = \frac{(x-1)^3}{6} + C_1 x + C_2$$

линейны

Решение: $x [C_2 - P_n | C_1 + P_n x |]$

$$2) \quad 2xy' + 1 = y + \frac{x^2}{y-1}$$

~~$$\left(\frac{x^2}{y-1} \right) = \frac{2x(y-1) \cdot x^2 (y-1)}{(y-1)^2} =$$~~

2

$$y-1 = t$$

$$y' = t'$$

$$2xt' = t + \frac{x^2}{t}$$

$$t' = \frac{t}{2x} + \frac{x}{t} = \frac{1}{2} \frac{t}{x} + \frac{x}{t}$$

$$t = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{t}{x} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{x}{t} = z$$

$$z^{-2} = \frac{t^2}{x^2}$$

$$z' = \frac{t - xt'}{t^2}$$

$$z't^2 = t - xt'$$

$$\frac{t - z't^2}{z't^2}$$

$$z' + \frac{1}{2z} =$$

$$\frac{z - xz'}{z^2} = \frac{1}{2z} + z = \frac{1 + 2z^2}{2z}$$

$$1 - xz' = \frac{1 + 2z^2}{2}$$

$$xz' = \frac{1 - z^2}{2z}$$

$$z - xz' = z(1 + 2z^2)$$

$$xz' = z - z(1 + 2z^2) = \cancel{z} - \cancel{z} - 2z^3$$

$$xz' = -2z^3$$

$$\frac{z'}{-2z^3} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{-2z^3} = \frac{1}{x} dx$$

$$-\int \frac{1}{2z^3} dz = \ln x + C_1$$

$$-\frac{1}{2} \frac{z^{-2}}{(-2)} = \ln x + C_1$$

$$\frac{z^{-2}}{4} = \ln x + C_1$$

$$z' + z = \frac{1 - z^2}{2z}$$

$$\frac{t^2}{x^2 - 4} = \ln x + C_1$$

$$t^2 = 4x^2 \ln x + 4x^2 C_1$$

$$e^{\ln |x|}$$

$$(y-1)^2 = \frac{x^{C-1}}{C} \cdot x^2 =$$

$$(y-1)^2 = x^2 + Cx$$

309.

$$y'' = xy' + y + 1$$

$$(xy)' = y + xy'$$

$$(xy' + 1)' = y'' + xy'$$

$$(xy' + 1)' = y'' + xy'$$

$$(xy' + 1)' = y'' + xy'$$

$$(xy' + 1)' =$$

$$y'' = (xy' + 1)'$$

$$y' = xy + C$$

$$\frac{dy}{dx} = xy + c$$

$$y' = xy + c_1$$

$$y = e^{\int x dx} \{c_2 + \int c_1 \cdot e^{-\int x dx}\} =$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \{c_2 + c_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx\}$$

~~$$= e^{\frac{x^2}{2}} \left\{ c_2 + c_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\}$$~~

$$= \frac{1}{x^2} \int dx e^{-\frac{x^2}{2}}$$

✓

$$\frac{dy}{dx} = xy + c$$

$$\frac{dy}{y} = x dx + \frac{c}{y} dx$$

$$y'' = (xy + x)'$$

$$y' = xy + x + C_1 =$$

$$= (x + C_1)y + C_1$$

$$y = e^{\int x dx} \left\{ c_2 + \int (x + c_1) e^{-\int x dx} \right\}$$

$$y = e^{\int (x+1) dx} \left\{ C_2 + \int K_1 \right\}$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left\{ C_2 + \int (x+c) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\}$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \left\{ C_2 + \int (x+c) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\}$$

$$\int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c \cdot \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$-\int \frac{1}{x} dx \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -\int de^{-\frac{x^2}{2}} =$$

$$= -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Th за $\exists$ и ! на задачата на Коши

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

$$(2) \quad y(x_0) = y_0 \text{ — начални условия}$$

има ! рещ.

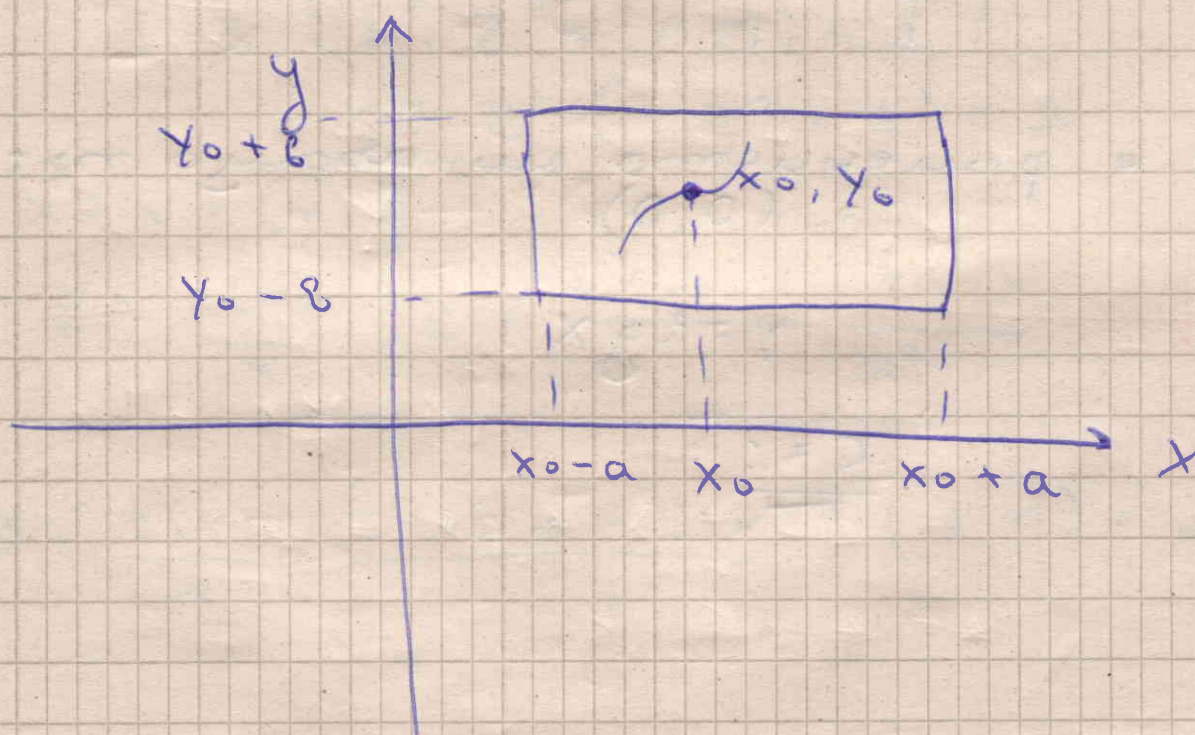
Нека $G: \begin{cases} |x - x_0| \leq a \\ |y - y_0| \leq b \end{cases}$

и нека $f(x, y)$ е деф. и непр. в G и удовлетворява условието на Липшиц по y в G , т.е. за $\forall$ двойка (x, y_1) и $(x, y_2) \in G$ $\exists$ const K , т.е.

Липшиц $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$

Тогава Задачата на Коши (1), (2) притежава единствено решение $y(x)$, дефинирано поне в $|x - x_0| \leq h$, където $h = \min(a, \frac{b}{L})$ при

$$L = \max_G |f|$$

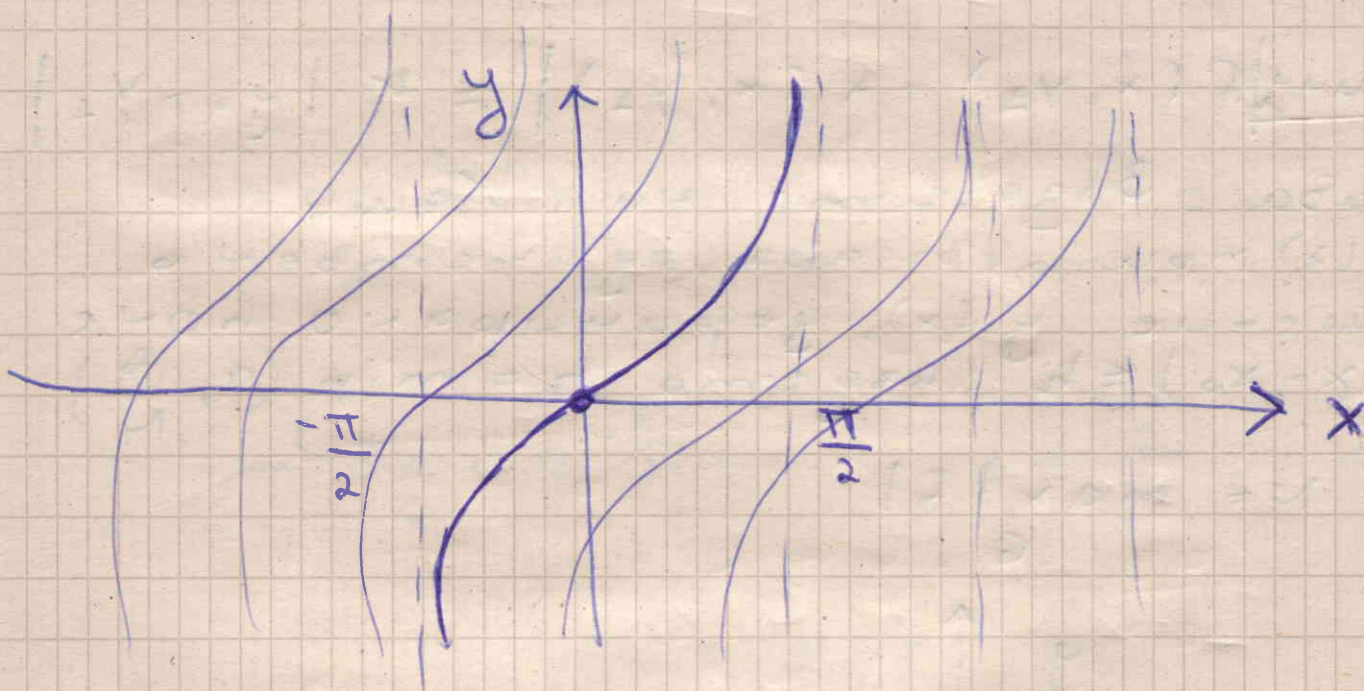


Пример: $y' = 1 + y^2$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 1 dx$$

$$\arctg y = x + c$$

$$y = \operatorname{tg}(x+c) - \text{общо решение}$$



Кое е решението, минаващо през
т. $(0,0)$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$\underline{\underline{c = ?}}$$

Решете зад на Коши :

зад $y'' \cdot (x^2 (y')^3 + x y') = 0 \quad 1$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

~~y'~~ $z(x) = y'$
 $z' = y''$

~~$z' \cdot (x^2 \cdot z^3 + x z) = 0$~~

$$z(x) = y'$$

$$y'' = z'$$

$$z' (x^2 \cdot z^3 + x z) = 1$$

$$x z \cdot z' (x^2 z^2 + 1) = 1$$

$$x z = t(x)$$

$$z = \frac{t(x)}{x} \quad z' = \frac{t'(x) \cdot x - t(x)}{x^2}$$

$$\cancel{x} \cdot \frac{t(x)}{\cancel{x}} \cdot \frac{(t'(x) \cdot x - t(x))}{x^2} (t+1) = 1$$

$$x \cdot z \cdot z' (x^2 z^2 + 1) = 1$$

$$x^3 z^3 z' + x z \cdot z' = 1$$

$$z' = \frac{1}{x z (x^2 z^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{z^3}$$

$$\frac{1}{x z (x^2 z^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{z} + \frac{C}{x^2 z^2 + 1}$$

$$1 = A z (x^2 z^2 + 1) + B x (x^2 z^2 + 1) + C x z$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

$$A z = 1$$

$$A = \frac{1}{z}$$

$$z' = \frac{1}{x^2 z^3 + x z}$$

Разрешение y-отношения

$$x = x(z)$$

$$\frac{1}{\frac{dx}{dz}}$$

у-е на

$$\frac{dx}{dz} = xz + x^2 z^3 \quad \text{Бернулли}$$

$$cm = 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{z} \quad \frac{1}{z} = t \quad z = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^3}$$

$$u = u(z) = x^{1-m}(z) = x^{-1}(z)$$

$$\frac{du}{dz} = -x^{-2} \frac{dx}{dz} =$$

$$= -x^{-2} (xz + x^2 z^3) =$$

$$= -x^{-1} z - z^3$$

ли. у-е

$$\frac{du}{dz} = -uz - z^3$$

Общее решение $u = e^{-\int \frac{z^2}{2} dz} \left[c_1 - \int z^3 e^{\frac{z^2}{2}} dz \right]$

$$\int z^3 e^{\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \int \cancel{e^{\frac{z^2}{2}}} \frac{z^3}{z} de^{\frac{z^2}{2}} =$$

$$= \int z^2 de^{\frac{z^2}{2}} =$$

$$= z^2 e^{\frac{z^2}{2}} - \int e^{\frac{z^2}{2}} dz^2 =$$

$$= z^2 e^{\frac{z^2}{2}} - \int e^{\frac{z^2}{2}} \cdot 2z dz$$

едното z

$$\int \frac{2z}{z} de^{\frac{z^2}{2}} =$$

$$2 e^{\frac{z^2}{2}}$$

$$= e^{\frac{z^2}{2}} [z^2 - 2]$$

$$\Rightarrow u(z) = c_1 e^{\frac{z^2}{2}} - z^2 + 2 = \frac{1}{x}$$

Ако върнем към изходните променливи

Вч, т.е. разглеждане y -ето

$$c_1 e^{-\frac{y'^2}{2}} + \frac{y'^2}{2} + 2 = \frac{1}{x}$$

Използваме началните условия, за да определим C_1 .

Имаме, че при $x = \frac{1}{2}$, $y(x) = 1$ и

$$y'(\frac{1}{2}) = 0$$

Заместяваме

~~C_1~~

$$c_1 e^0 - 0 + 2 = 2 \\ \Rightarrow c_1 = 0$$

Нашето y -ние от първи ред става

$$-\frac{y'^2}{2} + 2 = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \pm \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow y' = \pm \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

Решаване 2 задачи на Коши

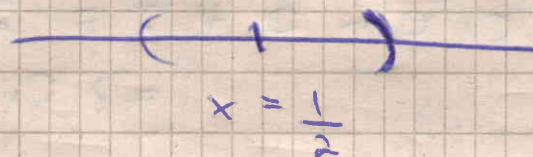
$$\begin{cases} y' = \sqrt{2 - \frac{1}{x}} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -\sqrt{2 - \frac{1}{x}} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$2 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \quad \text{в окр. т. на } x = \frac{1}{2}$$

Решаване зад. в окр. т. на $x = \frac{1}{2}$ и
ще предположим, че $x \geq 0$.

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$



$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

$$y = \int \sqrt{2 - \frac{1}{x}} dx + A$$

$$\sqrt{2 - \frac{1}{x}} = t$$

$$2 - \frac{1}{x} = t^2$$

Ойлерови
замяна

$$\begin{aligned} t^2 &= 2 - \frac{1}{x} \\ x &= \frac{1}{2 - t^2} \\ dx &= \left(\frac{1}{2 - t^2} \right)' dt = \frac{2t}{(2 - t^2)^2} dt \end{aligned}$$

$$2 - t^2 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{2 - t^2}$$

$$dx = \frac{-2t}{(2 - t^2)^2} dt$$

$$y = \int \frac{t \cdot 2t}{(2 - t^2)^2} dt + A =$$

$$= 2 \int \frac{t^2}{(2 - t^2)} dt + A =$$

$$= -2 \int \frac{t^2}{(2 - t^2)^2} dt$$

$$\int \frac{t dt}{(2 - t^2)^2} = - \int \frac{t d(2 - t^2)}{(2 - t^2)^2} =$$

$$= - \int t d \frac{1}{2 - t^2} =$$

$$= - \frac{t}{2 - t^2} + \int \frac{1}{2 - t^2} dt$$

$$\int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}+t} \right) dt =$$

$$y(x) = \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right|$$

Conds. par.

$$y(x) = \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right| + A$$

$$\text{npu } t = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{npu } x = \frac{1}{2} \quad t = 0$$

$$y(t=0) = 1 = A$$

$$y(x) = \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + 1$$

$$\text{npu } t = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

3a.g. $xy'' = y' + x((y')^2 + x^2)$

$$y' = z(x)$$

$$y'' = z'(x)$$

$$xz' = z + x(z^2 + x^2)$$

$$z' = \frac{z}{x} + z^2 + x^2$$

$$z' = \frac{1}{x}z + z^2 + x^2$$

у-е 4а рукату

$$z = ax^n$$

$$a(n-1)x^{n-1} = \frac{1}{x}ax^{n-1} + a^2x^{2n} + x^2$$

$$(a(n-1) - a)x^{n-1} + a^2x^{2n} + x^2 = 0$$

$$n=1$$

$$2n=n-1$$

$$n=-1$$

$$-a + a^2x^2 + x^2 = 0$$

~~$$n=1 \Rightarrow 2n=2$$~~

~~$$n=1 \Rightarrow 2n$$~~

$$-a + a^2x^2 + x^2 = 0$$

$$x^2(a^2+1) = a \quad \forall x$$

$$(an-2a)x^{n-1} + a^2x^{2n} + x^2 = 0$$

$$\int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}+t} \right) dt =$$

$$\cancel{y(x)} = \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right|$$

Now = per.

$$y(x) = \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right| + A$$

$$\text{npu } t = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{npu } x = \frac{1}{2} \quad t = 0$$

$$y(t=0) = 1 = A$$

$$y(x) = \frac{t}{2-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + 1$$

$$\text{npu } t = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

3a.g. $xy'' = y' + x((y')^2 + x^2)$

$$y' = z(x)$$

$$y'' = z'(x)$$

$$xz' = z + x(z^2 + x^2)$$

$$z' = \frac{z}{x} + z^2 + x^2$$

$$z' = \frac{1}{x}z + z^2 + x^2$$

у-е 4а Рукати

$$z = ax^n$$

$$a(n-1)x^{n-1} = \frac{1}{x}ax^{n-1} + a^2x^{2n} + x^2$$

$$(a(n-1) - a)x^{n-1} + a^2x^{2n} + x^2 = 0$$

$$2n = n-1$$

$$n = -1$$

$$n = 1$$

~~$$n = 2$$~~

~~$$n = 1 = 2n$$~~

~~$$n = 1 = 2n$$~~

$$-a + a^2x^2 + x^2 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) = a \quad \forall x$$

$$(an - 2a)x^{n-1} + a^2x^{2n} + x^2 = 0$$

$$z' = \frac{z}{x} + z^2 + x^2$$

$$\frac{z}{x} = t \quad z = tx$$

$$z' = t'x + t$$

$$t'x + t = t + t^2x^2 + x^2$$

$$t' = t^2x + x = x(t^2 + 1)$$

$$\frac{dt}{dx} = x(t^2 + 1)$$

$$\frac{dt}{t^2 + 1} = x dx$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \int x dx + c$$

$$\arctg t = \frac{x^2}{2} + c$$

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$z = x \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$y' = x \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$$

$$y = \int x \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + c \right) dx + C_2 =$$

$$= \int \frac{\sin \left(\frac{x^2}{2} + c \right)}{\cos \left(\frac{x^2}{2} + c \right)} d \left(\frac{x^2}{2} + c \right) + C_2 =$$

$$= -\ln \left| \cos \frac{x^2}{2} + c \right| + C_2$$

309. 2e) $2yy'' - y^3 = 2(y')^2$

~~2yy'' - y^3 = 2(y')^2~~

$$y'(x) = p(y)$$

$$y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y) = \frac{dp}{dy}$$

$$2y p \frac{dp}{dy} - y^3 = 2p^2$$

$$2y p p' - y^3 = 2p^2$$

$$p' = \frac{2p^2 + y^3}{2yp} = \frac{p}{y} + \frac{y^2}{2p}$$

$$p' = p \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{2p} \cdot y^2$$

Homogene

$$t = p$$

$$t = p$$

oder $y = e(x)$

$$p = t = p^{d-1}$$

$$t = \frac{1}{p}$$

$$p = \frac{1}{t}$$

$$-\frac{1}{t^2} \frac{1}{t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$$

$$v(y) = p^2$$

~~$$-\frac{1}{t^2} \frac{1}{t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$$~~

~~$$-\frac{1}{t^2} \frac{1}{t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$$~~

$$\frac{dp}{dy} = \frac{2}{y} p^2 + y^2 = \frac{2}{y} \cdot v + y^2$$

$$v = y^2 \left[c_1 + \int \frac{y^2}{y} dy \right] =$$

$$= y^2 [c_1 + y] = p^2$$

у-ные с раздельными промежутками

$$y' = \pm y \sqrt{C_1 + y}$$

при $\pm C \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y \sqrt{C_1 + y}} = \pm \int dx + C_2$$

1. $C_1 = 0$

2. $C_1 > 0$

3. $C_1 < 0$

~~23.10.2013г.~~

24.10.2013г.

Лекция

~~$\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$~~ - три частных
 $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ решения

$$\frac{y - \psi_1(x)}{y - \psi_2(x)} = C = \frac{\psi_3(x) - \psi_1(x)}{\psi_3(x) - \psi_2(x)}$$

ответ

$$C = \frac{y - \psi_1(x)}{\psi_3(x) - \psi_1(x)} \cdot \frac{\psi_3(x) - \psi_2(x)}{y - \psi_2(x)} \quad \frac{d}{dx}$$

$0 = \dots$ y -е на Рикати

$\forall C \rightarrow$ частно решение

$$C = 0 \rightarrow \psi_1(x) = y$$

$$C = \infty \rightarrow \psi_2(x) = y$$

$$C = 1 \rightarrow \psi_3(x) = y$$

$$\psi_1(x) = x$$

$$\psi_2(x) = 1$$

$$\psi_3(x) = e^x$$

$$C = \frac{y-x}{e^x-x} \cdot \frac{e^x-1}{y-1} = \frac{y \cdot e^x - x e^x + x - y}{e^x y - e^x - x y + x}$$

$$0 = (y' - 1) e^x -$$

$$0 = (y' e^x + y \cdot e^x - e^x - x e^x + 1 - y')$$
$$(e^x y - e^x - x y + x) -$$

$$= (y e^x - x e^x + x - y) (e^x y + e^x y' - e^x - y - x y' + 1)$$

$\left. \right)^2$

$$= y'e^x + ye^x - e^x - xe^x + 1 - y'$$

$$(f_1 f_2 \dots f_n)' = f_1 \dots f_n \left\{ \frac{f_1'}{f_1} + \dots + \frac{f_n'}{f_n} \right\}$$

$$0 = C \left[\frac{y'-1}{y-x} + \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x-1}{(e^x-x)^2} - \frac{y'}{(y-1)^2} \right]$$

$$\frac{e^x-1}{e^x-x} = 1 + \frac{1-x}{e^x-x}$$

$$C = \left[1 + \frac{1-x}{y-1} \right] \left[1 + \frac{1-x}{e^x-x} \right]$$

$$(*) \quad y'(1-x)(e^x-x)(e^x-2x+1) + (y-1)(y-x)(2e^x+x e^x+1) = 0$$

Рикати

Решение. $y=1, y=x, y=e^x$ са три частни
реш. на y -это на Рикати $(*)$
Общото решение е

$$C = \frac{y-1}{y-x} \frac{e^x-x}{e^x-1}$$

6. Точни диференциали

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$,
където ("симетриета" е):

$$P_y = Q_x \quad P_y = \frac{dP}{dy}$$

Решават се като внесем ∇ под знака на диференциала.

$$P dx + Q dy = dF(x, y)$$

$$F(x, y) = C$$

$$d f(x) = f'(x) dx$$

$$f(x) dx = d \int f(x) dx$$

$$d f(x, y) = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

зад. $(1 + e^{\frac{x}{y}}) + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})y' = 0$

Решение. Представете y -ето като точен диференциал

$$(1 + e^{\frac{x}{y}}) dx + \left[e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y}) \right] dy = 0$$

$$x^4 + y^4 + (x+y)^4 = c^3, \min(c) = ?, x, y, c \in \mathbb{N}$$

$$dx + d\left(e^{\frac{x}{y}}\right) = 0$$

заг.

$$\sin(x+y^2) = C$$

$$\cos(x+y^2) dx + 2y \cos(x+y^2) dy = 0$$

~~Решение.~~ Представим y -это как
тоже дифференциал.

~~$$d \sin(x+y^2) = 0$$~~

$$d \sin(x+y^2) = 0$$

заг. $(3x^2 - 2xy + \sin y) dx + (x \cos y - x^2) dy = 0$

Решение. — " — $P_y = Q_x$

$$3x^2 dx - 2xy dx + \sin y dx + x \cos y dy - x^2 dy = 0$$

$$dx^3 - \cancel{2xy} dx^2 + x d \sin y + x d \cos y - \cancel{x^2} dy = 0$$

~~$$x^3 - x^2 y$$~~

$$x^3 - x^2 y + x \sin y = C$$

7. У-я, нерешени относно производната
(но решени относно y)

$$y = f(x, y')$$

Диференциране по x :

$$y' = f_x(x, y') + f_{y'}(x, y') y''$$

Положение $y' = p(x)$
 $y'' = p'$

$$p' = \frac{dp}{dx}$$

$$p = f_x(x, p) + f_p(x, p) \cdot p'$$

$\frac{dp}{dx}$

и получаваме диф. у-е за
 $x = x(p)$:

$$p - f_x = f_p \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f_p}{p - f_x}, \text{ разрешено}$$

относно
производната

Намиране $x = x(p)$
 $y = f(x, p)$ Р-е в
параметр. вид

заг. $y = 2xy' - y'^2$

Решение. $\left| \begin{array}{l} x = \frac{c}{p} + \frac{2p}{3} \\ y = \frac{2c}{p} + \frac{p^2}{3} \end{array} \right.$

29.10.2013г.

Упражнение

Линейни системи

(1) $\dot{x} = Ax$, $A \in M_n(\mathbb{C})$
 $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$,
 $t \in \mathbb{C}$

Доказва се, че общото решение на (1) се дава

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0,$$

където

$$x_0 = x_1(t_0), \dots, x_n(t_0) -$$

начално условие

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = E + A \cdot t + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

матрица

Като се вземе предвид, че за $\forall$ матрица A има

$A = T J T^{-1}$, където T е неособена матрица ($\det T \neq 0$), наречена матрица на прехода, а J е Жордановата ф-ма на матрицата A , то общото решение (2) на (1) добива вида

$$(3) \quad x(t) = T e^{Jt} T^{-1} x_0$$

$$= T e^{Jt} C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{в.р} \\ \text{слож} \\ \text{инте} \\ \text{рал} \\ \text{ни} \\ \text{const} \end{array}$$

Как се счита e^{Jt}

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = E + J \cdot t + \frac{J^2 t^2}{2!} + \frac{J^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{J^n t^n}{n!}$$

1. J е квадратна

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$f(\lambda_i)$

Тогава

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda_1^n t^n}{n!} \\ \vdots \\ 1 + \lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_n^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda_n^n t^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

0

$f(\lambda_n)$

$$e^{JT} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

(В този случай T е изградена от собствените вектори) на A (съответстващи на собствени числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$)

$$2. \quad J = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}}_k \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}} \right\}^k \text{ нилпотентна}$$

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}}_k \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}} \right\}^k$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^k = 0$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} \\ & & & 1 & \dots & \frac{t^{k-4}}{(k-4)!} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Под Жорданова клетка от ред k , отговаряща на собствено число λ се разбира k на k матрицата

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

k

Използваме следния факт

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad (\Rightarrow) \quad A \cdot B = B \cdot A \quad (\text{унр.})$$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_D$$

Доказва се, че $BD = DB$
 Тогава ~~нейната~~

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{(B+D)t} = e^{Bt} \cdot e^{Dt} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \\ & & 1 & t & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \\ & & 1 & t & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

4) Под Жорданова матрица J от ред n се разбира блокно-диагонална матрица с блокове, изградени от жорданови клетки

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

$J_{n_j}(\lambda_j)$ са Жорданови клетки от

ред n_j ,
отговарящи на
собствено число λ_j .

В общо положение ~~те~~ λ -те не са различни, но

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & 0 \\ & \boxed{\lambda_1} & \\ 0 & & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$$J_1(\lambda_1)$$

$$J_2(\lambda_1)$$

$$J_1(\lambda_2)$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right)$$

$J_2(\lambda_1)$
 $J_1(\lambda_1)$

Формула, даваща брой на Жордановите клетки, изграждащи Жордановата матрица, отговарящи на едно и също собствено число

$$p(\lambda) = n - \tau(A - \lambda E)$$

брой

бр. собств. вектори

$$N_p(\lambda) = \tau(A - \lambda E)^{p-1} - 2\tau(A - \lambda E)^p + \tau(A - \lambda E)^{p+1}$$

брой
Ж.клет.

едни и
същи p

ред, отговарящи
на едно λ
собствено число

$$e^{JT} = \left(\begin{array}{c|c} e^{J_{n_1}(\lambda_1)t} & \\ \hline & e^{J_{n_2}(\lambda_2)t} \end{array} \right)$$

$$e^{J_{n_k}(\lambda_k)t}$$

Пример:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$e^{Jt} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{J_2(0)t} & & & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ 0 & & & \hline & e^{J_1(0)} & \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & 1 \end{array} \right)$$

Жордановата форма на матрицата A изцяло зависи от собствените числа на A и от ранга на оператора $A - \lambda E$, където λ е собственото число на A .

Пример: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Намиране

собственик числа, т.е. кор.
на хар. у-е $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & & \\ 1 & 0 & & \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda) + 1 + 3(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda) \left((1-\lambda)(4-\lambda) + 3 \right) + 1 =$$

$$= (1-\lambda) (4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 3) + 1 =$$

$$= (1-\lambda) (7 - 5\lambda + \lambda^2) + 1 =$$

$$= 7 - 5\lambda + \cancel{\lambda^2} - 7\lambda + \cancel{5\lambda^2} - \cancel{\lambda^3} + 1 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

	-1	6	-12	8
1	-1	5	-7	0
2	-1	4	-4	0

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) &= \\
 &= -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \\
 &= -(\lambda - 2)^3
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mathbb{C}} = \rho(2) &= n - \tau(A - 2E) = \\
 &= 3 - \tau \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
 &= 3 - 2 = 1
 \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_3(2)$$

Как се изгражда матрица на прехода T ?

Нека $J_k(\lambda)$ е Жорданова клетка от ред k , отговаряща на собствено число λ . На нея ѝ съответства в матрицата T k -мерно пространство от вектори $h_1, h_2, \dots, h_k$, за които е изпълнено

приведенни вектори

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1: (A - \lambda E) h_1 = 0 \text{ - собствен в.р} \\ h_2: (A - \lambda E) h_2 = h_1 \text{ - приведен в.р} \\ h_3: (A - \lambda E) h_3 = h_2 \\ \vdots \\ h_k: (A - \lambda E) h_k = h_{k-1} \end{array} \right.$$

На λ Жорданова клетка

$J_{h_j}(\lambda_j)$ в J се прави

такова съответствие от вектори в T .

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array} \right)$$

Клетка заповиса със собствен в.р

$$T = (h_1 h_2 h_3)$$

$$h_1 = (A - \lambda E) h_1 = 0 \text{ собствен}$$

$$h_2: (A - \lambda E) h_2 = h_1$$

$$h_3: (A - \lambda E) h_3 = h_2 \text{ собствен}$$

h1 Hh3

Задача:

Решете системата

$$\dot{x} = Ax, \text{ където}$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = T e^{JT} C$$

J: Намиране на собствени
числа на A:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2-\lambda & -1 & 1 & 2-\lambda & -1 & \\ 1 & 2-\lambda & -1 & 1 & 2-\lambda & \\ 1 & -1 & 2-\lambda & 1 & -1 & \end{array} \right|$$

$$= (2-\lambda)^3 + \cancel{1} - \cancel{1} - (2-\lambda)$$

$$= \cancel{(2-\lambda)} + \cancel{(2-\lambda)}$$

$$(2-\lambda) ((2-\lambda)^2 - 1) =$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) =$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 3\end{aligned}$$

В този случай J е диагонална матрица и е равна

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Нейната експонента

$$\begin{aligned}e^{Jt} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}: (h_1, h_2, h_3):$$

$$h_1: (A - \lambda_1 E)h_1 = 0 (=)$$

$$(A - E)h_1 = 0$$

$$h_2: (A - \lambda_2 E)h_2 = 0 (=)$$

$$(A - 2E)h_2 = 0$$

$$h_3: (A - \kappa_3 E)h_3 = 0$$

$$\Rightarrow (A - 3E)h_3 = 0$$

$$h = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$h_1: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$~~

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$$

χ_{CP}
=

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -b + c = 0 \\ a - c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c$$

$$h_2: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_3: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$-a - b + c = 0$$

$$b = 0$$

$$a - b - c = 0$$

$$a = c$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

в $\mathbb{R}$ не
разреша
ется))

$$x(t) = T e^{Jt} \cdot c =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 (4-\lambda) + 1 + 1 - (2-\lambda) - (4-\lambda) + 2-\lambda =$$

$$= (4-\lambda) ((2-\lambda)^2 - 1) + 2 =$$

$$= (4-\lambda) (4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) + 2 =$$

$$= (4-\lambda) (3 - 4\lambda + \lambda^2) + 2 =$$

$$= 12 - 16\lambda + 4\lambda^2 - 3\lambda + 4\lambda^2 - \cancel{12} + 2 =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 14$$

	1	8	-19	14
1	1	8	-10	-
2	1	10	1	
4	1	15		
-2	1	6		

$$(2-\lambda)(\lambda-3)^2$$

Следовательно $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$
 $\lambda_3 = 2$ - одна клетка

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rho(3) &= 3 - \text{rank}(A - 3E) = \\ &= 3 - \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2$
 Жордановы
 клетки

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{JT} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$T = (h_1, h_2, h_3)$$

$$h_1: (A - 3E)h_2 = 0$$

$$h_2: (A - 3E)h_2 = 0$$

$$h_3: (A - 2E)h_3 = 0$$

$$\begin{matrix} h_1: \\ h_2: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$a - b - c = 0$$

$$(1, 1, 0)$$

~~$$(1, 1, 0)$$~~

$$(1, 0, 1)$$

$$h_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$2a - b - c = 0$$

$$\begin{matrix} a = c \\ a = b \end{matrix}$$

$$(1, 1, 1)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$x(t) = \Gamma \cdot e^{Jt} \cdot C =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 0 & -1 \end{array} \right| =$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 1 + (1-\lambda) + 2-\lambda =$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 1 + 1 - \lambda + 2 - \lambda =$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 2(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda) + 2) =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2+2) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+4) =$$

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)^2 (2-\lambda) - 1 - 1 + \lambda + 2 - \lambda = \\ & = (1-\lambda)^2 (2-\lambda) \end{aligned}$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\chi(1) = \det 3 - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$e^{Jt} = \left(\begin{array}{cc|c} e^t & t e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} \end{array} \right)$$

$$e^{Jt} = e^{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) t} =$$

$$= e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$T = (h_1, h_2, h_3)$$

$$h_1: (A - E)h_1 = 0$$

$$h_2: (A - E)h_2 = h_1$$

$$h_3: (A - 2E)h_3 = 0$$

$$h_1:$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-b + c = 0$$

$$a - c = 0$$

$$a = b = c$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-b + c = 1$$

$$a - c = 1$$

~~no~~

$$c = b + 1$$

$$a = c + 1$$

$$c = 1$$

$$b = 0$$

$$a = 2$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a - b + c = 0$$

$$a - b - c = 0$$

$$b = 0$$

$$\underline{\underline{a = c}}$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$x(t) = \Gamma e^{Jt} c =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & t e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

329.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$T = (h_1 \ h_2 \ h_3) : \begin{aligned} h_1 : (A - 2E)h_1 &= 0 \\ h_2 : (A - 2E)h_2 &= h_1 \\ h_3 : (A - 2E)h_3 &= h_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2a - b = 0$$

$$3a - b - c = 0$$

$$a - c = 0 \quad a = c$$

$$2a - b = 0$$

$$2a = b$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = 1$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2a - b = 1$$

$$3a - b - c = 2$$

$$a - c = 1 \quad a = c + 1$$

$$3(c+1) - b - c = 2$$

$$3c + 3 - b - c = 2$$

$$2c - b = -1$$

$$2a - b = 1$$

$$a = c + 1$$

$$\begin{matrix} c=0 \\ a=1 \\ b=1 \end{matrix}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

h_3 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{от } a - c = 0 \\ \Rightarrow a = c$$

~~$$2a = 8$$~~

$$2a - b = 1$$

$$c = 0$$

$$b = -1$$

$$a = 0$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$x(t) = T e^{At} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & t^2 e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

От

$$\begin{aligned} (A - \lambda E) h_1 &= 0 \\ (A - \lambda E) h_2 &= h_1 \\ (A - \lambda E) h_3 &= h_2 \end{aligned}$$

Ако умножим посл. ред отляво с $(A - \lambda E)^2$ получаваме

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)^3 h_3 &= (A - \lambda E) \overset{h_2}{(A - \lambda E) h_3} \\ &= (A - \lambda E) h_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(A - \lambda E)^3 = 0}$$

Може първо
да изберем
 h_3

$$0 \cdot h_3 = 0$$

Може да се избере
 h_3 - произволен (~~h_1~~)

(базисни вектори)

Например $h_3 = (0, 0, 1)$

и намираме

h_2, h_1 от
равенствата.

31.10.2013г.

Лекция - Хорозов

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$J = \lambda_0 E + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \Delta$$

$$e^{Jt} = e^{(\lambda_0 E + \Delta)t} = e^{\lambda_0 E t} \cdot e^{\Delta t}$$

$$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$$

Лемма : Ако $AB = BA$, тогда

$$\sum \frac{(A+B)^m}{m!} t^m = e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

$$c_m = \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j}$$

$$e^{At} \cdot e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Bt)^j}{j!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \quad C_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^k (Bt)^{m-k}}{k! (m-k)!}$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} A^k B^{m-k} t^m =$$

$$= \frac{t^m}{m!} \sum_{k=0}^m A^k B^{m-k} \binom{m}{k} =$$

$$= \frac{t^m}{m!} (A+B)^m$$

$$J \cdot A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{J_n} \end{pmatrix}$$

Th

$$C = S S S^{-1}$$

✓ може да се представи по ! на шм
с тогност до реда на клетките

$$\det(C - \lambda E) = 0$$

λ_1 - с кратност d_1

λ_k - с кратност d_k

$$e^{At} = \frac{\begin{pmatrix} \boxed{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_p t} \end{pmatrix}^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_p t} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J - E_\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

λ_0 - char. n

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad JP = \lambda_0 P$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 p_1 + 1 \cdot p_2 = \lambda_0 p_1$$

$$\lambda_0 p_2 + 1 \cdot p_3 = \lambda_0 p_2$$

$$\lambda_0 p_n = \lambda_0 p_n$$

$$\lambda_0 p_{n-1} + 1 \cdot p_n = \lambda_0 p_{n-1}$$

$$Ju^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(1)} \end{pmatrix} = \lambda_0 u_1^{(1)} + 1 \cdot u_2^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 u_1^{(1)} + 1 \cdot u_2^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_0 u_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(1)} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = SJS^{-1}$$

$$1) \det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

2) да има единствен
собствен вектор

$$AS = SJ$$

$$S = (v_1, \dots, v_n)$$

$$AS = (Av_1, \dots, Av_n)$$

$$SJ = \begin{pmatrix} \lambda_0 v_1 & \dots & \lambda_0 v_n + v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 v_1 & \lambda_0 v_2 + v_1 & \dots & \lambda_0 v_n + v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Av_1 = \lambda_0 v_1 \\ Av_2 = \lambda_0 v_2 + v_1 \\ \vdots \\ Av_n = \lambda_0 v_n + v_{n-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_2 - \text{присъеди-} \\ \text{нен} \\ \vdots \\ v_n - \text{присъеди-} \\ \text{нен} \end{array}$$

$$(A - \lambda_0 E)v_2 = v_1$$

$$v_2 - \text{присъедя} \rightarrow v_2 + \mu v_1$$

$$A = SJS^{-1}$$

$$J = (J_1, \dots, J_p)$$

$$\dot{x} = Ax \quad A = SJS^{-1}$$

✶

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}$$

$$e^{Jt} = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = (p_1, \dots, p_n)$$

$$x(t) = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= (p_1 \dots p_n) e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & t \\ & & & 1 \end{pmatrix} S^{-1} c$$

$$S^{-1} c = k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$= e^{\lambda_0 t} \left(p_1, t p_1 + p_2, \frac{t^2}{2!} p_1 + t p_2 + p_3, \dots \right)$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} p_1 + \dots + t p_{n-1} + p_n$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$e^{\lambda_0 t} \left[k_1 p_1 + k_2 (t p_1 + p_2) + \dots \dots + k_n \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} p_1 + \dots + p_n \right) \right]$$

$$A = S J S^{-1}$$

$$J = \begin{pmatrix} \underline{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{J_p} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_p t} \end{pmatrix}$$

$$AS = SJ$$

$$A p_{1,1} = \lambda_1 p_{1,1}$$

$$A p_{1,2} = \lambda_1 p_{1,2} + \boxed{} p_{1,1}$$

$\vdots$

$$A p_{1,d_1} = \lambda_1 p_{1,d_1} + p_{1,d_1-1}$$

за $\overline{I}$
клетка

$$x(t) = \sum_{j=1}^p e^{\lambda_j t} \left(k_{j1} p_{1,1} \dots k_{jd_j} \left(\frac{t^{d_j-1}}{(d_j-1)!} p_1 + \dots + p_n \right) \right)$$

Th за спектрално разлагане

$$A \in \mathbb{C}^n$$

λ_1 с кратност d_1

$$\vdots$$
$$\lambda_p - - - - - d_p$$

$$V_1 = \{x: (A - \lambda_1 E)^z x = 0, z = 1, \dots\}$$

$$\vdots$$
$$V_p = \{x: (A - \lambda_p E)^z x = 0, z = 1, \dots\}$$

Лема 1 V_j е лин. подпространство на $\mathbb{C}^n$

$$x, y \in V_j$$

$$(A - \lambda_j E)^{\tau_1} x = 0$$

$$(A - \lambda_j E)^{\tau_2} y = 0$$

$$\tau_1 \geq \tau_2$$

$$(A - \lambda_j E)^{\tau_1} y = 0$$

$\implies$

$$\Rightarrow (A - \lambda_j E)^{\tau_1} (x + y) = 0$$

$$V_{j1} = \{x: (A - \lambda_j E)x = 0\}$$

$$V_{j2} = \{x: (A - \lambda_j E)^2 x = 0\}$$

$$V_{j_k} = \{x: (A - \lambda_{j_k} E)^k = 0, x \neq 0\}$$

$$V_{j_1} \subset V_{j_2} \subset \dots \subset V_{j_k} \subset \dots$$

р. не перетинаються
регіону
кр. зрост

Th (сп. разн)

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^p V_j$$

$$x \in \mathbb{C}^n, \exists v_1, \dots, v_n \text{ по! нашім}$$

$$x = v_1 + \dots + v_n$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$x^0 \in \mathbb{C}^n$$

$$x(t) =$$

$$x(0) = x^0$$

$$x^0 = v_1^0 + \dots + v_p^0$$

$$v_j^0 \in V_j$$

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)$$

$$\varphi_j(0) = v_j^0$$

решения

Тоді

$$x(t) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(t)$$

$$x(0) = \sum \psi_j(0) = \sum \psi_j^0 = x^0$$

$$\dot{x} = \sum \dot{\psi}_j = \sum A \psi_j =$$

$$= A \sum \psi_j = Ax$$

$$V_j = V = \left\{ x: (A - \lambda_j E)^r x = 0 \right\}$$

1) Нека $x^{(1)} \in V_{j,1} \Rightarrow$

$$(A - \lambda_j E)^1 x^{(1)} = 0$$

$$\psi(t) =$$

$$\psi(0) = x_1^{(1)}$$

$$\psi = e^{\lambda_j t} x^{(1)}$$

Д-во: $\frac{d}{dt} \psi = \frac{d}{dt} (e^{\lambda_j t} x^{(1)}) =$

$$= \lambda_j e^{\lambda_j t} x^{(1)} =$$

$$= e^{\lambda_j t} (\lambda_j x^{(1)}) = e^{\lambda_j t} A x^{(1)} =$$

$$A x^{(1)} = \lambda_j x^{(1)} = A e^{\lambda_j t} x^{(1)} =$$

$$= A \psi$$

Квантова теория на полето

Акад. Иван Тодоров