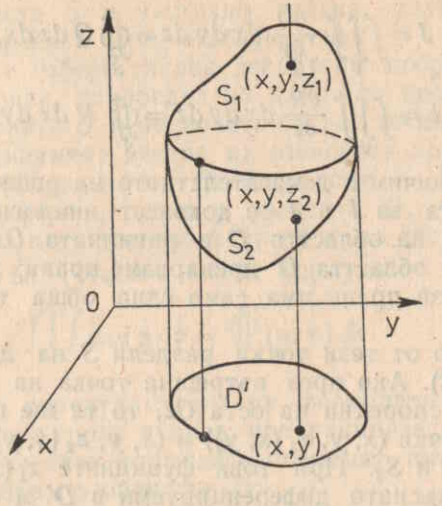


Фиг. 6. 2

интеграла в лявата страна ще получим интеграл върху D, а в дясната страна поради това, че външните нормали към границите на подобластите D_i в точки, принадлежащи на границите на две такива подобласти, са противно насочени, интегралите по повърхнините, които са общи части от границите на две подобласти, имат сума нула. Следователно остават само интеграли по повърхнини, които са части от границите на D_i и които имат обединение точно границата S на областта D.

Забележка 2. Във формулировката на теорема 6.2 можем да се откажем от изискването на условието 2) и да смятаме, че повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, затворена и без особени точки. Доказателството на теоремата в този случай е по-сложно.

Забележка 3. Можем да смятаме, че векторното поле a съществува в $D \cup S = \bar{D}$ и е непрекъснато диференцируемо само в отворената област D. Тогава тройният интеграл във формула (6.26) трябва да се разбира като несобствен.

Забележка 4. Формулата на Остроградски — Гаус може да се запише, както това следва от доказателството, във вида

(6.26′)
$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$=\oiint_S (P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy).$$

Ще отбележим, че интегралите в лявата и дясната страна имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се менят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се уверим в това, е достатъчно да направим разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

3. Формула на Стокс. Нека S е едносвързана повърхнина в E^3 (т. е. всяка частично гладка затворена крива без точки на самопресичане, която лежи в S, огражда множество от S, хомеоморфно на кръг), удовлетворяваща следните условия:

1) повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, без особени точки и има граница затворен частично гладък контур C;

2) може да се избере декартова координатна система такава, че S се проектира еднозначно върху всяка от координатните равнини.

Нека $\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата към S, $\mathbf{t}$ — единичният вектор, допирателен към C, съгласуван с $\mathbf{n}$ (вж. т. 1 на този параграф).

В сила е следната теорема.

Теорема 6.3 (формула на Стокс). Нека $\mathbf{a}$ е векторно поле, непрекъснато диференцируемо в околност на повърхнината S (т. е. в отворено множество, от E^3, съдържащо S). Тогава е изпълнена формулата

(6.27)
$$\oiint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\,ds=\oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl.$$

Теорема 6.3 допуска и такава формулировка: потокът на вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ през повърхнината S е равен на циркулацията на вектора $\mathbf{a}$ по затворения контур C.

Доказателство. При условията на теоремата интегралите във формула (6.27) имат смисъл. Формула (6.27) очевидно е инвариантна относно избора на базис. Да изберем правоъгълна декартова координатна система $Oxyz$ такава, че S се проектира еднозначно върху трите координатни равнини. Нека

$$\mathbf{a}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k},\quad \mathbf{n}=(\cos X,\ \cos Y,\ \cos Z),$$
$$\mathbf{t}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

Ориентираме координатната система така, че нормалният вектор $\mathbf{n}$ да образува остри ъгли с координатните оси.

Използувайки израза за $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ спрямо декартова правоъгълна координатна система, можем да запишем:

$$\oiint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\, ds =$$

$$(6.27') \quad = \oiint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z \right\} ds$$

$$= \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl = \oint_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dl = \oint_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Очевидно достатъчно е да докажем, че

$$I = \oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right) ds = \oint_C P\,dx.$$

Доказателството за останалите събираеми:

$$J = \oiint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos X\right) ds = \oint_S Q\,dy,$$

$$L = \oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos X - \frac{\partial R}{\partial x}\cos Y\right) ds = \oint_C R\,dz,$$

е аналогично.

Ще отбележим, че S е частично гладка и се проектира еднозначно в Oxy. Нека D е нейната проекция, а Γ — проекцията на C в равнината Oxy (вж. фиг. 6.3). Поради това S се задава с уравнение от вида $z = z(x, y)$, където $z(x, y)$ е диференцируема функция. Имаме

$$\cos Y = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & z'_x \\ 0 & z'_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}.$$

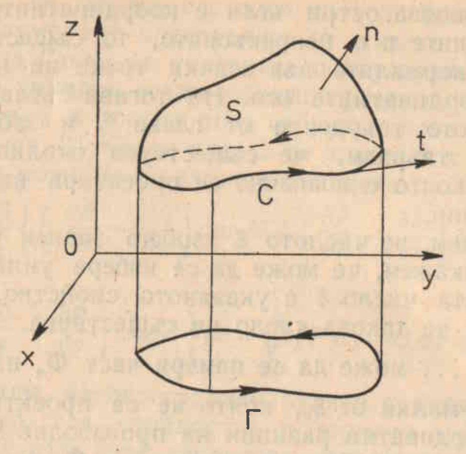
Аналогично $\cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}.$

Тогава, вземайки предвид тези формули. получаваме

$$I = -\oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\, ds$$

$$= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\Big[P(x, y, z(x, y)) \Big]\, dx\, dy,$$

понеже върху повърхнината S функцията $P(x, y, z)$ е равна на



Фиг. 6. 3

$P(x, y, z(x, y))$ и $\dfrac{\partial P}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}$, а интегралът по повърхнината S е равен на двоен интеграл върху D.

Сега, като използуваме формулата на Грийн, имаме

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\Big[P(x, y, z(x, y)) \Big]\, dx\, dy = \oint_\Gamma P(x, y, z(x, y))\, dx = \oint_C P(x,y,z)\, dx.$$

Тук използувахме, че ако една точка (x, y) лежи на кривата Γ, то точката $(x, y, z(x, y))$ очевидно принадлежи на кривата C. Теоремата е доказана.

Формулата на Стокс е вярна и за по-общи ограничени, пълни, частично гладки, двустранни повърхнини с частично гладка граница.

Забележка 1. Преди всичко ще покажем, че формулата на Стокс е в сила за повърхнини S, които удовлетворяват условието 1), но, изобщо казано, не удовлетворяват условието 2) за еднозначно проектиране на S във всяка от координатните равнини.

Оказва се, че съществува число $\delta > 0$ такова, че за всяка част Φ на повърхнината S с размери, по-малки от δ*, може да се избере координатна система такава, че Φ се проектира еднозначно във всички координатни равнини. Наистина нека M_0 е фиксирана точка от S. Прекарваме допирателната равнина през точката M_0 и нека $\mathbf{n}_{M_0}$ е единичен нормален вектор към повърхнината в точката M_0. Избираме координатна правоъгълна система такава, че

* Такава част от повърхнината се съдържа в кълбо с радиус δ.

векторът $\mathbf{n}_{M_0}$ сключва остри ъгли с координатните оси. Понеже полето от нормалите $\mathbf{n}$ е непрекъснато, то съществува околност на точката M_0, нормалите във всички точки на която сключват остри ъгли с координатните оси. Но тогава съгласно доказателството на първото твърдение от глава 5 и забележка 2 към него можем да твърдим, че съществува околност на точката M_0 с радиус δ, която еднозначно се проектира върху всички координатни равнини.

Ще подчертаем, че числото δ изобщо зависи от точката M_0: $\delta=\delta(M_0)$. Ще докажем, че може да се избере универсално, независещо от точката число δ с указаното свойство. Да допуснем противното, т. е. че такова число не съществува. Тогава за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, може да се намери част Φ_n на повърхнината S с размери, по-малки от δ_n, която не се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на произволна декартова координатна система. Избираме във всяка част Φ_n по една точка M_n и от получената редица избираме подредица, клоняща към точка M от повърхнината S. Съгласно предишните разглеждания съществува околност на точката M, която се проектира еднозначно в координатните равнини на подходящо избрана правоъгълна координатна система. Но тази околност за някой номер n съдържа частта Φ_n от S, която поради това също ще се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на координатната система. Получи се противоречие с избора на Φ_n, което и трябваше да се докаже.

Сега вече не е трудно да заключим, че формулата на Стокс е вярна за повърхнини, които удовлетворяват условието 1), но не удовлетворяват в общия случай условието 2). За тази цел ще раздробим повърхнината S на краен брой гладки части Φ_n с размери, по-малки от указаното по-горе число δ. Формулата на Стокс е вярна за всяка от частите Φ_n, понеже Φ_n се проектира еднозначно върху всички координатни равнини на подходяща декартова координатна система. Сумираме левите и десните страни на получените формули. Интегралите по общите участъци от границите на частите Φ_n се вземат в противоположни посоки и поради това се унищожават. По тази причина отляво ще получим интеграл по повърхнината S от величината $(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$, а отдясно — интеграл по границата C на повърхнината S от величината $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, т. е. формулата на Стокс за разглежданата повърхнина от по-общ вид.

Забележка 2. Формулата на Стокс е вярна и за повърхнини S, които с помощта на частично гладки криви могат да се раздробят на краен брой едносвързани повърхнини, удовлетворяващи условието 1). Доказателството на този факт е очевидно: достатъчно е да сумираме интегралите от лявата и дясната страна на формулите на Стокс за указаните повърхнини и да отчетем, че интегралите по кривите, осъществяващи раздробяването, се вземат в различни посоки и поради това се унищожават.

Забележка 3. Както следва от доказателството, формулата на Стокс (6.27) може да се запише във вида (6.27′)

$$\oint\limits_S\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y\right. \tag{6.27'}$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\right\}ds=\oint\limits_C(P\,dx+Q\,dy+R\,dz).$$

Ще отбележим, че интегралите отляво и отдясно имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се променят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се убедим в това, е достатъчно да проведем разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

§ 4. Условия за независимост на криволинейния интеграл в равнината от пътя на интегриране

Нека $\mathbf{a}(M)$ е векторно поле, дефинирано в свързана област D в равнината.

Определение 1. Функцията $U(M)$ се нарича потенциал на полето $\mathbf{a}(M)$ в областта D, ако в тази област

$$\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad}U(M).$$

Поле $\mathbf{a}$, което притежава потенциал, се нарича потенциално поле.

Теорема 6.4. Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ са непрекъснати в D. Стойността на интеграла

$$\int\limits_{\widetilde{AB}}P\,dx+Q\,dy$$

за произволни точки $A\in D$, $B\in D$ не зависи от частично гладката крива $\widetilde{AB}\subset D$, съединяваща точките A и B, тогава и само тогава, когато полето

G при локално хомеоморфно изображение f на областта G в пространството E^3.

По-нататък под **околност на точката** M **от повърхнината** Φ ще разбираме подмножеството от точки на Φ, принадлежащи на околност на точката M в E^3.

Да разгледаме един пример. Нека G е проста област в равнината Oxy (например кръг), (x, y) са координатите на точката $M \in G$, $z=z(M)$ е непрекъсната функция в G, а G^* е графиката на тази функция. Очевидно изображението f на областта G върху G^*, зададено с равенствата

$$x=u, \quad y=v, \quad z=z(u, v),$$

е хомеоморфно изображение на тази област върху множеството G^*, а $\Phi=G^*$ е повърхнина.

Нека в равнината (u, v) е дадена проста област G и за всички точки от тази област са дефинирани три функции

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \tag{5.1}$$

или, което е същото, една векторна функция

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v), \tag{5.1*}$$

където $\mathbf{r}(u, v)$ е вектор с компоненти $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Ще смятаме, че са изпълнени следните две условия А:

1) функциите (5.1) имат непрекъснати частни производни от първи ред в областта G;

2) навсякъде в областта G матрицата

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

има ранг, равен на две.

Ще докажем, че *ако са изпълнени тези две условия А, то множеството* Φ *от точки, определени от уравненията* (5.1), *е повърхнина,* т.е. то е област на равнинна област G при локално хомеоморфно изображение от G в E^3.

Нека $N_0(u_0, v_0)$ е произволна точка от G. Ясно е, че малка околност на тази точка се изобразява в малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$ (за това е достатъчно функциите (5.1) да са непрекъснати в G, което е изпълнено в нашия случай).

Очевидно, ако $N_n(u_n, v_n)$ е фундаментална редица от точки в малка околност на точката N_0, то редицата от образите на тези точки $M_n(x_n, y_n, z_n)$, където $x_n=x(N_n)$, $y_n=y(N_n)$, $z_n=z(N_n)$,

е също фундаментална във Φ: това следва непосредствено от непрекъснатостта на функциите (5.1); например разликата $|x_{n+p}-x_n| = |x(N_{n+p})-x(N_n)|$ може да бъде направена по-малка от произволно число $\varepsilon>0$ при $\rho(N_{n+p}, N)<\delta=\delta(\varepsilon)$.

Остава да се докаже, че при изображението, определено от уравненията (5.1), на всяка точка от множеството Φ от достатъчно малка околност на точката M_0 съответствува определена точка от малка околност на точката N_0 в областта G, при това на всяка сходяща редица от точки $\{M_n\}$ от тази околност на точката M_0 съответствува сходяща редица $\{N_n\}$ от точки на G.

Тъй като във всяка точка $N_0(u_0, v_0) \in G$ рангът на матрицата (5.2) е равен на две, то в тази точка е различен от нула поне един минор от втори ред на матрицата (5.2).

Нека този минор е

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{в точката } N_0.$$

След като обединим това условие с първото условие от двете условия А, получаваме, че за системата

$$\begin{cases} x(u, v)-x=0 \\ y(u, v)-y=0 \end{cases} \tag{5.3}$$

в околност на точката M_0 са изпълнени всички условия на теоремата за обратната функция (вж. § 2, глава 14 на първа част). Затова системата (5.3) има в околност на точката M_0 единствено непрекъснато и диференцируемо решение

$$\begin{cases} u=u(x, y) \\ v=v(x, y) \end{cases}. \tag{5.4}$$

Това означава, че съществува хомеоморфно изображение на малка околност на точката $N_0 \in G$ върху малка околност на точката $P_0(x, y)$ от равнината Oxy. (В едната посока това изображение се задава с непрекъснатите функции (5.4), а в другата — с първите две равенства на (5.1), в които функциите $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ са също непрекъснати; непрекъснатостта и на едните, и на другите функции осигурява изобразяването на сходяща редица от околността на едната от точките N_0 или P_0 в сходяща редица в околност на другата от тези точки.)

Като заместим функциите (5.4) в третата функция на (5.1), получаваме непрекъсната в околност на точката функция

$$z=z(u(x, y), v(x, y))=\varphi(x, y). \tag{5.5}$$

Тази функция осъществява хомеоморфно изображение на малка околност на точката $P_0(x_0, y_0)$ от равнината Oxy върху малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$. Може да се каже, че (5.5) представя Ф в малка околност на точката M_0 като графика на функция на x, y.

Тъй като суперпозиция на хомеоморфни изображения е също хомеоморфно изображение, то изображението на малка околност на точката $N_0 \in G$ върху малка околност на точката $M_0 \in \Phi$ е хомеоморфно.

От това множество от точки Ф, определено от уравненията (5.1), е повърхнина, ако са изпълнени двете условия А.

Забележка 1. Повърхнината Ф, определена от уравненията (5.1), е прието да се нарича **гладка**, когато е изпълнено първото от двете условия А, а когато е изпълнено второто от условията А — **повърхнина без особени точки.**

И така може да се каже, че повърхнината Ф, определена от уравненията (5.1) при изпълнени и двете условия А, е гладка и няма особени точки.

Забележка 2. Между другото установихме, че всяка гладка и без особени точки повърхнина в достатъчно малка околност на всяка от своите точки може еднозначно да се проектира на поне една от трите координатни равнини.

Да разгледаме повърхнината Ф, определена от уравненията (5.1), за които са изпълнени двете условия А.

След като запишем уравненията (5.1) във векторния вид (5.1*), да видим какъв е геометричният смисъл на векторната функция $\mathbf{r}(u, v)$. Ако фиксираме някоя стойност на $v=v_0=\text{const}$ от областта G, то уравнението $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v_0)$ ще определя крива върху повърхнината Ф, наричана **координатна линия**, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$ ще се допира до тази линия. Аналогично при $u=u_0=\text{const}$ уравнението $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0, v)$ ще определя друга координатна линия, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v)$ ще се допира до нея. През точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$, ще минават и двете координатни линии.

Второто от условията А, т. е. условието за липса на особени точки, изисква рангът на матрицата (5.2) да бъде равен на две. Това означава, че векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$, координатите на които съставят редовете на матрицата (5.2), са линейно независими, т. е. неколинеарни, и следователно определят равнина, която е **допирателна равнина** на повърхнината Ф в точката M_0. Вектор, който е перпендикулярен към тази допирателна равнина, се нарича **нормален вектор** (или **нормала**) на повърхнината Ф в точката M_0. Такъв вектор може да се определи като векторно произведение на векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Така векторът

$$\mathbf{n} = \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|} \tag{5.6}$$

е **единичен нормален вектор** към повърхнината Ф. По силата на условията, наложени на функциите (5.1), този вектор е непрекъснат по u и v в някаква околност на произволна точка от повърхнината, т. е. *в околността на всяка точка от гладка повърхнина без особени точки съществува непрекъснато векторно поле от нормали.*

Изобщо върху цялата повърхнина такова непрекъснато векторно поле от нормали може и да не съществува.

Пример. **Лист на Мьобиус.** Ако залепим правоъгълника $ABB'A'$ така, че A да съвпада с B' и B да съвпада с A', то ще се получи повърхнина, която се нарича **лист на Мьобиус***. След като направи една обиколка, нормалата сменя посоката си с противоположната (вж. фиг. 5.1).

Ще разглеждаме само такива повърхнини Ф, за които съществува непрекъснато векторно поле от нормали върху цялата повърхнина. Прието е такива повърхнини да се наричат **двустранни.**

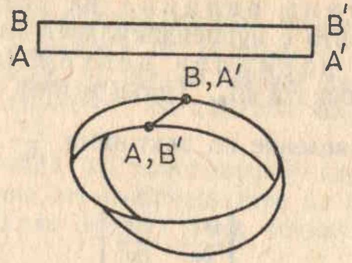
Повърхнината Ф се нарича **пълна**, ако всяка фундаментална редица от точки от тази повърхнина има за граница точка от тази повърхнина.

Повърхнината Ф се нарича **ограничена**, ако съществува тримерно кълбо, съдържащо всички точки от тази повърхнина.

Примери за пълни повърхнини са равнината, сферата, елипсоидът, простият хиперболоид. При това сферата и елипсоидът са ограничени повърхнини. Кръгът без границата си, както и всяко отворено свързано множество върху сферата (което не съвпада с цялата сфера) не са пълни повърхнини.

По-нататък ще разглеждаме повърхнина Ф, определена от уравненията (5.1), която притежава следните пет свойства: 1) гладка; 2) без особени точки; 3) двустранна: 4) пълна и 5) ограничена.

* А. Мьобиус — немски математик (1790—1868).



Фиг. 5. 1

2. Помощни леми

Лема 1. *Ако Φ е гладка повърхнина и M_0 е нейна неособена точка, то достатъчно малка околност на точката M_0 еднозначно се проектира върху допирателната равнина за която и да е точка от тази околност.*

Доказателство. Нека околността $\hat{\Phi}$ на точката M_0 е такава, че 1) нормалата във всяка точка от тази околност сключва с нормалата в точката M_0 ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{4}$; 2) околността $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху някакъв кръг в една от координатните равнини (например Oxy). Възможността за избора на такава околност $\hat{\Phi}$ следва от установеното в предната точка съществуване на околност на разглежданата точка със следните две свойства: 1) в тази околност съществува непрекъснато векторно поле от нормали; 2) тази околност еднозначно се проектира върху една от координатните равнини (очевидно има част от тази околност, която се проектира върху някакъв кръг в координатната равнина).

Ще отбележим, че кои да е две нормали от непрекъснатото векторно поле в точки от $\hat{\Phi}$ сключват ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{2}$.

Да допуснем, че разглежданата околност $\hat{\Phi}$ не се проектира еднозначно върху допирателната равнина в някоя точка $M \in \hat{\Phi}$. Тогава в тази околност ще има две точки P и Q такива, че хордата PQ ще е успоредна на нормалата на Φ в точката M. Да разгледаме линията, получена от пресичането на $\hat{\Phi}$ с равнината, успоредна на оста Oz и минаваща през хордата PQ (предполагаме, че $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху равнината Oxy). Върху тази линия според теоремата на Лагранж може да се намери точка N, допирателната в която е успоредна на хордата PQ, а от това е успоредна и на нормалата в точката M. Това означава, че нормалите в точките M и N сключват ъгъл $\frac{\pi}{2}$, което противоречи на избора на $\hat{\Phi}$. Полученото противоречие ни убеждава във верността на лемата. Лемата е доказана.

Ще казваме, че част от повърхнина има размери, по-малки от δ ($\delta>0$), ако тази част е във вътрешността на някакво кълбо с радиус $\delta/2$.

Лема 2. *За всяка гладка, ограничена, пълна и без особени точки повърхнина Φ може да се намери число $\delta>0$ такова, че за всяка част от Φ с размери, по-малки от δ, еднозначно се проектира а) на една от координатните равнини; б) на допирателната равнина в произволна точка от тази част.*

Доказателство. По-горе в забележка 2 и в лема 1 доказахме, че за всяка точка от повърхнината Φ може да се намери достатъчно малка околност $\hat{\Phi}$, която еднозначно се проектира а) на една от координатните равнини; б) на допирателната равнина в произволна точка от $\hat{\Phi}$.

Да допуснем, че твърдението на лемата не е вярно, т. е. не може да се намери числото $\delta>0$ от формулировката на лемата. Тогава за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \ldots$) ще се намери част $\hat{\Phi}_n$ с размери, по-малки от δ_n, и такава, че не се проектира еднозначно на никоя от координатните равнини или на допирателната равнина в някоя точка $M_n \in \hat{\Phi}_n$. Да изберем във всяка част $\hat{\Phi}_n$ точка $\hat{M}_n$ и да изберем от редицата $\{\hat{M}_n\}$ от точки от ограничената и пълна повърхнина Φ подредица $\{M_{k_n}\}$, която има за граница някоя точка $M_0 \in \Phi$.

От забележка 2 и лема 1 имаме, че може да се намери достатъчно малка околност $\hat{\Phi}$ на точката M_0, която еднозначно се проектира върху една от координатните равнини и върху допирателната равнина в произволна точка от $\hat{\Phi}$. Всички $\hat{\Phi}_{k_n}$, започвайки от някакъв номер k_n, ще бъдат вътре във $\hat{\Phi}$, а това противоречи на избора на частите $\hat{\Phi}_n$. Лемата е доказана.

Лема 3. *Нека Φ е гладка, без особени точки, двустранна, пълна, ограничена повърхнина, определена от уравненията (5.1). Тогава за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за всяка част от повърхнината Φ с размери, по-малки от δ, ъгълът γ между нормалите в кои да е две точки от тази част удовлетворява условието*

$$\cos\gamma = 1-\alpha, \tag{5.7}$$

където

$$0 \le \alpha < \varepsilon.$$