

① Уравнения с разделящи се променливи и хомогенни уравнения

дифференциално уравнение от вида

$y' = f(x) \cdot g(y)$ $f \in C(a,b)$ $g \in C(c,d)$ се нарича уравнение с разделящи се променливи

Ако е дадено допълнително условие за функцията y от вида

$$y(x_0) = y_0 \quad x_0 \in (a,b), y_0 \in (c,d)$$

казваме че е зададена на Коши.

(Да се намери решението на задачите удовлетворяващи условието)

Теорема: Ако $g(y) \neq 0$ в (c,d) , тогава F' реш. на задачите на Коши което е дефинирано в достатъчно малка околност на x_0 .

Доказ. За допускери, че задачите на Коши има решение $y = \varphi(x)$

$$\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$$

и получаваме

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$$

интегрираме в граници x_0, x

$$\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

x в този околност
дерив на $g(\varphi(x))$
при $g(\varphi(x)) \neq 0$

сменяме променливата

полагая $\varphi(t) = t$

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{x_0}^x \frac{d\tau}{g(\tau)}$$

~~Def~~ $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in (a, b)$

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\tau)} d\tau \quad y \in (c, d)$$

$$G(\varphi(x)) = F(x) \quad ? G^{-1} \exists$$

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$$

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)}$$

$$g(y) \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} g > 0 \\ g < 0 \end{matrix} \Rightarrow \exists G^{-1}$$

$$G^{-1}(y) \quad \forall y \in (c, d)$$

$$F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = 0$$

$$G(y_0) = \int_{y_0}^{y_0} \frac{1}{g(\tau)} d\tau = 0$$

G^{-1} — непрерывна в окрестности y_0
 $\Rightarrow$ гом. непрерывность.

дока. $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$ — решение?

$$G(\varphi(x)) = F(x) \quad \varphi'(x) = F'(x)$$

$$\frac{1}{g(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x) = f(x)$$

$$\varphi'(x) = f(x) g(\varphi(x))$$

$$\varphi(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$$

$\Rightarrow \varphi(x) = G^{-1}(F(x))$ — решение
 $\Rightarrow$ гом. существование.

Теорема: Нека е дадена задачата на Коши

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \text{ където } f \in C(a, b) \quad (2)$$

$$y_0 \in C(c, d)$$

при това $x_0 \in (a, b)$ и $y_0 \in (c, d)$
 и $f(x_0) \neq 0$, тогава задачата на Коши
 има единствено решение в достотвс.
 на всяка околност на x_0

интеграл $\int_{y_0}^y \frac{dy}{f(x, y)}$, $\int_{y_0}^y \frac{dy}{f(x, y)}$ ($y_1 < y < y_2$) са разходящи.

Уравнение от вида

$$(3) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

където $a_i \in \mathbb{R}$
 наричаме хомогенно дифференциално
 уравнение.

Теорема:

Ако $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са две решения на
 хомогенното уравнение (3) в
 интервала (a, b) , то всяка тяхна
 линейна комбинация

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x),$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ също е решение на (3)

Док.: за всяко $x \in (a, b)$ имаме:

$$L(\lambda y_1 + \mu y_2)(x) = \lambda L(y_1)(x) + \mu L(y_2)(x) =$$

$$\lambda L(y_1)(x) + \mu L(y_2)(x) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \text{ изпроизводи.}$$

сче че L е линейен оператор и
~~така~~ така $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2$ е решение
на (3).

Тази теорема ни позволява да дър-
жаме, че съвкупността от реше-
нията на уравнението (3) е
линейно пространство

② Линеини уравнения от първи ред Уравнения на Бернули и Рикати.

Уравнение от вида:

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$, $a, b \in C(a, b)$ се
нарича линеино диференцирано
уравнение. от първи ред
Ако задател допълнително постави
условие за функцията y от
вида

$y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$
казвател, се е задател на Коши

Теорема: Задателта на Коши за линеиното
уравнение има единствено решение,
квото е дефинирано в целия интер-
вал (a, b) .

Доказателство: Нека $y(x)$ е решение на задателта на Коши

$$(y(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt})' = y'(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} - y(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} \cdot a(x) = b(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x (y(t) \cdot e^{-\int_{x_0}^t a(u) du})' dt = \int_{x_0}^x b(t) \cdot e^{-\int_{x_0}^t a(u) du} dt \Rightarrow$$

$$y(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} - y(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x_0} a(u) du} = \int_{x_0}^x b(t) \cdot e^{-\int_{x_0}^t a(u) du} dt \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \cdot (y_0 + \int_{x_0}^x b(t) \cdot e^{-\int_{x_0}^t a(u) du} dt)$$

$\Rightarrow$ док. единственост.

дали $y(x)$ е решение?

Ако е, то $y(x) \in C^1(\alpha, \beta)$;

иначе $y(x_0) = e^0 \cdot (y_0 + 0) = y_0$

иначе:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \cdot (y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{x_0}^t a(u) du} dt) \right)' \\ &= e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \cdot a(x) \cdot (y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{x_0}^t a(u) du} dt) + \\ &+ e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \cdot b(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} = a(x)y(x) + b(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ док. единственост. съществуване

Уравнение на Бернулси наричае ур. от вида

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$$

които $a(x)$ и $b(x)$ са функции на x а α не е 0.

Тези уравнения се интегрират чрез

$$\text{смяна на променливите } z(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

Тъзи смяна ги свежда вър линейно ур.

Уравнение на Рикати наричае всяко ур. от вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

където $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ са функции на x .

За да решиш дадено уравнение на Рикати,

трябва да откриеш по някакъв

начин поне едно негово решение, т.е.

някое известно решение.

Генерираш известно решение на ур. на Рик.

чрез порускване и "призо до вида"

на функциите $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

Някои ур. на Рик. могат нито едно известно

решение изразяващо се чрез елем. функ.

пр. $y' = y^2 - x$

③ Уравнения, произлизащи от пълен диф. интегрален рекордатор.

Уравнение от вида

$$y'(x) = - \frac{M(x, y(x))}{N(x, y(x))}, \quad N(x, y) \neq 0$$

което е равносечно на ур. в дифер.

$$(1) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

написане уравнение произлизащо от пълен диференциал. ур. тогава диференциално уравнение в Ω ако съществува функция $U \in C^1(\Omega)$, такава че $dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$

т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$$

Функцията U , която удовлетворява системата се нарича потенциал на уравнението (1) и $dU=0$ следва, че общото решение на (1) има вида

$U(x, y) = C$. т.е. траекториите на (1) са линии по които на U , потенциал на уравнението (1)

Забележка: (достатъчно условие за потенциалност)
Нека $M, N \in C^1(\Omega)$, $(M(x, y), N(x, y)) \neq (0, 0)$ и $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x, y) \in \Omega$. Тогава съществува

функция $U \in C^1(\Omega)$, за която е в сила системата и решенията на ур (1) са от вида $U(x, y) = C$

Гвержение: (необходимо условие за тотарно)

Ако $N, M \in C^1(\Omega)$ и уравнението (1) е тотарно в Ω тогава

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega$$

Ако уравнението $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ не е тотарно т.е. не е изпълнено условието $M_y = N_x$ в Ω

Функцията $\mu = \mu(x, y) \neq 0$ в Ω се нарича интегриращи фактор за ур. ако равноструно на (1) уравнение $\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0$ е тотарно т.е.

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \Leftrightarrow \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

Ще разгледаме два вида интегриращи фактори:

1. $\mu = \mu(x)$ уравнение 2 се преобразува в $\mu'(x) = \frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} \cdot \mu(x)$

Ако $(M_y(x, y) - N_x(x, y)) / N(x, y) = \varphi(x)$, то $\int \varphi(x) dx$ интегриращ фактор $\mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx}$

2. $\mu = \mu(y)$ уравнение 2 се преобразува в $\mu'(y) = \frac{N_x(x, y) - M_y(x, y)}{M(x, y)} \cdot \mu(y)$

Ако $(N_x(x, y) - M_y(x, y)) / M(x, y) = \varphi(y)$, то $\int \varphi(y) dy$ интегриращ фактор $\mu(y) = e^{\int \varphi(y) dy}$

① Теорема на Пеано. Теорема за съществуване на решението на задачата на Коши за скалярно произв.

Теорема на Пеано: ~~Нека $f(x,y)$ е функция~~ Съществува решение на задачата на Коши.

$y' = f(x,y)$ с начално условие $y(x_0) = y_0$, което е дефинирано поне в $|x - x_0| \leq h$ $h = \min(a, \frac{b}{M})$, където M е супремумът на $|f|$ в Π .

$$\Pi: \begin{cases} |x - x_0| \leq a \\ |y - y_0| \leq b \end{cases}$$

За функцията f трябва да бъде наложено по-добро ограничение, също така има и случаи, в които интервалът също трябва да се коригира.

Пример $y' = y^{2/3}$ има безброй много решения, които развалят те функцията $q(y)$ удовлетворява условието на Липшица в интервала (a, b) , ако съществува константа $E \in \mathbb{R}$, такава че за всяко $y_1, y_2 \in (a, b)$ имаме: $|q(y_1) - q(y_2)| = |q'(c)| \cdot |y_1 - y_2| \leq M \cdot |y_1 - y_2|$, където M е супремумът на $|q'|$ в (a, b) и тогава q е Липшицова функция.

Има функции на Липшица, които дори не са диференцируеми - пример:

$|y|$ в интервала $(-1, 1)$

* $y' = 1/y^2$ с решение $y_2(x+c)$ дефинирано в $(\frac{1}{2} + k\pi - c, \frac{3}{2} + k\pi - c)$ за $k \in \mathbb{Z}$.

това трябва да е наредено (първоначално ще бъде цялата реална права, а след това съставяме ил. до д.л.т. Π)

Теорема: Нека в затворена област $G = \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$ функциите f и f' са непрекъснати. Ако във в интервала $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$ съществува единствено решение на $y'(x) = f(x, y)$, удовлетворяващо условието $y(x_0) = y_0$.

При това решение до вземем $a = \min \{a, \frac{b}{M}\}$, където a и b са посочените по-горе, а M може да вземем всяко число, за което $|f| \leq M, (x, y) \in G$.

Решението на посочените задачи на Коши може да получи по следния метод на последователните приближения

$$y_0(x_0) = y_0, x$$

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{k-1}(s)) ds$$

чрез който се генерира редица от функции $\{y_k\}$ която е равномерно сходяща към единственото решение на $y'(x) = f(x, y)$

⑤ Теорема за единственост. Глобална теорема за единственост. Локална теорема за единственост. Теорема за изпускане на корените

Теорема (на Пикар)

Нека $f(x, y) \in C(\Pi)$ и $f(x, y)$ е липшицова по y , т.е. съществува константа $L \in \mathbb{R}$ за всички $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$ и при
 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$. Тогава съществува единствено решение на задачата на Коши, което е дифференцируемо поне в интервала $|x - x_0| \leq h$,
 $h = \min(\sigma, \frac{b}{L})$, където M е супремум на $|f|$ в Π .

Глобална теорема за единственост.

Нека I е интервал и нека функцията $f(x) \in C(I)$. Казваме, че f локално удовлетворява условието на Липшиц в I , ако за всяка точка $x_0 \in I$ съществува окръжност U , съдържаща x_0 , в която f удовлетворява условието на Липшиц с константа, която евентуално зависи от точката x_0 . Ясно е, че ако f има производна, която е непрекъсната в I , то в всяка коренясваща окръжност на x_0 , $f'(x)$ е $x_1, x_2 \in U$ и при:
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leq M \cdot |x_1 - x_2|$,
където M е една горна граница на $|f'(x)|$ в U .

Под максимално непродържимо решение на задачата на Коши разбираме решението, което има най-широк дефиниционен интервал. Т.е. ако такова решение съществува то е единствено. Действително ако $\varphi_1(x)$ е решение, дефинирано в Δ_1 , и $\varphi_2(x)$ е решение, дефинирано в Δ_2 , то

$$\varphi_1(x), x \in \Delta_1 \setminus \Delta_2$$

$$\text{решението } \varphi(x) = \varphi_2(x), x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), x \in \Delta_1 \cap \Delta_2$$

има по-широк дефиниционен интервал от φ_1 и φ_2 .

Теорема (за попусковете на корпактите)

Нека $\varphi(x)$ е максимално непродържимо решение на задачата на Коши в интервала на съществуване (m, m_2) .

Нека $K \subset G$ е корпакт $(x_0, y_0) \in K$.

Тогави съществува $\varepsilon > 0$, че за $x \in (m, m_1 + \varepsilon)$ и за $x \in (m_2 - \varepsilon, m_2)$ точката $(x, \varphi(x)) \notin K$.

Ако $m_1 = -\infty$ ($m_2 = +\infty$) условието за x приема вида $x < -\varepsilon$ ($x > \varepsilon$).

Нека $\varphi(x)$ е решение на ЗВ, дефинирано в $|x - x_0| \leq h$. Тогави $(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) \in G$ и

Т решение $\varphi_1(x)$, което е дефинирано в $|x - (x_0 + h)| \leq h$. Съгласно теоремата за

единственост двете решения съвпадат над общия си интервал а тогави

$$\varphi(x), x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x), x \in [x_0 + h, x_0 + h + h_1]$$

е решение на задачата на Коши с по-широк интервал откъсно. По аналогичен начин продължаваме решението откъсно и отравно, докато не стигнем границата на G . При това порижение е ясно, че когато $x \rightarrow m_1$ или $x \rightarrow m_2$, $(x, \varphi(x))$ ще краи към границата на G , т.е. ще напуски всеки отнапред зададен коридор в G .

Забележка: Ако $f(x, y)$ е дефинирана, непрекъсната и ограничена в $\mathbb{R}^2$, f_x и f_y са непрекъснати, то за всяка точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ непрекъснато решение има дефиниционен интервал $(-\infty, \infty)$.

Забележка: ако $f(x, y)$ и $f_y(x, y)$ са дефинирани и непрекъснати в $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и за непрекъснатото решение $y(x)$ през (x_0, y_0) дефиниционен интервал (m_1, m_2) и при $m_2 < +\infty$, то правата $x = m_2$ е вертикална асимптота. Т.е. съществува точно една от

границите:

$$\lim_{x \rightarrow m_2} y(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow m_2} y(x) = -\infty$$

* Нека G е отворена област в $\mathbb{R}^2$
 $(x_0, y_0) \in G$, $f(x, y)$ е локално липши-
цова в G .

За разглеждане задават се на Коши

$$(I) y' = f(x, y)$$

$$(II) y(x_0) = y_0$$

За всяка точка (x_0, y_0) може да
издере правоъгълна област,
която се съдържа в G и в
която f е липшицова. При това
порожение от теоремата
за f през (x_0, y_0) липше поне едно
решение, дефинирано в достатъче-
но голям интервал $|x - x_0| \leq h$.

⑥ Уравнения, нерешени отгосно произв.
Теорема за редукцията. Особени
решения. Уравнения на Лагранж и
Улеро.

Разглеждаме задачата на Коши

$$F(x, y, y') = 0$$

$$y(x_0) = y_0$$

Нека функцията $F(x, y, z)$ е дефинирана и
непрекъсната в окръжност
от вида: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \varepsilon^2$ с $\mathbb{R}^3$ и
притежава непрекъснатия частна
производна отгосно z .

Ще казваме, че точката (x_0, y_0) е обикновена
за уравнението $F(x, y, y') = 0$, ако уравне-
нението $F(x_0, y_0, z)$ има само един
решение $z_1, \dots, z_k$ и за всяко $i=1, \dots, k$ имаме
 $F_z(x_0, y_0, z_i) \neq 0$.

Необикновените точки (x_0, y_0) наричаме
особени за $F(x, y, y')$. Възможно е урав-
нението $F(x, y, y')$ да има особени точки,
по които решение наричаме особено решение.

Теорема (за редукцията)

Дадени горните предположения за функцията
 F във всяка обикновена точка (x_0, y_0) F функ-
 $f_1(x, y), \dots, f_k(x, y)$, дефинирани и притежаващи
непрекъсните производни отгосно x в
окръжност на (x_0, y_0) . Тогава се задават на
Коши е еквивалентна на i задачи на Коши
от вида $y' = f_i(x, y)$
 $y(x_0) = y_0$

Условието в теоремата осигурява възможност да приложим теоремата за неявните функции, чрез която за всяко $i = 1, 2, \dots, k$ изразяваме y_i' от уравнението $F(x, y, y') = 0$ в достатъчно близка околност на (x_0, y_0, z_i) и получаваме $y_i' = f_i(x, y)$. Ако F допълнително притежава непрекъснатостта частни производни по y , по произволни функции на които е единствено решение

Уравнение на Лагранж е уравнение от вида

$$y = x f(y') + \varphi(y'), \quad f(y') + y'$$

За да намерим общото и особено решения на това уравнение, използваме прилагане

$$y' = p = p(x) \text{ - нова функция. } \Rightarrow y = x f(p) + \varphi(p)$$

диференцираме по x двете страни и получаваме

$$p = f(p) + x f'(p) p' + \varphi'(p) p', \quad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = [x f'(p) + \varphi'(p)] \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} = x'(p) = x \cdot \frac{f'(p)}{p - f(p)} + \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$$

Така, получаваме линейно обикновено ДУ от първи ред с неизвестна функция $x = x(p)$

Уравнение от вида $y = x y' + \varphi(y')$ наричаме уравнение Оне Клеро.

Аналогично прилагаме $y' = p \Rightarrow y = x p + \varphi(p)$ диференцираме двете страни по x

~~и~~ и поручаване

$$0 = [x + \varphi'(p)] p' = [x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx}$$

Разглеждаме два случая

1. $\frac{dp}{dx} = 0$, $\Rightarrow p = c$

Поручаване функцията прави линии $y = x \cdot c + \varphi(c)$
С представят особено решение на
уравнението на Клеро.

д. $x + \varphi'(p) = 0 \Rightarrow$

$$x = -\varphi'(p)$$
$$y = -\varphi'(p) p + \varphi(p)$$

Последното представява поразителен
виз С на особено решение на
уравнението на Клеро.

а) Линейни уравнения от n -ти ред.
Структура на решаването от
решения. Алгоритмична схема
от решения на хомогенното ур.
Детерминанта на Вронски

Разглеждаме уравнението:

$$(1) y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$$

написваме линейно уравнение от n -ти ред.
Предполагаме, че функциите $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала (a, b) .

Нека L е $L(y) = y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y$ е
линейен оператор в линейното пространство
на n -ти диференцируемите функции,
така че за всеки две функции y_1, y_2
имаме $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ и за
всяка функция y и константата
 $C \in \mathbb{R}$ имаме $L(Cy) = C L(y)$.

Решение на дифференциалното
уравнение в интервала (a, b)
написваме функция $\varphi(x) \in C^n(a, b)$,
така че, че $(L(\varphi))(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$.

Хомогенно уравнение

Ако $f(x) \equiv 0$, казваме се уравнението (1) е
хомогенно

Нека е дадено хомогенно уравнение

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0$$

Предполагаме, че функциите $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ са дефинирани и непрекъснати в (a, b)

Теорема: Ако $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са две решения на хомогенното уравнение

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

в интервала (a, b) , то всяко тяхно линейно комбинация $y(x) = \mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x)$ $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ също е решение.

Докажем за всяко $x \in (a, b)$ имаме:

$$(L(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2))(x) = (L(\mu_1 y_1))(x) + (L(\mu_2 y_2))(x) =$$

$$= \mu_1 (L(y_1))(x) + \mu_2 (L(y_2))(x) = \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 0 = 0.$$

Използвайки двете, че L е линеен оператор, и това $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ е решение на

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

тогава можем да твърдим, че съвкупността от решенията на уравнението е линейно пространство.

Лема: Размерността на пространството от решения на уравнението

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

е не по-голяма от n

Нека $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^{n-1}(a, b)$ са произволни функции дефинирани детерминанта на Фробениуса за тези функции:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема: Нека $y_1(x), \dots, y_n(x)$ са произволни
решения на уравнението

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Следните три условия са еквивалентни:

1. Функциите $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ са
линейно независими

2. $W(x_0) \neq 0$ за някое $x_0 \in (a, b)$

3. $W(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$

Системата от решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ на
хоризонталното уравнение

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

се нарича фундаментална

система решения, ако функциите

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ са линейно незави-
симе в (a, b)

Теорема: Съществуват фундаментални
системи решения на уравнението,
т.е. размерността на пространството от
решенията му е точно n .

Доказателство: Нека (*) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ е произволна
матрица

Нека $y_1(x), \dots, y_n(x)$ е ФСР на уравнението.

Нека $y(x)$ е произволно решение. Тогава

функциите $y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)$ са линейно
зависими, т.е. $\exists$ ненулева n -орка от константи, такива че

$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + c_{n+1} y(x) = 0$ за $\forall x \in (a, b)$.

Ако допуснем, че $c_{n+1} = 0$, ще се окаже, че функциите
 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ са линейно зависими, което е
противоречие.

» Случай $\neq 0$ отговаря на поручаващо, че $y(x)$ е
линейна комбинация на $f(x)$.

Всички решения на уравнението
$$y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + 0$$

се изчерпват с всички линейни
комбинации на коя да е фундаментал-
на система решения.

⑧ Линеини хомогенни уравнения от n -ти ред с постоянни коефициенти.
Структура на решенията.
Алгоритми за решаване.

Разглеждаме уравнения от вида:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ въведете $a_1, a_2, \dots, a_n$ са реални константи. Понеже при $n=1$ уравнението $y' - a_1 y = 0$ има решение $y = C \cdot e^{a_1 x}$, ще търсим решение на уравнението във вида $y = e^{\lambda x}$, въведете $\lambda \in \mathbb{C}$. (заменваме C и получаваме)

$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = 0$ което показва, че $e^{\lambda x}$ е решение тогава и само тогава, когато λ е корен на полинома $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$, който се нарича характеристичен полином на уравнението. Като знаем, тези полиноми има n комплексни корена. Нека това са корените $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Ако всички корени са прости, разглеждаме решенията: $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ и образуваме

детерминантата на Вронски за тези решения:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

тъй като детерминантата на
Вронски е равна на 0 тогава и
само тогава, когато $\lambda_i = \lambda_j$ за някои
 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$; Тогава $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$
образуват фундаментална система
от решения а общото решение
на уравнението

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

е

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

с $C_1, C_2, \dots, C_n$ произволни
комплексни константи.

Написане на кратки корени на характеристичния полином

$$\text{Нека } P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n =$$

$$= \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}, \text{ д.е. разликите корени}$$

на $P(\lambda)$ са $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и техните краткости са съответно $\alpha_1, \dots, \alpha_m$,
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$

Теорема (критерий за кратки корени)

Коренът λ_k на $P(\lambda)$ има краткост α_k (2)
 $P(\lambda_k) = P'(\lambda_k) = \dots = P^{(\alpha_k-1)}(\lambda_k) = 0$
 $P^{(\alpha_k)}(\lambda_k) \neq 0$.

Всичко 8 месеца

* Теорема: Нека $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$ са полиноми и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{C}$ са различни константни числа. Тогава равенството

$$P_1(x) \cdot e^{\beta_1 x} + P_2(x) \cdot e^{\beta_2 x} + \dots + P_k(x) \cdot e^{\beta_k x} = 0$$

за всяко $x \in (\alpha, \beta)$ е възможно само тогава, когато $P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv \dots \equiv P_k(x) \equiv 0$.

Док. проверка индукция по k .

База: при $k=1$ имаме: $P_1(x) \cdot e^{\beta_1 x} = 0$ за $\forall x \in \mathbb{R}$, то е като $e^{\beta_1 x} \neq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ то

$$P_1(x) = 0 \text{ за всяко } x \in (\alpha, \beta) \rightarrow P_1(x) \equiv 0$$

Предположение:

Нека твърдението е извършено за k -ия

Степен: проверяваме равенството

$$(*) P_1(x) \cdot e^{\beta_1 x} + \dots + P_k(x) \cdot e^{\beta_k x} + P_{k+1}(x) \cdot e^{\beta_{k+1} x} = 0. \text{ Тогава}$$

$$P_1(x) \cdot e^{(\beta_1 - \beta_{k+1})x} + \dots + P_k(x) \cdot e^{(\beta_k - \beta_{k+1})x} + P_{k+1}(x) = 0$$

за произволен полином $P_{k+1}(x)$ и $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$. Успоредно:

$$(P_{k+1}(x) \cdot e^{\beta x})' = (P_{k+1}'(x) + \beta \cdot P_{k+1}(x)) \cdot e^{\beta x} = Q(x) \cdot e^{\beta x}, \text{ където}$$

$$\deg Q(x) = \deg P_{k+1}(x), \text{ то е като } \deg P_{k+1}'(x) < \deg P_{k+1}(x)$$

и $\beta \neq 0$. Ако е, че нгр:

$$Q_1(x) \cdot e^{(\beta_1 - \beta_{k+1})x} + \dots + Q_k(x) \cdot e^{(\beta_k - \beta_{k+1})x} = 0, \text{ където}$$

$$Q_i(x) = \deg P_i'(x) \text{ за } i=1, \dots, k, \text{ то е като } \beta_i \neq \beta_{k+1}$$

използваме индуктивното предположение и

$$\text{получаваме че } Q_1(x) \equiv Q_2(x) \equiv \dots \equiv Q_k(x) \equiv 0, \text{ но}$$

$$\deg Q_i(x) < \deg P_i(x) \text{ за } i=1, \dots, k$$

$$\Rightarrow P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv \dots \equiv P_k(x) \equiv 0. \text{ Записваме в } (*)$$

$$\text{и получаваме } P_{k+1}(x) \cdot e^{\beta_{k+1} x} = 0; e^{\beta_{k+1} x} \neq 0 \text{ за } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{то } P_{k+1}(x) \equiv 0 \text{ за } \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Закриване: за $\forall k \in \mathbb{N}$ от равенството

$$P_1(x) \cdot e^{\beta_1 x} + P_2(x) \cdot e^{\beta_2 x} + \dots + P_k(x) \cdot e^{\beta_k x} = 0 \Rightarrow P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv \dots \equiv P_k(x) \equiv 0$$

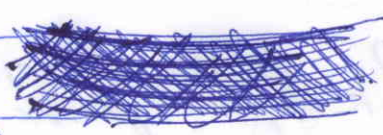
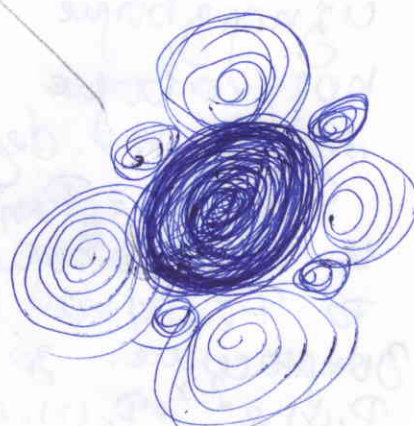
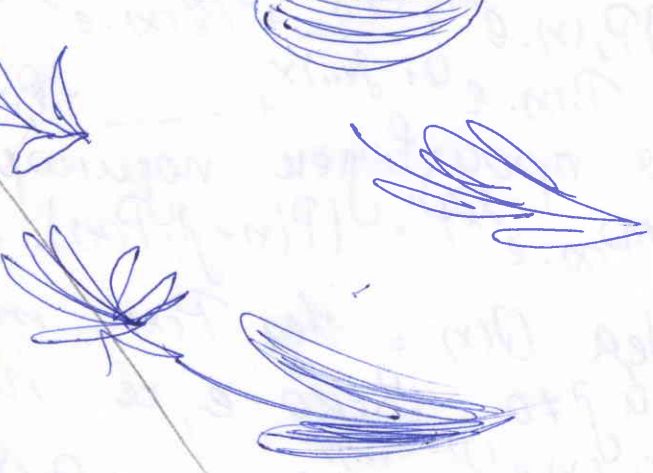
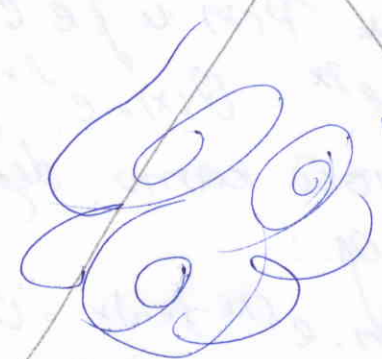
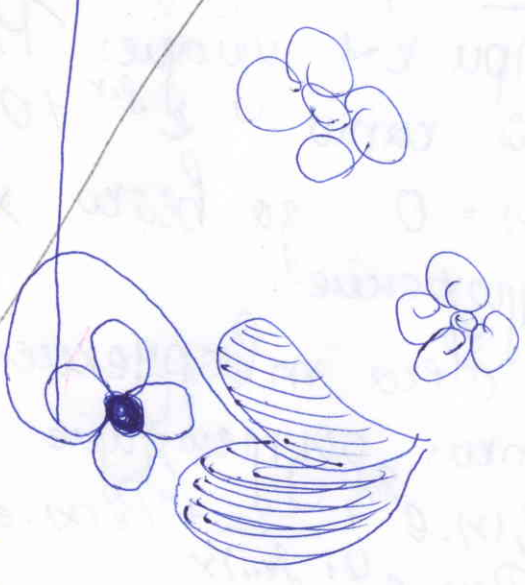
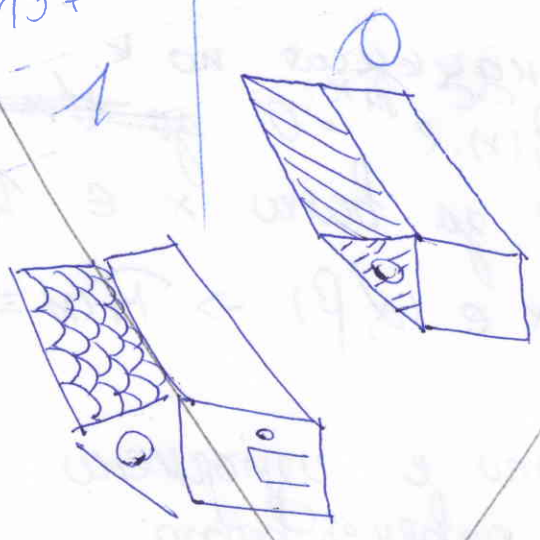
Blue	Bue
14-18	2-8
32-3	40-23
35-24	33-2
59-10	35-2
69-18	43-10
87-5	53-11
92-32	64-4
124-26	68
150	68
1	0

H B

1-20 25-8
 21-6 33-20
 27-12 53-14
 39-30 77-13
 69-55 90
 124-13
 137

29-1	1-20
30-26	21-2
56-19	23-4
75-4	27-14
79-30	41
109-13	41-5
122-27	46-5
149-22	51
2	0
0	0

12-20	14-16
32-37	30-4
69-30	34
99-18	34-3
113-16	37-2
133-16	39-7
149	46
1	0
26-12	14
38	



⑨ Линеарни уравнения с дясна страна Евазипоринори. Отделение на редките редения при уравнения с редки коефициенти. Примери, резонанс ~~резонанс~~

Разглеждаме уравнението от вида:

(1) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$, където $a_1, \dots, a_n$ са редки коефициенти и $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала (α, β) .

Алгоритъмът за решаване на тези ур.:
- намираме фундаментална система решения на съответното хомогенно ур

- намираме частно решение по метода на Лагранж

Общото решение се представя като сума на частното решение с произволни линейни комбинации на фундаменталната система

Функцията от вида $f(x) = \sum_{k=1}^m P_k(x) \cdot e^{\lambda_k x}$, където $P_k(x)$ са полиноми и λ_k са (комплексни) константи, наричат евазипоринори

Теорема: Ако λ не е корен на характеристичния полином на уравнението (1), то общо решение от вида $y(x) = Q(x) \cdot e^{\lambda x}$

всѣмъ $Q(x)$ е полиноми със степен, която е равна на $P(x)$.

Ако α е k -кратен корен на хуров. полиноми на ур. (1), то има решение от вида $y(x) = x^k \cdot Q(x) \cdot e^{\alpha x}$, където $Q(x)$ е полиноми със степен, която е равна на степента на $P(x)$.

Отделяне на рекурентно решение

Лема: Ако α е корен на хуров. полиноми $P(x)$, то α също е корен на $P(x)$, при това със същата кратност.

От лемата директно получаваме, че ако

$e^{\alpha_1 x}, x e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x}$ са решения, които присъстват в общото решение, то $e^{\alpha_2 x}, x e^{\alpha_2 x}, \dots, x^{k_2-1} e^{\alpha_2 x}$ също присъстват.

Дано е, че решението $x^k \cdot e^{\alpha_1 x}$ и $x^k \cdot e^{\alpha_2 x}$ са коригирено спрегнати

ако $\alpha_1 = a + ib$ то имаме

$$x^k \cdot e^{\alpha_1 x} = x^k \cdot e^{(a+ib)x} = x^k \cdot e^{ax} \cdot e^{ibx} = x^k \cdot e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

$$x^k \cdot e^{\alpha_2 x} = x^k \cdot e^{(a-ib)x} = x^k \cdot e^{ax} \cdot e^{-ibx} = x^k \cdot e^{ax} (\cos bx - i \sin bx)$$

Ако като решенията обр. функцията ур. (1), то

$$\frac{1}{2i} (x^k \cdot e^{\alpha_1 x} - x^k \cdot e^{\alpha_2 x}) = x^k \cdot e^{ax} \cos bx \text{ и}$$

$$\frac{1}{2i} (x^k \cdot e^{\alpha_1 x} + x^k \cdot e^{\alpha_2 x}) = x^k \cdot e^{ax} \sin bx \text{ са реше-}$$

ния на уравнението (1), но те вече са рекурентни

Пр. Забържение: Дяко ринено хоргоенно
уравнение с редни коефициенти
и редни функционни следва.

Пример: $(y'''' - 6y'' + 9y') = x e^{3x} + e^{3x} \cos 2x$

Характер ур $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$
има двукратен корен $\lambda_1 = 3$ и
прост корен $= 0$ и редн. на
хорго. ур е $y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + C_3$.
Дясната част на ур се сводви
от две сводредни:

за първото сводне: $\lambda = \alpha + i\beta = 3$, а
второто $\lambda = \alpha + i\beta = 3 + 2i$

Забърже по отгедно естниде
решение на ур:

(4.1) $y'''' - 6y'' + 9y' = x e^{3x}$

(4.2) $y'''' - 6y'' + 9y' = e^{3x} \cos 2x$

$\lambda = 3$ се явява корен с кратност $s=2$
затова естното решение на

(4.1) търси във вида

$y_1 = x^2 (ax + b) e^{3x}$ Оздесь важе $b(4)$
коэффицие $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{18}$

Поже $\lambda + i\beta = 3 + 2i$ не е корен на
хар. уравн. то частното решение
на (4.2) търси във вида

$y_2 = e^{3x} (C \cos 2x + D \sin 2x)$

Сред здесь важе b коэффициенте
 $C = -\frac{3}{52}$, $D = -\frac{1}{26}$

Общето решение на (4) е $y = y_0 + y_1 + y_2$

⑩ Комплексна число. Комплексно-значеща функция. Експонента и формула на Ойлер. Интеграли и свойства. Пресмятане чрез реални интеграли.

Комплексно число наричаме $z = a + ib$, когато a и b са реални числа, а i е мнимия единица, за която е вярно $i^2 = -1$. a и b се наричат реална и мнимична част на числото z .

Пр. $3 + 2i$: реална част 3 и мнимична част 2 .
Реалните числа могат да се представят като комплексни с мнимична част 0 , например $2 = 2 + 0i$.

Комплексните числа могат да се събират, изваждат, умножават и делят също както реалните.

Експоненциалната функция e^x и не тригонометричните функции $\cos x$, $\sin x$, e^{ix} .

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

където и $e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x e^y$

Def. формула на Ойлер:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Функцията дефинирана експонента с мним аргумент

показател повторя всички свойства на експоненциалната функция с реален аргумент.

Изхождайки от представянето на експоненциалната функция с чисто imaginary показател стигаме до представянето на тригонометричните функции $\sin z$ и $\cos z$, именно:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

С помощта на формулата на Ойлер записваме $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$ в тригонометрична форма

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

и която дефинируем e^z , $z \in \mathbb{C}$

Ако $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, то експоненциалната функция e^z се дефинира като

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

II) Нормални системи. Теорема на Хикор за съществуване.

Система от обикновени диференциални уравнения от вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (*)$$

се наричат нормални.

Ввеждаме векторни означения:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f(x, t) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t))$$

и това ни дава възможността да напишем системата (*) във вида:

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, t)$$

За предпоставки, а f е дефинирана в някаква област $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Задачата на Коши за (1) дефинирана е на строго условие (1') $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, където $(x_0, t_0) \in G$. Едно решение на задачата на Коши ще разглеждаме функцията $\varphi(t)$, която е дефинирана и притежава непрекъсната втора производна в достатъчно малък интервал $\Delta \subset \mathbb{R}$, то е Δ и за нея е изпълнено: $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), t)$ за всяко $t \in \Delta$ и $\varphi(t_0) = x_0$.

Теорема: Нека $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ е $(n+1)$ -мерен открит
 Нека векторната функция
 $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ е непрекъснат и удовлет-
 ворява условието на Липшиц по x в G
 с константа на Липшиц L . Тогава
 задачата на Коши

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

притежава решение, което е дефини-
 рано в интервала $|t - t_0| \leq h$, където
 $h = \min(0, \frac{b}{M})$, където M е супремум
 на $|f|$ в G .

Лема: Решението на задачата на Коши е
 еквивалентно на намеряване на непрекъснато
 решение на интегралното уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau.$$

строим последователно приближения

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_{k-1}(\tau), \tau) d\tau \text{ за всяко } k=1, 2, \dots$$

с индекс по k показваме, че функциите
 $x_k(t)$ са дефинирани и непрекъснати
 за всяко $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Изследваме

Сред това показваме, че ~~функциите~~ ^{последователност} $\{x_k(t)\}$
 равномерно клонят към някоя функция $x(t)$
 за което разглед. реда

$$x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \dots$$

общия редизата от поредиците суми по този
 ред съвпадат с редизата $\{x_k(t)\}$ с
 функция по k показваме оценката

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \frac{M \cdot E^{L|t-t_0|}}{k!}$$

от $|t - t_0| \leq h$ порицаване, и членовете на разглеждания ред се реаранжират от членовете на реда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M \cdot (E \cdot h)^k}{k!}$, който очевидно е $e^{E \cdot h}$.

По кр. на Вайерштрас за равномерна сходимост порицаване, и редицата $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M \cdot (E \cdot h)^k}{k!}$ е $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M \cdot (E \cdot h)^k}{k!}$ с непрекъснатост до границата. Функция $\psi(t)$ също е непрекъсната. Някои показват, че $\psi(t)$ е решение на иждер. уравнение и с това показват, че съществува реш.

За да провери единствеността, взимам произволно решение $\psi_1(t)$.

Показват, че $\psi_1(t)$ е решение чрез следващо:

$$|\psi_1(t) - x_k(t)| \leq \frac{2M \cdot E^{k-1} |t - t_0|^k}{k!}$$

използват, че в последното неравенство изразът от ляво е 0 при $k \rightarrow \infty$.

С това $\psi_1(t) = \psi(t)$ за всяко

$t \in \Delta \cap [t_0 - h, t_0 + h]$, тъй като всяка сходяща редица има единствена граница.

(12) Теорема за единственост, непродържимо решение. Теорема за попускане на корпаките в непредържимо и второстепенни случаи.

Нека $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ е произволна област и функцията $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ е дефинирана и притежава непрекъснати първи частни производни в D . Нека $(x_0, t_0) \in D$.
 Разглеждаме задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y, t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

По теоремата за съществуване тази задача има решение, което е дефинирано в достатъчно малък интервал, съдържащ t_0 . Ще покажем, че изрично всички решения на задачата на Коши има едно с най-голям дефиниционен интервал, което е единствено, и ще го наричаме максимално непродържимо решение.

Королем: Задачата на Коши притежава единствено максимално непродържимо решение.

Теорема: (за попускане на корпаките)
 За пример, че $x = \varphi(t)$ е максимално непродържимо решение на Задач. на К. с дефиниционен интервал (m_1, m_2) .
 Нека $V \subset D$ е корпак, който съдържа точката (x_0, t_0) в точен случай.

съществуват $\varepsilon > 0$, такива се ~~намеряват~~
~~намеряват~~ за $t \in (m_1, m_1 + \varepsilon) \cup (m_2 - \varepsilon, m_2)$,
 $(\varphi(t), t) \in K$. При $m_1 = -\infty$, първият
 интервал приема вида $(-\infty, \varepsilon)$ и при $m_2 = +\infty$,
 вторият интервал приема вида $(\varepsilon, +\infty)$.

Теорема 4. Ако t е едно от
 m_1 или m_2 решението се добрихва
 произволно близко до границата на D ,
 т.е. попуска всеки предварително
 зададен едринко в D .

Системата от вида $\dot{x} = f(x)$ се нарича
 автономна.

Теорема: Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ е произволно открито
 и $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ е дефинирана и
 притежава непрекъснати първи
 частни производни в D .

Нека $\varphi(t)$ е непрекъснато решение на З.К.
 (i) $\dot{x} = f(x)$, (ii) $x(t_0) = x_0$, с дефиниционен
 интервал (m_1, m_2) , което $x_0 \in D$. В
 това в случая, ако за всяко $t \in [t_0, m_2)$
 тоест $\varphi(t) \in K$ за някакъв
 едринко $K \subset D$, то $m_2 = +\infty$. Аналогично,
 ако за всяко $t \in (m_1, t_0]$ тоест
 $\varphi(t) \in K$ за някакъв едринко $K \subset D$,
 то $m_1 = -\infty$.

Доказателството следва директно следващо
 от теоремата за непрекъснато из
 едринко.

13) Непрекъсната зависимост на
решенията от първоначални и
начални условия.

Нека $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ е областта $|t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b$
Разглеждаме задачата на Коши

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Ведето f е дефинирана непрекъснато и
С удовлетворява условия на липшиц
спрямо x в D и е дефинирана и
непрекъснато в $|t - t_0| \leq a$ и
удовлетворява условията $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$

Теорема:

При направените предположения, ЗК
притежава единствено решение
 $x = x(t, x_0)$, което е дефинирано и
непрекъснато спрямо x_0 в интервала си
проектирван в правоприлик

$|t - t_0| \leq \frac{1}{2}a$ $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}b$, ведето
 $h = \min(a, \frac{1}{2}b)$ и h е суперинтервал на $|t - t_0|$

Глобална теорема за непрекъснатост

При направените предположения нека
 $x = x(t, x_0)$ е локално непрекъснато
решение на ЗК при $x_0 = x_0$ с
дефиниционен интервал (t_1, t_2) .

Нека α, β е компактен подинтервал
единствено решение $\varphi(t, y)$ на задачата
на Коши, което е дефинирано и
непрекъснато по y в интервала си
проектирван в y и има област $\alpha \leq t \leq \beta, |y - x_0| \leq \delta$

Зор. Теорема 1.

Ще търсим непрекъснато решение на интегралното уравнение

$$x(t, \mu) = g(\mu) + \int_{t_0}^t f(x(s, \mu), s) ds$$

строим поредовременно приближение

$$x_0(t, \mu) = g(\mu)$$
$$x_1(t, \mu) = g(\mu) + \int_{t_0}^t f(x_0(s, \mu), s) ds$$

$$x_{n+1}(t, \mu) = g(\mu) + \int_{t_0}^t f(x_n(s, \mu), s) ds$$

Ще покажем, че за всяко n , x_n е добре дефинирано в $|t - t_0| \leq \frac{b}{2}$

$|\mu - \mu_0| \leq c$, с индукция по n

Действително и да допуснем че x_n е добре дефинирано.

е добре дефинирано в $|t - t_0| \leq \frac{b}{2}$,

$$|\mu - \mu_0| \leq c.$$

целуе

$$|x_n(t, \mu) - x_0| = |g(\mu) - x_0 + \int_{t_0}^t f(x_0(s, \mu), s) ds| \leq$$
$$\leq |g(\mu) - x_0| + \left| \int_{t_0}^t f(x_0(s, \mu), s) ds \right| \leq$$

$$\leq |g(\mu) - x_0| + M \cdot |t - t_0| \leq \frac{b}{2} + M \cdot \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$$

Така $f(x_n(t, \mu), t)$ е добре дефинирано за $|t - t_0| \leq \frac{b}{2}$, $|\mu - \mu_0| \leq c$ $\Rightarrow x_{n+1}$ е добре дефинирано в $|t - t_0| \leq \frac{b}{2}$, $|\mu - \mu_0| \leq c$.

По подобен съвсем аналогичен на теоремата на Пикар доказваме равномерна сходимост

на редицата $\{x_n(t, \mu)\}$ като
 преди това извършваме оценката
 $|x_n(t, \mu) - x_{n-1}(t, \mu)| \leq \frac{2 \cdot M \cdot e^{n-1} \cdot |t - t_0|^n}{n!}$

След това извършваме граничен преход
 в дефиниционните равенства за
 последователните приближения и
 получаваме, че границата ни е
 решение на задачите на Коши
 (1) (1). За да покажем единствен-
 ността, използваме теоремите за
 единственост при фиксирано μ .

⑭ Линејни нормални системи от първи ред.
Теорема за съществуване.
Еквивалентност на задачите на Коши
за уравнения и системи.

Система от обикновени диференциални
уравнения от вида

$$(*) \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t) \cdot x_1 + a_{12}(t) \cdot x_2 + \dots + a_{1n}(t) \cdot x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t) \cdot x_1 + a_{n2}(t) \cdot x_2 + \dots + a_{nn}(t) \cdot x_n + b_n(t) \end{cases}$$

изразявае линејни системи от първи
ред

във въвеждае векторни означения:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), A(t) = (a_{ij}(t)),$$

$$b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t)) \text{ и системата}$$

$$\text{приема, вида: } (1) \dot{x} = A(t) \cdot x + b(t)$$

3^o задаване с допълнително условие
Условие (1') $x(t_0) = x_0$

Теорема (за съществуване и единственост)

Нека функциите $a_{ij}(t), b_i(t)$ са непрекъснати
в интервала (α, β) и $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогава
задачата на Коши приема
единствено решение, което е деф. в целия
интервал (α, β) .

Хов. Нека $\alpha < \tau < \beta$. В случая имаме

$$f(x, t) = A(t)x + b(t), \text{ тогава за } j=1, \dots, n$$

$f_{x_j} = (a_{1j}(t), a_{2j}(t), \dots, a_{nj}(t))$ и f има пер. първа
частна производна в τ, η .

$\Rightarrow f_{x_j} = (a_{1j}(t), \dots, a_{nj}(t))$ удовлетворява уср. на функция

Последователните приближения

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(p) \cdot x_{k-1}(p) + b(p) dp \quad \text{за } k=1, \dots$$

са дефинирани в целия интервал (α, β) ,
т.е. не се налага съществуване на интервал
~~Резултатът от последователните приближе-~~
~~ния е равномерно сходяща в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ и~~
~~се некойто принцип е решението на З.К.~~
~~Това доказва, че $\varphi(t)$ съществува и е~~
~~единствено дефинирано в (α, β)~~

Правим индукция по k
База: при $k=0$

$x_0(t) = x_0$ очевидно е дефинирано
за всяко $t \in (\alpha, \beta)$.

Предположение: Нека $x_{k-1}(t)$ е дефинирано
за всяко $t \in (\alpha, \beta)$.

Стелка: тогава $x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(p) \cdot x_{k-1}(p) + b(p) dp$
и очевидно за $\forall t \in (\alpha, \beta)$: $A(t) x_{k-1}(t) + b(t)$
е дефинирано от индукционното
предположение. При това порождение $x_k(t)$
е дефинирано в (α, β) .

Доказание: за $\forall k=0, 1, \dots$ последователните
приближения $x_k(t)$ са дефинирани в
целия интервал (α, β) .

След това показваме, че редицата
от последователните приближения е
равномерно сходяща в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ и че
некойто принцип е решението на З.К.
Това доказва, че съществува единс-
твено решение $\varphi(t)$ на З.К. което
е дефинирано в интервала (α, β) .

(15) Фундаментална система от решения на хомогенната система. Детерминанта на Вронски. Метод на Лабронж за вариране на производните константи.

Разглеждаме линейни системи от вида:

(1) $\dot{x} = A(t) \cdot x$, където $A(t) = (a_{ij}(t))$, функциите $a_{ij}(t)$ са непрекъснати в някоев интервал (α, β)

Твърдение! Решенията на системата (1) образуват линейно пространство.

Твърдение! Всеки път решения на хомогенната линейна система (1) са линейно зависими.

Всяка система от линейно независими решения на (1) ще наричаме ФЕР

Факта система решения съществува и от предишната теорема ще следва, че размерността на пространството от решенията е n .

Твърдение! Системата (1) притежава безкрайно много фундаментални системи решения.

Нека $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ са произволни векторно-значни функции дефинирани в (α, β)

Дефиниране детерминанта на Вронски $W(t)$ за тези функции по следния начин:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) & \dots & x_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

Лем. на Твърдение 1. (Георгиев)

Нека $x(t), y(t)$ са произволни решения на системата (1) и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ произволно.

$$c_1 x(t) + c_2 y(t) = c_1 \dot{x}(t) + c_2 \dot{y}(t) =$$

$$= c_1 A(t) \cdot x(t) + c_2 A(t) \cdot y(t) = A(t) \cdot (c_1 x(t) + c_2 y(t))$$

т.е. $c_1 x(t) + c_2 y(t)$ също е решение на системата (1)

Лем. на Твърдение 2. (Георгиев)

~~Ако като функции $y(t), x_1(t), \dots, x_n(t)$ са неслучайни решения на системата, то те са линейно зависими и $\exists$ константи~~

~~$d_0, d_1, \dots, d_n$, такива че $d_0 y(t) + d_1 x_1(t) + \dots + d_n x_n(t) = 0$ за $t \in (a, b)$. Ако погледнем, че $d_0 = 0$ ще получим противоречие с линейността независимост на $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Ако $d_0 \neq 0$ и като погледнем $c_i = \frac{d_i}{d_0}$, получаваме~~

Нека $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ са неслучайни решения на системата (1). Фиксираме $t_0 \in (a, b)$. Према векторите $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_{n+1}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ са линейно зависими т.е. $\exists$ константи $c_1, \dots, c_{n+1} \in \mathbb{R}$ такива, че $c_1 x_1(t_0) + \dots + c_{n+1} x_{n+1}(t_0) = 0$.

Разглеждаме функцията $x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_{n+1} x_{n+1}(t)$. От горната теорема $x(t)$ удовлетворява системата (1) и началното условие (1') $x(t_0) = 0$

След от теоремата за единственост
и от факта, че функцията φ
е решение на З.к. получаваме че
 $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$ е
за всяко $t \in (\alpha, \beta)$, т.е. функциите
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ са линейно зависими.

(16) Линеарни системи с постоянни
коэффициенти. Случай. Случай
на дифференциране оператора
Отдаване на ~~резултат~~ ^{решение}
при системите с постоянни
коэффициенти

Ще разгледаме системи от вида:

(*) $\dot{x} = A \cdot x + b(t)$, където A е матрица с постоянни
коэффициенти и функцията $b(t)$ е
непрерывна в интервала (α, β)

За разгледаме хомогенния случай, т.е.
при $b(t) = 0$:

В този случай имаме системата
(1) $\dot{x} = Ax$

От теоремата за I^1 , задачата притежава
единствено решение и то е дефинирано
по всички страни редна права.

Наблюдение: Нека $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ се
явява решение на линейната система
 $\dot{x} = Ax$. Тогава всяка координатна
функция $x_k(t)$, $k=1, \dots, n$, се явява
решение на скаларното уравнение
с постоянни коэффициенти

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) x_k(t) = 0$$

където $P(z) = \det(A - zE)$ е характеристичен
полином на системата.

(16) Линейни системи с постоянни
коэффициенти. Духов. Духов
на дифференциален оператор
Отдаване на ^{решения} ~~решения~~
при системите с постоянни
коэффициенти

Ще разгледаме системи от вида:

(*) $\dot{x} = A \cdot x + b(t)$, където A е матрица с постоянни
коэффициенти и функцията $b(t)$ е
непрерывната в интервала (α, β)

За разгледаме хомогенния случай, т.е.
при $b(t) = 0$:

В този случай имаме системата
(1) $\dot{x} = Ax$

От теоремата за I^1 , задачата притежава
единствено решение и то е дефинирано
всичко върху цялата реална права.

Наблюдение: Ако $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ се
явява решение на линейната система
 $\dot{x} = Ax$, тогава всяка координатна
функция $x_k(t)$, $k=1, \dots, n$, се явява
решение на скаларното уравнение
с постоянни коэффициенти

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) x(t) = 0$$

където $P(z) = \det(A - zE)$ е характеристичен
полином на системата.

~~теорема~~. Нека ~~дано~~ $d_1, \dots, d_s, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_s, d_{s+1}, \dots, d_m$ са
 собствени стойности на A , като $d_{2s+1}, \dots, d_m$
 са реални. Тогава, ако

$x(t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t}$ е формула за общо
 комплексно решение, то

$x(t) = \sum_{k=1}^s g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t} + \overline{g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t}} + \sum_{k=2s+1}^m g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t}$ е
 формула за общото реално решение.

Док. Общият вид на произв. решение е

$$x(t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^s h_k(t) \cdot e^{\lambda_k t} + \sum_{k=2s+1}^m g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t}$$

Това като се интересуваме само от реал.
 решения, спряваме посредното
 равенство и получаваме:

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \overline{g_k(t)} \cdot e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^s h_k(t) \cdot e^{\lambda_k t} + \sum_{k=2s+1}^m \overline{g_k(t)} \cdot e^{\lambda_k t}.$$

Сег от периода за експонентите, получаваме,
 че $h_k(t) = \overline{g_k(t)}$, $g_k(t) = \overline{h_k(t)}$; $k=1, \dots, s$, т.е. след
 това, всички реални решения са
 дадени с

$$x(t) = \sum_{k=1}^s (g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t} + \overline{g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t}}) + \sum_{k=2s+1}^m g_k(t) \cdot e^{\lambda_k t}.$$

Системата от вида
(1) $x = f(x)$ наричаме автокорина.
Предпоставяме, че функцията f
е дефинирана в някаква област
 $\subseteq \mathbb{R}^n$ която наричаме фазово
пространство на системата (1) и
приема стойности в $\mathbb{R}^n$, също
тока оттука имаме още предпостав-
ки, че условията в теорема да
съществуват и единственост се
изпълняват.

Профиктот на $\varphi(x)$ корисен е
и за терорна крива на φ

Проекция на $\varphi(t)$ в $\mathbb{R}^n$
морфизм фазового пространства

Звержение: Ветки корриорна ~~прив~~ есебериц
 $x = f(x, t)$ роже до се свече до
 автокорика ~~до~~ ~~ежедневна~~ ~~като~~
~~вече~~

Звездата е в голямото $f(x) = 0$ на правата
точка на равновесие на (1)

Девидно от ест. на равновесие α за е рел. кол
всичко на равновесие и първия още
особена точка.

Лема: Ако $\varphi(t)$ е непрекъснато решение на (1) с дефиниционен интервал (m_1, m_2) тогава $\varphi(t+c)$ също е непрекъснато решение на (1) с дефиниционен интервал (m_1-c, m_2-c)

Док. Да поемем $\psi(t) = \varphi(t+c)$. Тогава $\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t+c)$. Полагаме $\varphi(t) = f(\varphi(t))$ за всяко $t \in (m_1, m_2) \rightarrow \dot{\psi}(t+c) = f(\varphi(t+c))$ за всяко $t \in (m_1-c, m_2-c)$ т.е. $\dot{\psi}(t) = f(\psi(t))$ за $t \in (m_1-c, m_2-c)$; така $\psi(t)$ е решение на (1) с дефиниционен интервал (m_1-c, m_2-c) ;

Лема: Ако фазовите траектории на две решения $x(t)$, $y(t)$ се пресичат, то те съвпадат.

Лема: Ако фазовата траектория на едно решение $\varphi(t)$ се самопресича, то $\varphi(t)$ е периодично решение с дефиниционен интервал $(-\infty, \infty)$, т.е. съществува $T > 0$ така че $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ за всяко $t \in \mathbb{R}$

От лемата може да се покаже, че решенията, които самопресичат се ~~само~~ фазови траектории се делят на два вида:
- периодични решения за които T или T кратък периодичен период T_0 и всеки др. периодичен вид $k \cdot T_0$.
- решения които са константни т.е. фазови крива с докос на равновесие

Док. № Серия 2.

Нека (m_1, m_2) е дефиниционният интервал на $x(t)$ и (m_{21}, m_{22}) е дефиниционният интервал на $y(t)$.
И точки $t_1 \in (m_1, m_2)$ и $t_2 \in (m_{21}, m_{22})$, такива, че $x(t_1) = y(t_2)$.

Нека $\varphi(t) = x(t+C)$, където $C = t_1 - t_2$. По-горният ред $\varphi(t)$ е решение на (1) и освен това $\varphi(t_2) = x(t_2 + t_1 - t_2) = x(t_1) = y(t_2)$. Защо от теоремата за

единственост $\varphi(t) = \varphi(t_2) = x(t_2 + C)$ за всяко $t \in (m_{21}, m_{22})$, при това $m_1 = m_{21} - C$, $m_2 = m_{22} - C$. Защо

фазовите траектории на $x(t)$ и $y(t)$ съвпадат.

19) Фазови портрети на линейните
автономни системи в равнината.
Класификация на особените точки
разглежда системата

$$\dot{x} = Ax$$

Под фазов портрет на автономната
система (1) разглеждаме всевъзможните
фазови срези.

Ще разглеждаме също неизродените случаи.
Разглеждаме два случая, когато
 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ е неособен и има две
различни собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - реални

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ - комплексни

В първия случай съществува неособен
рекордер S , такава е:

$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ в системата (1) извършва-
ме пр. смената $x = S \cdot y$
и пор. системата $\dot{y} = (S^{-1} \cdot A \cdot S) y$

Следователно

$$y_1' = \lambda_1 y_1$$

$$y_2' = \lambda_2 y_2$$

прилагаме

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$$

$$y_2 = C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

и се отнасяме, че $\lambda_1 < \lambda_2$

Разглеждаме три случая:

$$1. \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

$$2. \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

$$3. 0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

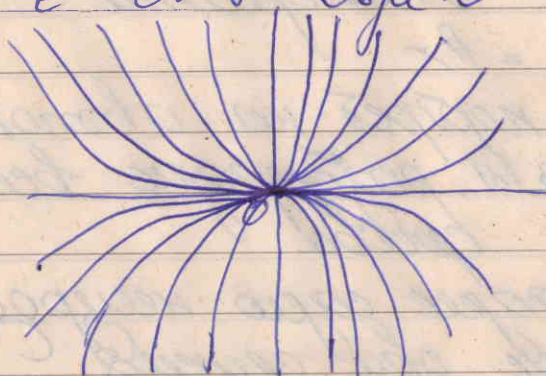
За първи случай фазовия портрет
се изчислява от горните равенства
разглеждаме ги при $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ при к.:
 $y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y_2 = C_2 \cdot \left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

В първия случай при $t \rightarrow \infty$ имаме $y_1 \rightarrow 0$ и $y_2 \rightarrow 0$

при $C_1=0$ и $C_2>0$ фазовата крива е оста y_2 ,
 като посоката е от ∞ към 0.

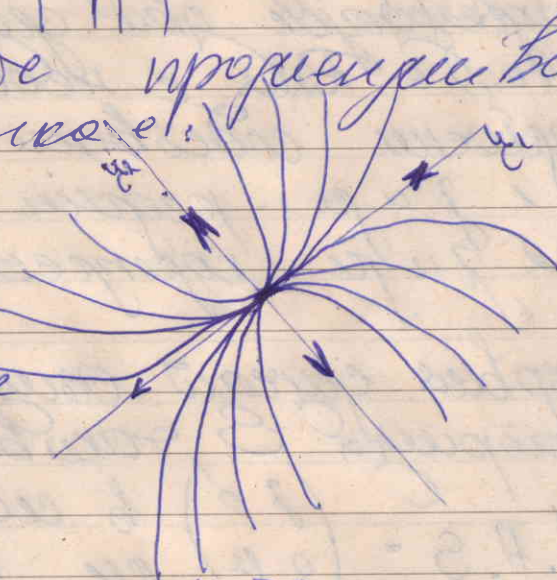
при $C_2=0$ и $C_1>0$ фазовата крива е оста y_1 ,
 като посоката е от ∞ към 0.

Рисуване:



Възниква се при същите променливи и
 пресичаща въртешка е:

освободена точка (0,0) в
 този случай наричаме
 устойчива въртешка.



Във втория случай $t \rightarrow \infty$ $y_1 \rightarrow \infty$
 $y_2 \rightarrow \infty$

при $C_1=0$ и $C_2>0$ оста y_2 от 0 към ∞
 при $C_2=0$ и $C_1>0$ оста y_1 от ∞ към 0

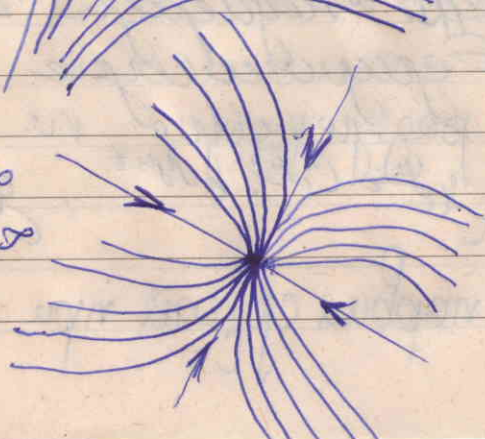
освободна точка (0,0) $\rightarrow$ седло



В третия случай $t \rightarrow \infty$ $y_1 \rightarrow \infty$
 $y_2 \rightarrow \infty$

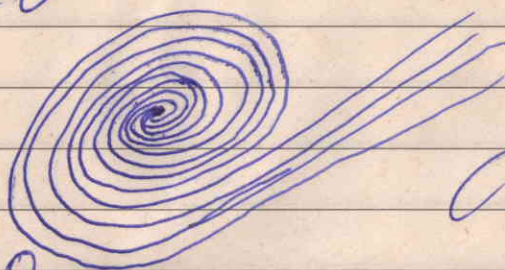
$C_1=0$ и $C_2>0$ оста y_2 от 0 към ∞
 $C_2=0$ и $C_1>0$ оста y_1 от 0 към ∞

неустойчива въртешка.



Фазови криве

$r < 0$ $r > 0$



устойчив
фокус

$r < 0$ $b < 0$

орбит е устойчив фокус

$r > 0$ $b > 0$
 $r > 0$ $b < 0$

неустойчив фокус
неустойчив фокус

$a = 0$, $b > 0$

с оседа точка (0,0)



центр

$a = 0$, $b < 0$

однобо е центр

20) Устойчивост в смисла на Ляпунов.
 Теорема за устойчивост по
 първо приближение. Релевантен
 случай. Теорема за неустойчивост.
 Фазов портрет в
 неавтономния случай.

За разглеждане автономната система

$$(1) \dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(D), \quad D \subseteq \mathbb{R}^n;$$

функцията f удовлетворява условието на
 Липшиц, така че условието в теоремата
 за съществуване и единственост се изпълнява
 в D .

Интересуваме се от поведението на
 фазовата крива в околност на т.я. и
 за това развиваме f по формулата
 на Тейлор.

Развиваме системата

$$\dot{x}_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) + R_i(f, a)$$

$$(2) \quad \dot{x}_2 = f_2(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) + R_2(f, a)$$

$$\dot{x}_n = f_n(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) + R_n(f, a)$$

Във векторен вид, 2) изглежда по следния начин:

$$(3) \quad \dot{x} = f(a) + A \cdot (x - a) + h(x) \quad \text{където } A = Jf(a), \text{ т.е. } A \text{ е}$$

Якобианът на f изчислен в т.я.

Ако a е однократно положение за (1), т.е.

$f(a) \neq 0$ то поведението на фазовите криви се
 диктува от системата $\dot{x} = f(a)$.

Ако a е осодена точка за (1), т.е. $f(a) = 0$, то поведението

на фазовата крива се дължи от следното

$$\dot{x} = A(x) - a$$

Особена точка а наричаме устойчива в смисъл на Лапунков за системата (1), ако за всяка окръжност U на тичащата а $\exists$ окръжност V на същата точка, такава, че за всяко $x_0 \in V$ решението $\varphi(t)$, удовлетворяващо начално условие $\varphi(0) = x_0$ притежава следните свойства:

- $\varphi(t)$ е дефинирано за всяко $t \in [0, \infty)$
- за всяко $t \in [0, \infty)$, $\varphi(t) \in U$.

Ако за $\varphi(t)$ допълнително е изпълнено $\varphi(t) \rightarrow a$ когато $t \rightarrow \infty$, т.е. е асимптотично устойчива за системата (1). ~~ако наричаме устойчива~~

Теорема: (на Лапунков)

Ако всички собствени стойности на яв. матрицата линейтизации рекурсия тук са с отрицателна реална част, то т.а. е асимптотично устойчива точка на равновесие за системата (1).

Гроби теорема се нарича още теорема за устойчива точка на равновесие за системата (1).

Теорема: Ако $\exists$ собствена стойност на яв. матрицата линейтизации рекурсия тук, която има положителна реална част, то т.а. е неустойчива точка на равновесие за системата (1).

Пр. за неустойчив фокус: $a > 0, b < 0$
 $a < 0, b > 0$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{at} \cos(bt + c_1) \\ x_2(t) &= C_2 e^{at} \sin(bt + c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_1 - b x_2 \\ \dot{x}_2 &= b x_1 + a x_2 \end{aligned}$$