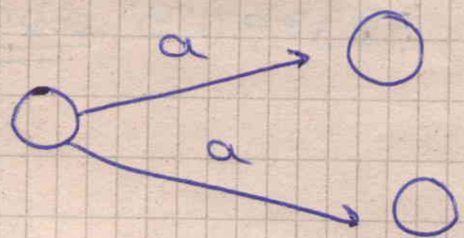
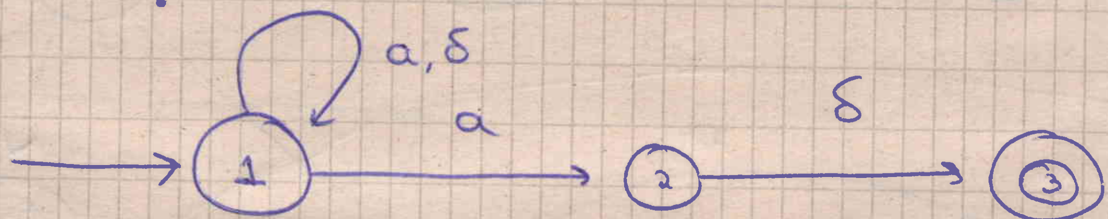
04.12.2013г.

Упражнение

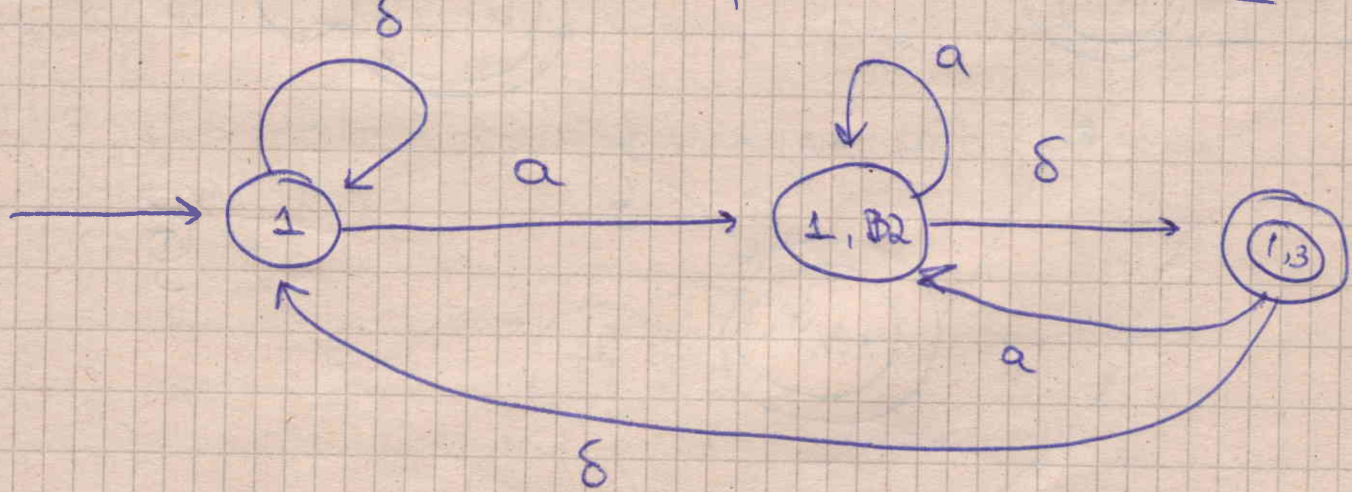
Недетерминирани автомати



могат едновременно да бъдат в повече от 1 състояние; дума се разпознава, ако поне 1 от състоянията след прочитане на думата е крайно.

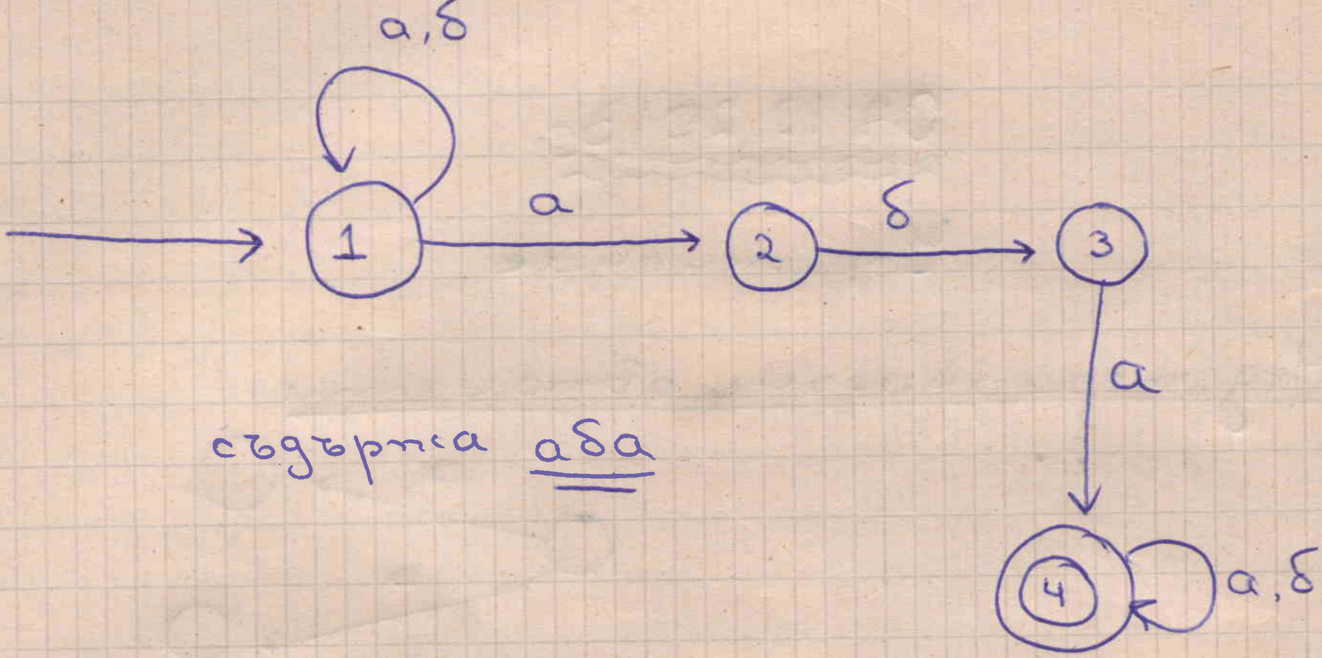


∀ думи, които завършват на аб

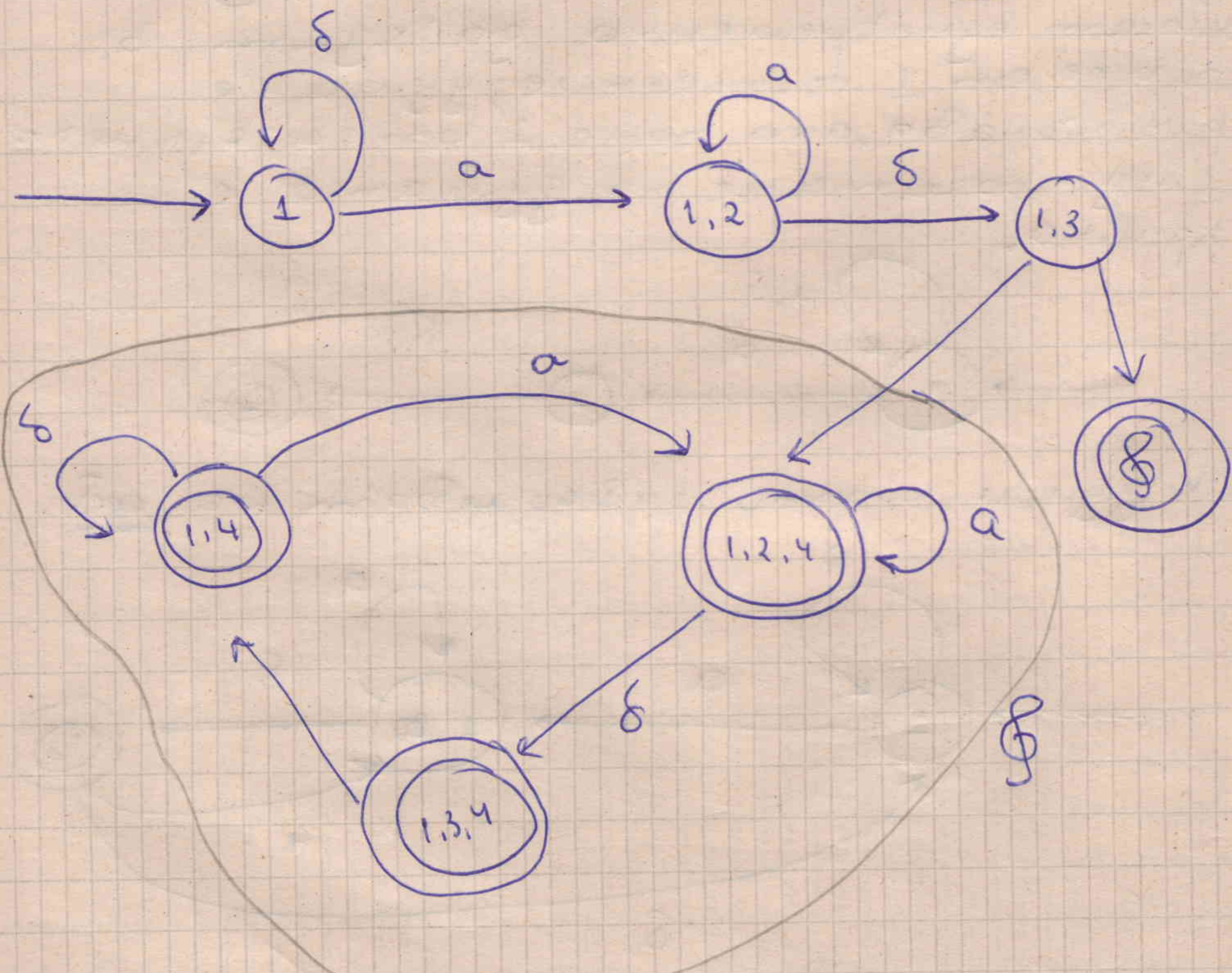


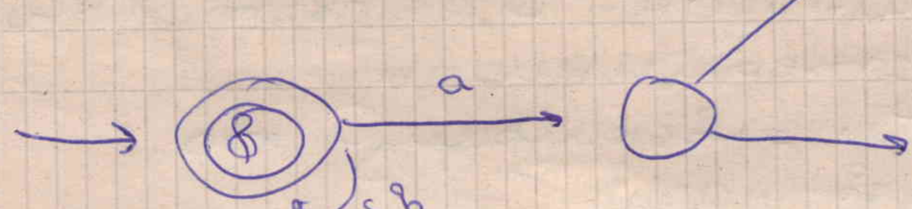
Детерминиран - ⊙ от състояния на недетерминиран

! ∀ думи, завършващи по някакъв начин

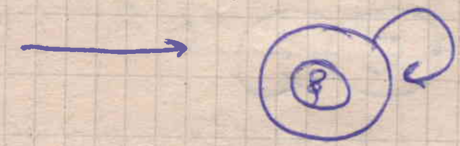


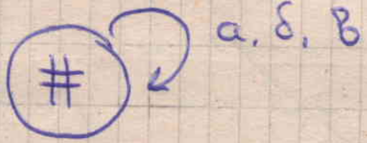
съдържа аба

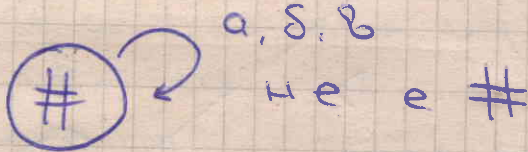




(=>)







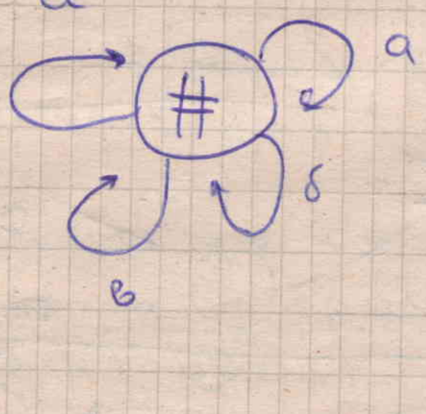
Тотален автомат

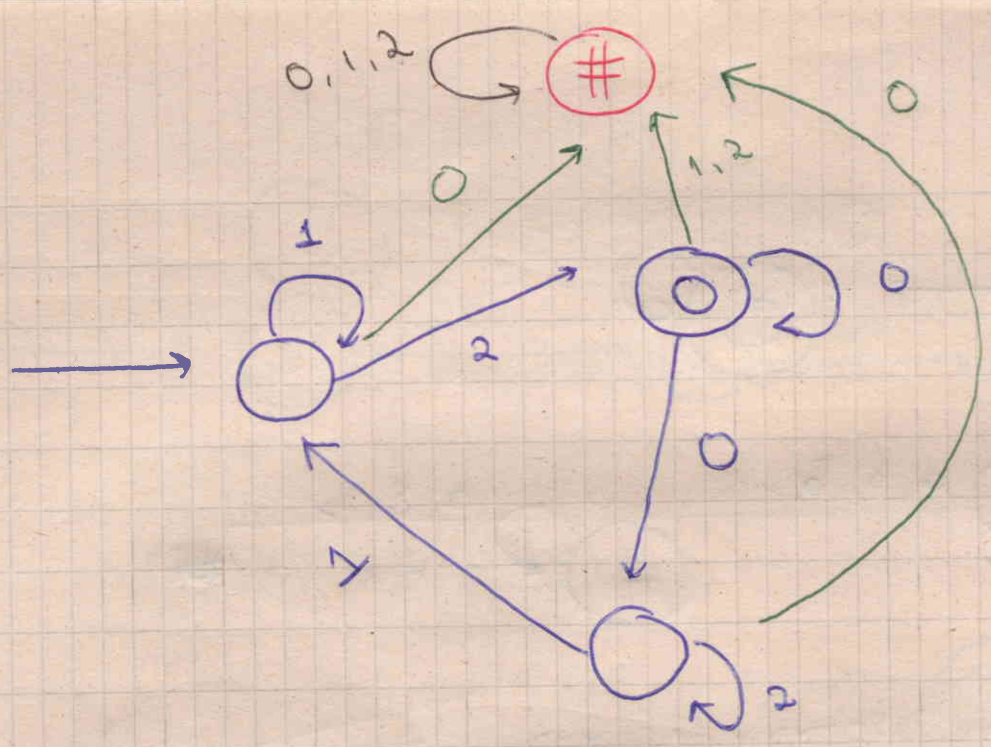
от ∀ състояние с ∀ буква поне една стрелка

Тотален детерминиран - от ∀ състояние с ∀ буква 1 стрелка

Тотализация

1. изобразяване автомата
2. добавяме ново некрайно състояние 
3. насочваме ∀ липсващи стрелки към него
4. вкл. тези



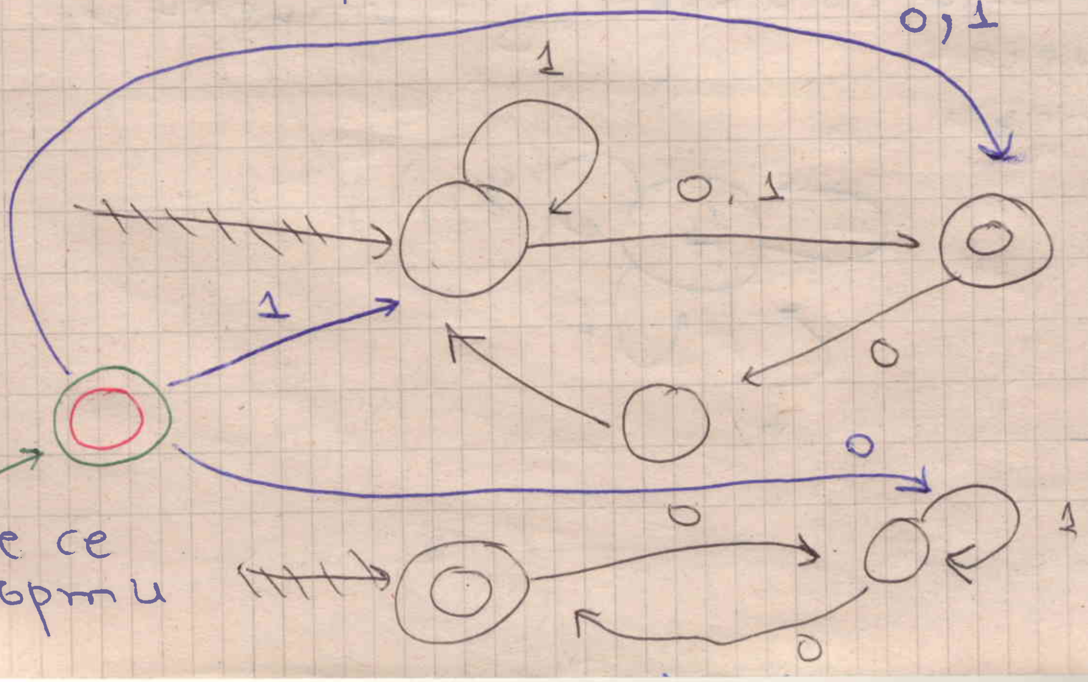


I начин за $\cup$, $\cap$ и $\setminus$

- Детерминирани => детерминирани

II начин за обединение

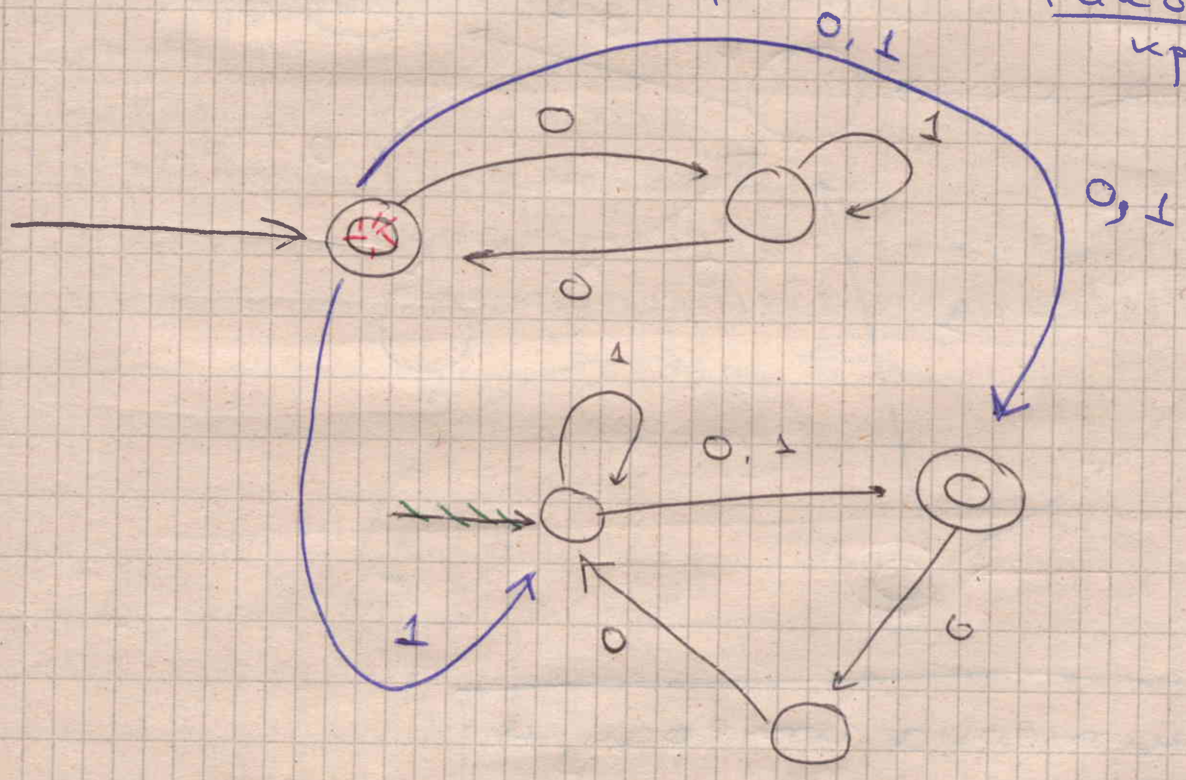
1. изобразяваме автомата
2. добавяме ново начално състояние
3. то ще бъде крайно, ако някое от ~~4~~ старите начални е крайно
4. правим го да върши работата на старите начални



Не се върти

Конкатенация

1. изобразяване автоматите 1 след друг
2. началното на първия ще бъде ново начално
3. правим всяко от крайните състояния на първия да върши работата на началното на втория
4. те остават такива, ако то е кр.с-я кр. нач. такова кр.



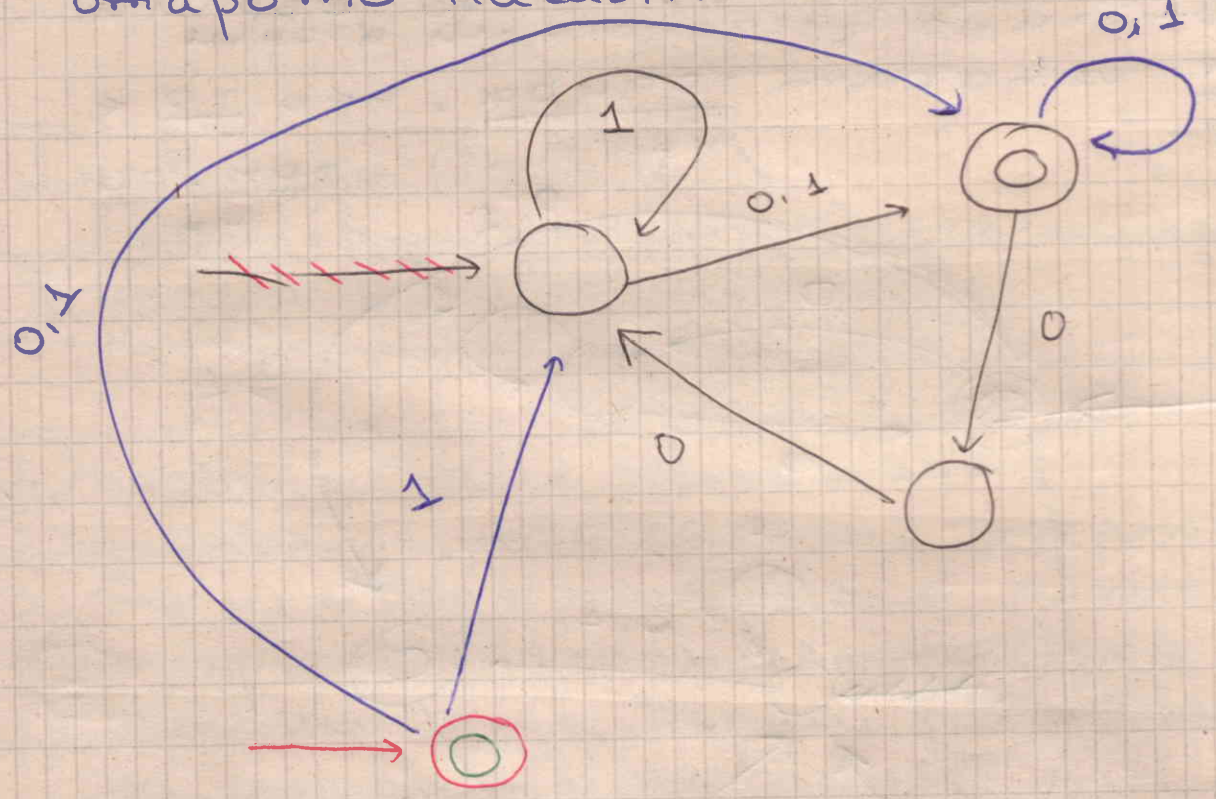
A^* - колкото искаме думи и ги залепваме

A^+ - поне 1 дума да се повтаря
положителна итерация

не на изпит

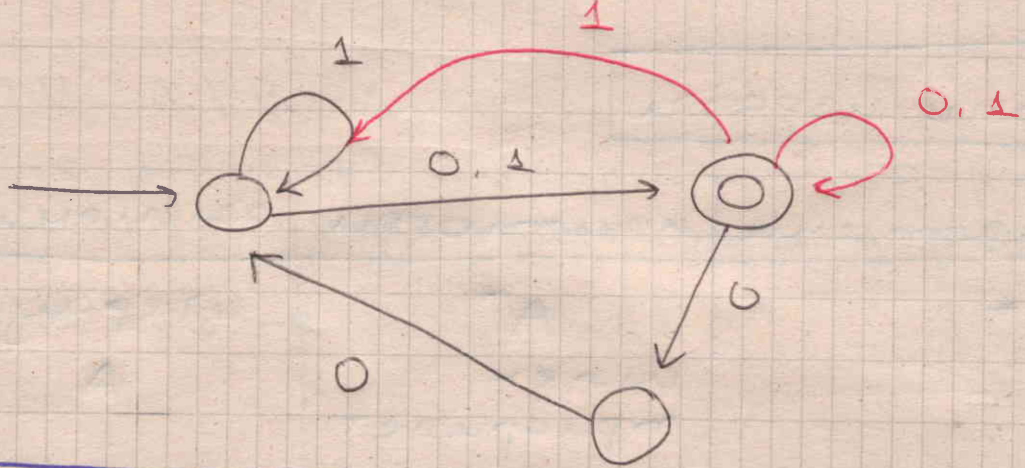
Итерация

1. изобразяваме автомата
2. добавяме ново начално състояние
3. то е крайно
4. правим него и останалите крайни да вършат работата на старото начално



Положителна итерация

1. изобразяваме автомата
2. правим ∀ крайно да върши работата на началното

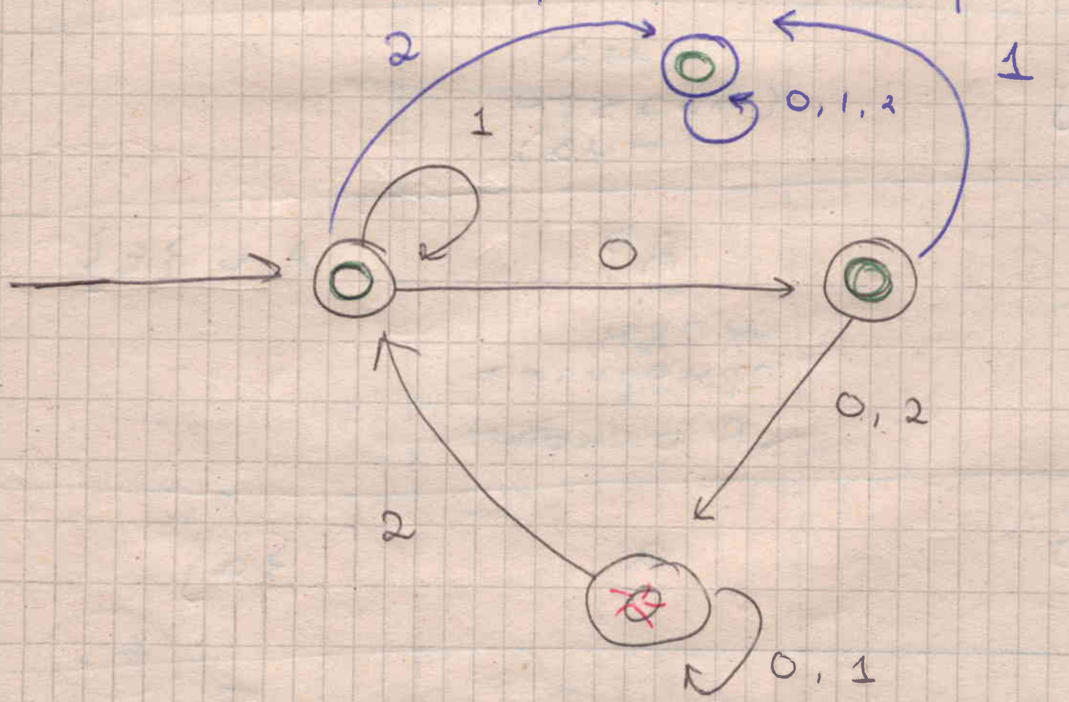


Допълнение

$$\bar{A} = \Sigma^* \setminus A$$

детерминиран + тотален

1. изобр. автомата
2. правим го детермин
3. правим крайните некрайни
4. правим некрайните крайни



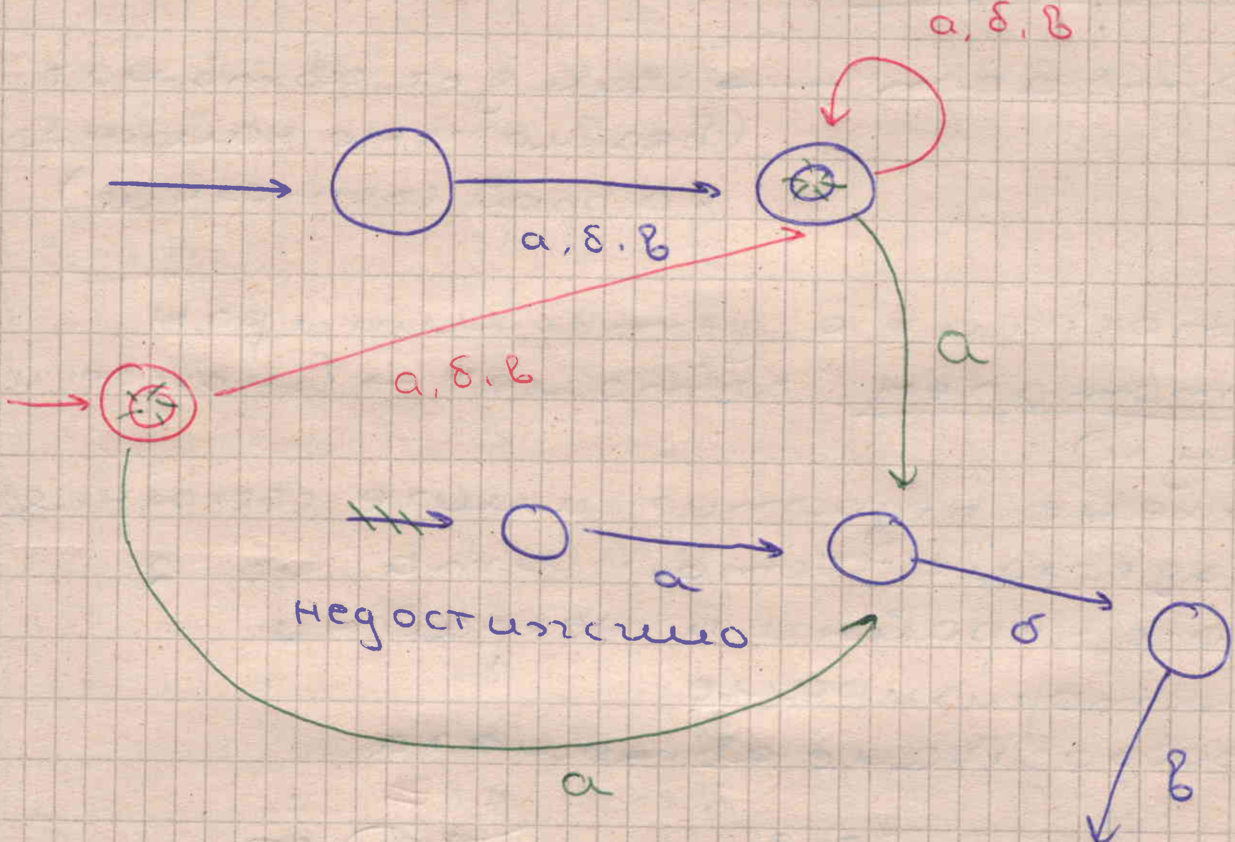
Регулярни изрази

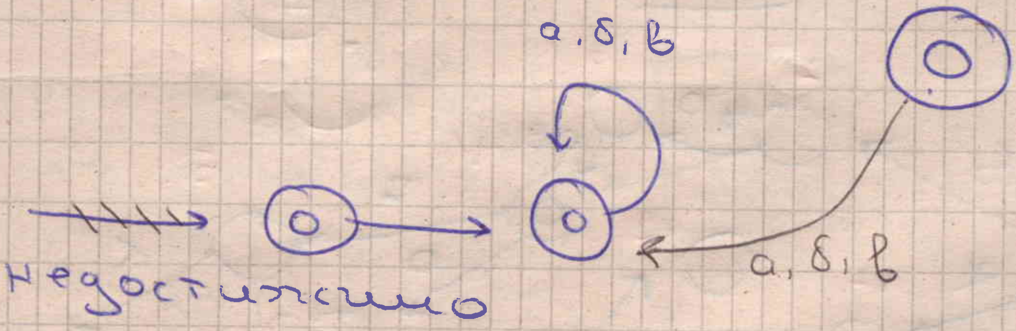
математика	компютри	обяснение
A^*	A^* силен приоритет	итерация на A
A^+	A^+ силен	положителна итерация на A
$A \cup B$	$A \mid B$	обединение на A и B
$\{а, б, в\}$ $\{а, г, е, д, ж, я, 5, \ldots, 9\}$	[абв] [аг-я5-9]	
$\{\varepsilon\}$	няма (празен низ)	
	$A?$ силен приоритет (A в скоби)	$A \cup \{\varepsilon\}$
$\{a\}$ a	a	$\{a\}$
Σ	.	Σ
AB $A.B$	AB	конкатенация на A и B

$A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$

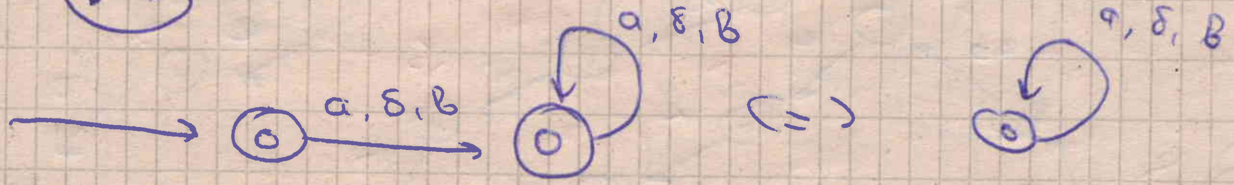
- не се използват при стандартните компютърни регулярни изрази.

• .*абв.* Σ^* абв Σ^*





.*



<u>11.12.2013г.</u>

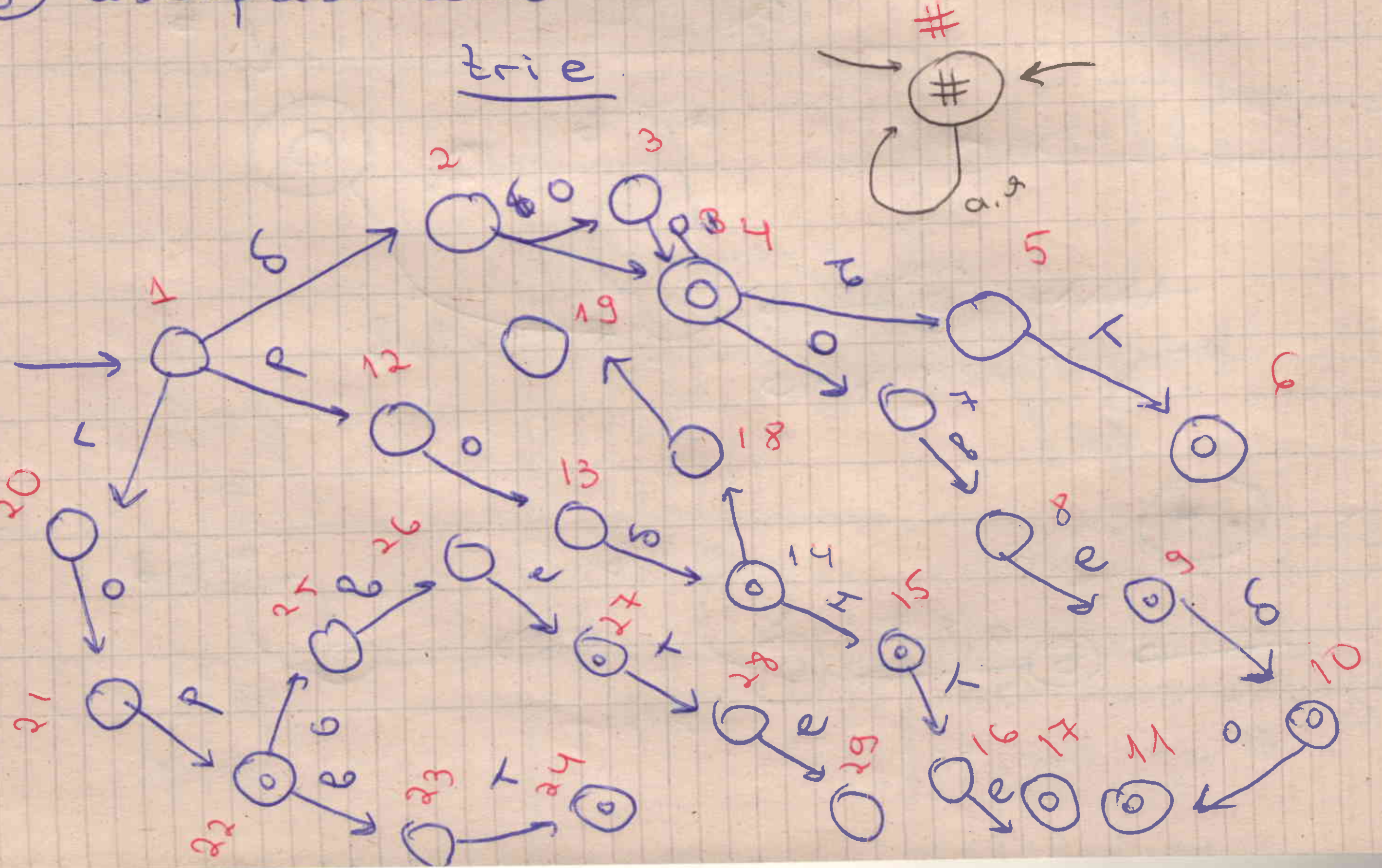
Упражнение

Минимизация

дет. автомат ⟶ мин. дет. автомат
(възможно най-малко на брой състояния)

1. започваме с детерминиран и <u>тотален</u> автомат → (може и наум)
2. махаме недостижимите състояния
3. разделяме състоянията на 2 класа - крайни и некрайни
4. факторизиране
5. изобразяване автомата

<u>trie</u>



махаме А и т.н.
не го пишем

Б

крайни

4 ъ → Д класа на о → 7 #
6
9 ~~ъ~~ т – Е
11
14 и – Б, ъ – Д
15 т – Е
17
22 ъ → Д
24
27 т → Е
29
#

А

некрайни

1
2
3 р → Б
5 т → Б
7
8 е → Б
10 е → Б
12
13 ъ → Б
16 е → Б
18 т → Б
19
20
21 р → Б
23 т → Б
25
26 е → Б
28 е → Б
#

В

1 ъ, р, т → Б
2 о → Г
7 ъ → Е
12 о → Ж
19
20 о → Г
25 ъ → Е
#

Г (р)
3 р → З
21 р → З

Д не го пишем
5 т → И
18 т → И
23 т → И

Е
8
10
16
26
28

$\boxed{\text{Ж } 13}$

З
4 ъ → П
22 ъ → П
о → О

И крайни
6
11
17
24
29
19
#

К
9 т → Т
15 т → Т
27 т → Т

$\boxed{\text{Л } 14}$

М т→Н
р→О
1 б→Н
19
#

Н
2 о→Г
20 о→Г

О
7в-с
25в→с

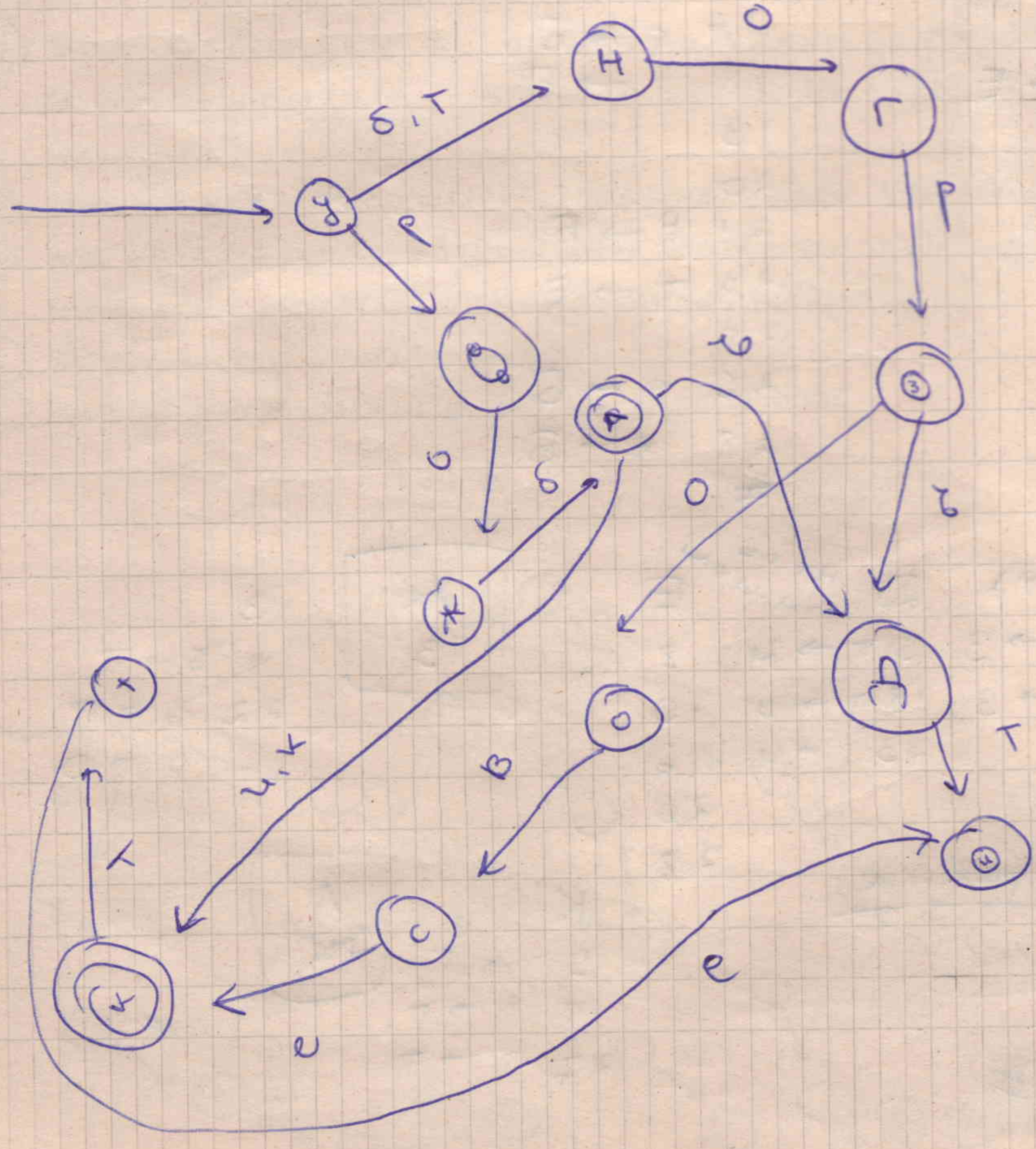
$\boxed{\text{О 12}}$

С
8е→к
26е→к

Т
10е→и
16е→и
28е→и

$\boxed{\text{У 1}}$

$\boxed{\text{Ф \#}}$



произв. дума
$\underbrace{\text{произв.}}$ бр. пъти

.* abc.*

$\Sigma^* abc \Sigma^*$

Регулярен израз, разпознава ест. числа м/у 0 и 255

{0-256} <=> {0, 1, 2, 5, 6}

r = 0* ({0-9} | {0-9} {0-9} | 1 {0-9} {0-9}
| 2 {0-~~9~~4} {0-9} | 25 {0-5})

рег. израз за IP адрес

r {.} r {.} r {.} r

Рег. израз за интернет име

([a-z A-Z 0-9] * {.}) * [a-z A-Z]* [.]

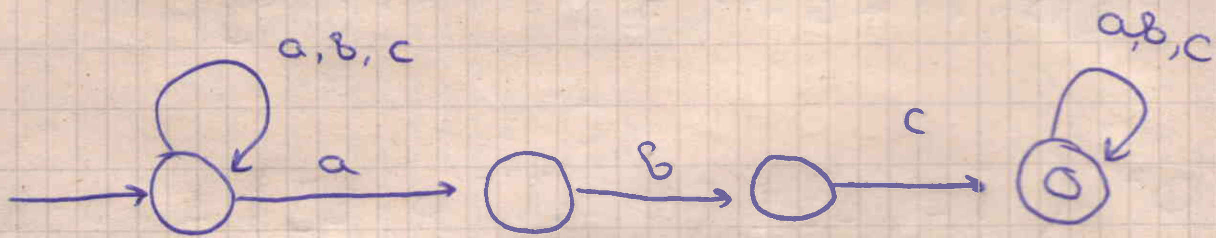
{^.} - ∀ без .

18.12.2013г.

Упражнение

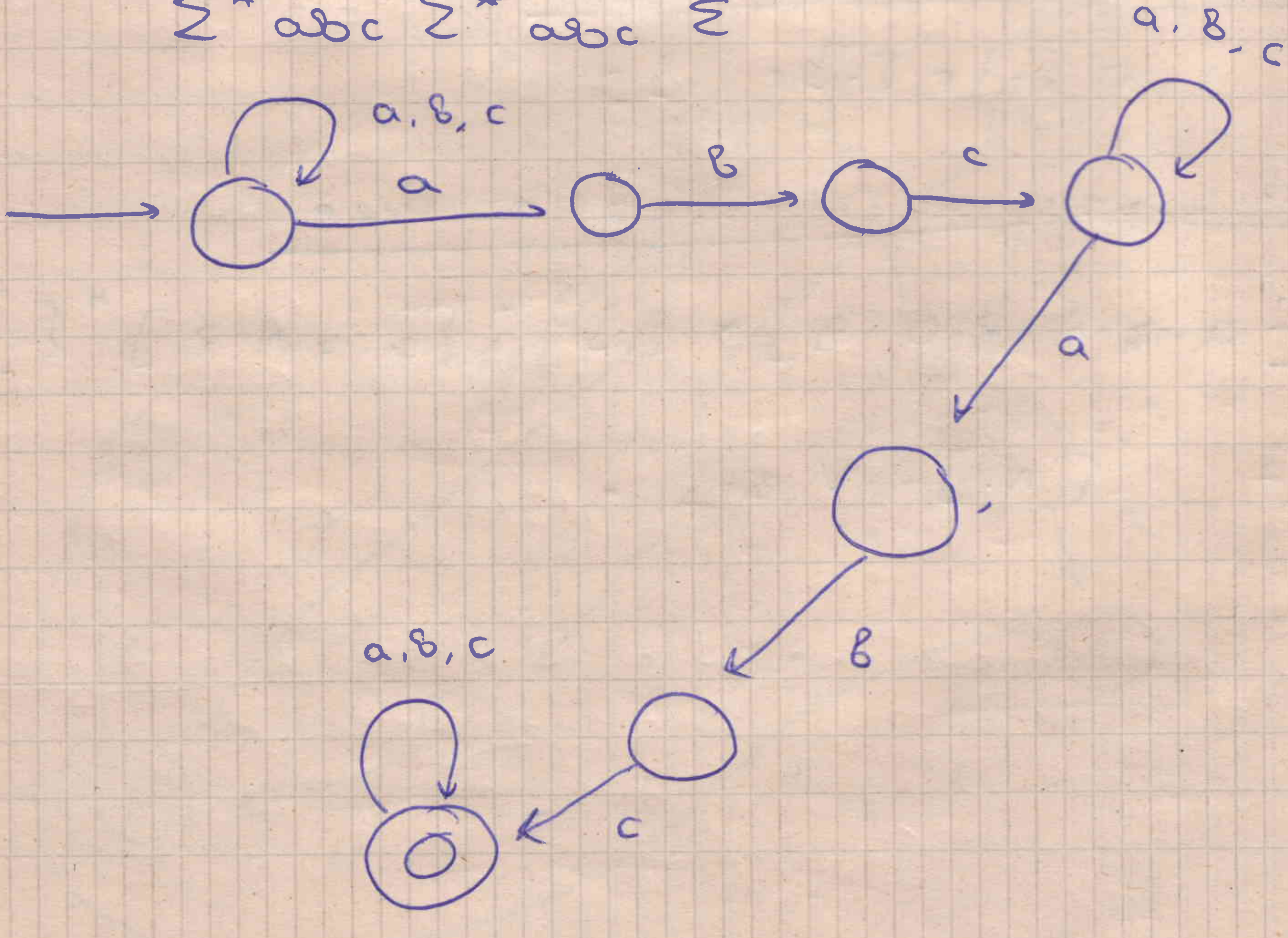
$\Sigma^* abc \Sigma^*$ ∀ думи, които съдържат abc

$.^* abc.^*$



Всички думи, които съдържат abc поне 2 пъти

$\Sigma^* abc \Sigma^* abc \Sigma^*$



∀ думи, които съдържат авс точно веднъж

$\Sigma^* abc$

$R\, abc\, R$

$R = ?$

R - всички думи, които не съдържат авс

$\overline{\Sigma^* abc\, \Sigma^*} \quad \overline{abc\, \Sigma^* abc\, \Sigma^*}$

допълнение

$\Sigma^* abc\, \Sigma^* \setminus \Sigma^* abc\, \Sigma^* abc\, \Sigma^*$

Азбука 0, 1, 2
всички думи, които съдържат 010 точно веднъж

поне едно 010

$\Sigma^* 010\, \Sigma^*$

поне две 010

$\Sigma^* 010\, \Sigma^* 010\, \Sigma^* \cup \Sigma^* 01010\, \Sigma^*$

05.12.2013г.

Лекция

$A_1, A_2 \quad L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$

$A_1 = (Q, q_{01}, \delta_1, F_1)$

$A_2 = (Q, q_{02}, \delta_2, F_2)$

$A = (Q, q_0, \delta, F)$

$\forall \omega \in \Sigma^*$, ако $\omega \neq \varepsilon$, то

$$\delta^*(q_0, \omega) = \delta_1^*(q_{01}, \omega) \cup \delta_2^*(q_{02}, \omega)$$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2, & q_{01} \notin F_2,\ q_{02} \notin F_2 \\ F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\}, & q_{01} \in F_1,\ q_{02} \in F_2 \end{cases}$$

$\forall \omega \in \Sigma^*$, ако $\omega \notin \varepsilon$, то $\omega \in L(A) \Leftrightarrow$

$\delta^*(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta_1(q_{01}, \omega) \cup \delta_2^*(q_{02}, \omega) \cap F \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \quad \delta_1^*(q_0, \omega) \cap F_1 \neq \emptyset$ или $\delta_2^*(q_0, \omega) \cap F_2 \neq \emptyset$

$F_1 \subseteq Q_1 \quad \delta_1^*(q_0, \omega) \subseteq Q_1$

$F_2 \subseteq Q_2 \quad \delta_2^*(q_0, \omega) \subseteq Q_2$

$\Leftrightarrow \omega \in L(A_1)$ или $\omega \in L(A_2) \Leftrightarrow \omega \in L(A_1) \cup L(A_2)$

При това $\varepsilon \in L(A) \Leftrightarrow q_{01} \in F_1$ или

$q_{02} \in F_2 \Leftrightarrow \varepsilon \in L(A_1)$ или $\varepsilon \in L(A_2)$

$\Leftrightarrow \varepsilon \in L(A_1) \cup L(A_2)$

<u>Следствие</u>: Ако L_1 и L_2 са автоматни, то $L_1 \cup L_2$ е автоматен език.

$(\delta = \delta)$

T8. Нека $A_1 = (Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1)$
$A_2 = (Q_2, q_{02}, \delta_2, F_2)$
$(Q_1 \cap Q_2 = \emptyset)$ са автомати над
Σ. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$, където
$Q = Q_1 \cup Q_2$

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & q \in Q_1 \text{ и } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) \cup \delta_2(q_{02}, a) & q \in F_1 \\ \delta_2(q, a), & q \in Q_2 \end{cases}$$

за $a \in \Sigma$ $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & , q_{02} \in F_2 \\ F_2 & , q_{02} \notin F_2 \end{cases}$

Тогава $L(A) = L(A_1) L(A_2)$

Д-во: С индукция по ω ще докажем,
че $\delta^*(q_{01}, \omega) = \delta_1^*(q_{01}, \omega) \cup \left[\bigcup_{\substack{\omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta^*(q_{02}, v) \right]$

1) $\omega = \varepsilon$. Тогава $\bigcup_{\substack{\omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta^*(q_{02}, \omega) = \emptyset$

$\Rightarrow \delta^*(q_{01}, \omega) = \delta^*(q_{01}, \varepsilon) = \delta_1^*(q_{01}, \omega) \cup \{ \bigcup_{\substack{\omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) / F_1 \neq \emptyset \\ v \neq \varepsilon}} \delta_2^*(q_{02}, v)$

2) Нека $\omega \in \varepsilon^*$: $\delta^*(q_{01}, \omega) = \delta_1^*(q_{01}, \omega) \cup$
$\left[\bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ \omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2^*(q_{02}, v) \right]$

Тогава за произволна $a \in \Sigma$ е в сила
$\delta^*(q_{01}, \omega a) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_{01}, \omega)} \delta(q', a) = \bigcup_{q' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega) \cup \bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ \omega = uv;\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2^*(q_{02}, v)}$

$$= \Big[\bigcup_{q' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega)} \delta^*(q', a) \Big] \cup \Big[\bigcup_{\substack{q^* \in \delta^*(q_{02}, v) \\ v \neq \varepsilon \\ \omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}; u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta(q', a) \Big] =$$

$$= \Big[\bigcup_{q' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega)} \delta_1(q', a) \cup \bigcup_{\substack{q' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega) \\ q' \in F_1}} \delta_2(q_{02}, a) \Big] \cup$$

$$\Big[\bigcup_{\substack{q' \in \cup \delta_2 \, q_{02}, v \\ v \neq \varepsilon \\ \omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2(q', a) \Big]$$

$$= \delta_1^*(q_{01}, \omega a) \cup \bigcup_{\substack{q' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega) \\ q' \in F_1}} \delta_2(q_{02}, a) \cup \bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ \omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \\ \cap F_1 \neq 0}} \delta_2^*(q_{02}, va)$$

$$= \delta_1^*(q_{01}, \omega a) \cup \bigcup_{\substack{va \neq \varepsilon \\ \omega = u(va) \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2^*(q_{02}, va)$$

:))

$L(A) = L(A_1) L(A_2)$

? $\varepsilon \in L(A_2)$, т.е. $q_{02} \in F_2$. Тогава $\omega \in L(A)$

$\Leftrightarrow L(A) \Leftrightarrow \delta^*(q_{01}, \omega) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\Big[\delta_1^*(q_{01}, \omega) \cup \bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ \omega = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2^*(q_{02}, v) \Big] \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$$

$\Leftrightarrow$

$\delta_1^*(\ldots) \subseteq Q_1 \qquad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$\delta_2^*(\ldots) \subseteq Q_2 \qquad F_1 \subseteq Q_1$

$F_2 \subseteq Q_2$

$$\delta_1^*(q_{01}, w) \cap F_1 \neq \emptyset \text{ или } \Big(\bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ w = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, w) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2^*(q_{02}, v) \Big] \cap F_2 \neq \emptyset$$

$\Leftrightarrow w \in L(A_1)$ или $w = uv$ за някои $u \in L(A_1)$, $v \in L(A_2)$ и $v \neq \varepsilon \Leftrightarrow w \in L(A_1)L(A_2)$

? $\varepsilon \notin L(A_2)$, т.е. $q_{02} \notin F_2$. Тогава $w \in L(A)$

$$\Leftrightarrow \delta^*(q_{01}, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \Big[\delta_1^*(q_{01}, w) \cup \bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ w = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2^*(q_{02}, v)$$

$$\cap F_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \Big[\bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ w = uv \\ \delta_1^*(q_{01}, u) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_2^*(q_{02}, v) \Big] \cap F_2 = \emptyset$$

$\Leftrightarrow w = uv$ за някои $u \in L(A_1)$, $v \in L(A_2)$ и $v \neq \varepsilon \Leftrightarrow w \in L(A_1)L(A_2)$

<u>Следствие</u>: Ако L_1 и L_2 са автоматни, то L_1L_2 е автоматен.

<u>Тв.</u> Нека $A_1 = (Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1)$ е краен автомат над Σ. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$, където $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$, $q_0 \in Q_1$

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q, a) \cup \delta_1(q_{01}, a) & q \in F_1 \\ \delta_2(q_{01}, a) & q = q_0 \text{ (т.е. ако } q \notin Q_1) \end{cases}$$

$F = F_1 \cup \{q_{01}\}$. Тогава $L(A) = L(A_1)$

Д-во: С индукция по $\omega \neq \varepsilon$ ще докажем, че $\delta^*(q_0, \omega) = \bigcup\limits_{\substack{v \neq \varepsilon \\ \omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-1} v \\ n \geq 1 \\ \forall\, 1 \leq i \leq n-1 \\ \delta_1^*(q_{01}, \omega_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1^*(q_{01}, v)$

1) $\omega = a$ за някое $a \in \Sigma$. Тогава

$$\bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ a = \omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-1} v \\ n \geq 1 \ \forall 1 \leq i \leq n \\ \delta_1^*(q_{01}, \omega_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1^*(q_{01}, a) = \delta_1^*(q_{01}, a)$$

$$= \delta^*(q_{01}, a) = \delta^*(q_0, a)$$

2) Нека $\omega \neq \varepsilon$ е такова, че $\delta^*(q_0, \omega) = \bigcup\limits_{\substack{v \neq \varepsilon \\ \omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-1} v \\ n \geq 1,\ \forall i \\ 1 \leq i \leq n \\ \delta_1^*(q_{01}, \omega_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1^*(q_{01}, v)$ и нека $a \in \Sigma$

Тогава $\delta^*(q_0, \omega a) =$

$$= \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, \omega)} \delta(q', a) = \bigcup_{\substack{q' \in \bigcup \delta_1^*(q_{01}, v) \\ v \neq \varepsilon \\ \omega = \omega_1 \dots \omega_{n-1} v \\ n \geq 1 \ \forall 1 \leq i \leq n \\ \delta_1^*(q_{01}, \omega_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta(q', a)$$

$$= \left[\bigcup_{\substack{q' \notin F_1 \\ q' \in \bigcup \delta_1^*(q_{01}, v)}} \delta_1(q', a) \right] \cup \left[\bigcup_{\substack{q' \in F_1 \\ q' \in \bigcup \delta_1^*(q_0, v) \\ \omega = \omega_1 \dots v \\ n \geq 1, \forall 1 \leq i \leq n}} \delta_1(q_{02}, a) \right] \cup$$

$\cap (\delta_1^*(q_{01}, \omega_i)) \cap F_1 \neq \emptyset$

$$\left[\bigcup_{\substack{q' \notin F_1 \\ q' \in \cup \delta_1^*(q_{01}, v)}} \delta_1(q', a) \right]$$

$$= \left[\bigcup_{\substack{q' \in \delta_1^*(q_{01}, \delta) \\ v \neq \varepsilon \\ w = w_1 w_2 \ldots w_{n-1} v \\ n \geq 1,\ \forall\ 1 \leq i \leq n, \\ \delta_1^*(q_{01}, w_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1(q', a) \right] \cup \left[\bigcup_{\substack{q' \in F_1 \\ q' \in \cup \delta_1^*(q_{01}, v) \\ w = w_1 \ldots w_{n-1} v \\ n \geq 1,\ \forall\ 1 \leq i \leq n \\ \sigma^*(q_{01}, w_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1(q_{02}, a) \right]$$

$$= \bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ w = w_1 w_2 \ldots w_{n-1}\ n \geq 1 \\ \forall\ 1 \leq i \leq n \\ \delta_1^*(q_{01}, w_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1^*(q_{01}, va) \cup \bigcup_{\substack{a \neq \varepsilon \\ w = w_1 \ldots w_{n-1}\ n \geq 2 \\ \forall\ 1 \leq i \leq n \\ \delta_1^*(q_{01}, w_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1^*(q_{01}, a) =$$

$$= \bigcup_{\substack{va \neq \varepsilon \\ w = w_1 \ldots w_{n-1}\ n \geq 1 \\ \forall\ 1 \leq i \leq n\ \ \delta_1^*(q_{01}, w_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1^*(q_{01}, va)$$

$\underline{L(A) = L(A_1)^*}$ $\quad \forall\ w \in \Sigma^*$

$$w \in L(A) \iff \sigma^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \iff$$

$$\Big(w = \varepsilon \text{ или } \big(w \neq \varepsilon \text{ и } \Big[\bigcup_{\substack{v \neq \varepsilon \\ w = w_1 \ldots w_n v\ n \geq 1 \\ \forall\ 1 \leq i \leq n \\ \delta_1^*(q_{01}, w_i) \cap F_1 \neq \emptyset}} \delta_1^*(q_{01}, v) \cap (F_1 \cup \{q_0\}) \Big] \neq \emptyset$$

$\Leftrightarrow w = \varepsilon$ или ($w \neq \varepsilon$ и $w = w_1 \ldots w_n$ за някои $w_1 \ldots w_n \in L(A_1)$)

$\Leftrightarrow w \in L(A_1)^*$

<u>Следствие</u>: Ако L е автоматен, то L^* също е автоматен.

<u>Твърдение</u>: Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тотален и дет. автомат над Σ ($\delta: Q \times \Sigma \to Q$). Нека $A' = (Q, q_0, \delta, Q \setminus F)$. Тогава $L(A') = \overline{L(A)} = (\Sigma^* \setminus L(A))$

Д-во: Имаме $w \in L(A) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, w) \in F$, което е еквив. на $w \notin L(A) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, w) \notin F$ за $w \in \Sigma^*$. Т.к. A е <u>тотален</u> (и дет.) за $\forall w \in \Sigma^*$, $\delta^*(q_0, w) \in Q$ и сл. $w \in \Sigma^* \setminus L(A) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, w) \in Q \setminus F$. Оттук $\overline{L(A)} = L(A')$

<u>Следствие 1</u>: Ако L е автоматен, то $\Sigma^* \setminus L$ също е автоматен.

<u>Следствие 2</u>: Ако L_1 и L_2 са автоматни, то $L_1 \cap L_2$ е автоматен.

Д-во: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

<u>Тв.</u> Н $A_1 = (Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1)$, $A_2 = (Q_2, q_{02}, \delta_2, F_2)$ са кр. автомати над Σ.
Н $A = (Q, q_0, \delta, F)$, където $Q = Q_1 \times Q_2$, $q_0 = (q_{01}, q_{02})$, $\delta((q_1, q_2), a) = \delta_1(q_1, a) \times \delta_2(q_2, a)$

$F = F_1 \times F_2$. Тогава $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Д-во: С ММИ по ω ще док., че

$\delta^*(q_0, \omega) = \delta_1^*(q_0, \omega) \times \delta_2^*(q_0, \omega)$

(1) $\omega = \varepsilon$. Тогава $\delta^*(q_0, \omega) = \{q_0\} =$
$= \{(q_{01}, q_{02})\} = \{q_{01}\} \times \{q_{02}\} =$
$= \delta_1^*(q_{01}, \omega) \times \delta_2^*(q_{02}, \omega)$

(2) $\exists\ \omega \in \Sigma^*$ е такава, че $\delta^*(q_0, \omega) =$
$= \delta_1^*(q_{01}, \omega) \times \delta_2^*(q_{02}, \omega)$ и нека $a \in \Sigma$.

Тогава $\delta^*(q_0, \omega) = \bigcup\limits_{q \in \delta^*(q_0, \omega)} \delta(q, a) =$

$= \bigcup\limits_{q' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega) \times \delta_2^*(q_{01}, \omega)} \delta(q', a) =$

$= \bigcup\limits_{\substack{q_1' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega) \\ q_2' \in \delta_2(q_{02}, \omega)}} \delta((q_1', q_2'), a) = \bigcup\limits_{\substack{q_1' \in \delta_1^*(q_{01}, \omega) \\ q_2' \in \delta_2^*(q_{02}, \omega)}} \delta(q_1', a) \times \delta_2(q_2', a) =$

$= \bigcup \delta_1^*(q_{01}, \omega_0) \times \delta_2^*(q_{02}, \omega_0)$

$\underline{L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)}$: Имаме $\omega \in L(A)$
$\Leftrightarrow \delta^*(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow [\delta_1^*(q_{01}, \omega) \times$
$\delta_2^*(q_{02}, \omega)] \cap [F_1 \times F_2] \neq \emptyset \Leftrightarrow$
$\delta_1^*(q_{01}, \omega) \cap F_1 \neq \emptyset$ и $\delta_2^*(q_{02}, \omega) \cap F_2 \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow \omega \in L(A_1) \cap L(A_2)$

δ_1	0	1
a	a, b	a
b	$\emptyset$	b

δ_2	0	1
c	$\emptyset$	c, d
d	$\emptyset$	c

δ	0	1
(a, c)	$\emptyset$	(a, c), (a, d)
(a, d)	$\emptyset$	(a, c)
(b, c)	$\emptyset$	(b, c), (b, d)
(b, d)	$\emptyset$	(b, c)

12.12.2013 г.

Лекция

№12 Регулярни езици. Теорема на Клини

Опр. Класът на регулярните езици ~~а най~~ над азбука Σ е най-малкото Θ $R \subseteq P(\Sigma^*)$, което съдържа крайните езици и е затворено относно операциите $\cup$, $\cdot$ и $*$. С други думи: регулярните езици над Σ могат да се дефинират ~~в~~ чрез следната инд. деф.

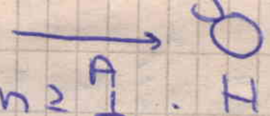
(1) Всеки краен език е регулярен

(2) Ако L_1 и L_2 са регулярни, то

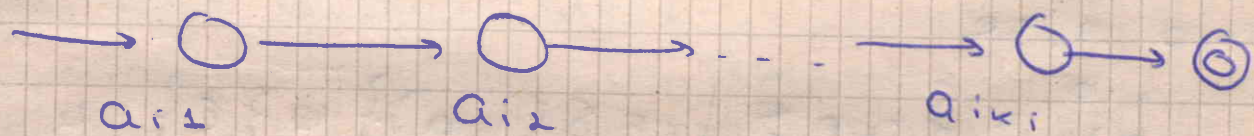
$L_1 \cup L_2$ и $L_1 L_2$ са регул.
(3) Ако L е регулярен, то L^* също е регулярен.

<u>Лема 1</u> $\forall$ регулярен език е автоматен

Д-во: С индукция по рег. езици
(i) <u>Всеки краен език е автоматен</u>:
Нека L е краен език
<u>1сл.</u> $L = \emptyset$. Тогава $L = L(A)$, където
A е автоматът



<u>2сл.</u> $L = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $n \geq 1$. Нека
$L_i = \{w_i\}$. Нека още w_i е
думата $a_{i1} a_{i2} \dots a_{ik_i}$, където
a_{ij} са букви. Тогава за $k < i < n$
$L_i = L(A_i)$, където



Т.к. автоматните езици са затворени относно обединение, L е автоматен.
(ii) Ако L_1 и L_2 са автоматни, то
$L_1 \cup L_2$ и $L_1 L_2$ са автоматни: доказано
(iii) Ако L е автоматен, то L^* е
автоматен: доказано.

<u>Лема 2</u>: $\forall$ автоматен език е
регулярен.
Д-во: Нека L е език над Σ и $L = L(A)$,

където $A = (Q, q_0, \delta, F)$. Нека $Q = \{0, 1, \dots, n\}$ $n \geq 0$. и $q_0 = 0$. Разглеждаме ~~автомата~~ графа G_A на автомата A. Нека за $0 \leq k \leq n+1$, $i \geq 0$, $j \leq n$ L_{ij}^k да бъде езикът, състоящ се от онези думи ω, за които съществува път в G_A с начало i, край j, прочитащ думата ω и неминаващ през състояние с номер по-голям или равен на k, т.е.

$$L_{ij}^k = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega = a_1 a_2 \dots a_n, n \geq 0, \; a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$$

$i a_1 s_1 a_2 s_2 \dots a_{n-1} s_{n-1} a_n j_n$ в G_A е такъв, че $s_1, s_2, \dots, s_{n-1} < k$.

Ясно е, че

$$L_{ii}^0 = \{a \in \Sigma \mid i \in \delta(i, a)\} \cup \{\varepsilon\} \quad \text{и}$$

$$L_{ij}^0 = \{a \in \Sigma \mid j \in \delta(i, a)\} \quad i \neq j$$

$\Rightarrow L_{ij}^0$ е краен за всяко i, j и знаем L_{ij}^0 е регулярен

Ще докажем, че за $\forall$ $0 < k \leq n$ и вс. $0 \leq i, j \leq n$

$$L_{ij}^{k+1} = L_{ij}^k \cup L_{ik}^k L_{kk}^{k*} L_{kj}^*$$

Д-во: Нека $w \in L_{ij}^{k+1}$. Нека $w = a_1 a_2 \dots a_n$, където $n \geq 0$ и $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$. Тогава в G_A има път

$$i a_1 s_1 a_2 s_2 \dots a_{n-1} s_{n-1} a_n j,$$ такъв

че за $1 \leq t \leq n-1$

$$s_t < k+1, \text{ т.е. } s_t \leq k$$

1сл. За $\forall$ $1 \leq t \leq n-1$ $s_t < k$. Тогава $w \in L_{ij}^{k}$

2сл. $s_t = k$ за някое t. Нека $m_1 < m_2 \dots m_p$ са $\forall$ онези числа м/у 0/и/1 1 и $n-1$ такива че

$$s_{m_1} = s_{m_2} = \dots = s_{m_p} = k$$

Нека $w_1 = a_1 a_2 \dots a_{m_1}$

$w_2 = a_{m_1+1} a_{m_1+2} \dots a_{~~m~~n}$

Тогава $w = w_1 w_2 \dots w_{p+1}$. При това пътят

$$k = s_{m_q} a_{m_q} s_{m_q+1} \dots a_{m_{q+1}} s_{m_{q+1}} = k$$

не съдържа състояния освен началното и крайното, по-големи или равни на k. ~~Следователно~~

Оттук $w_1 \in L_{ij}^{k}$, $w_2 \in L_{kk}^{k} \dots$, $w_p \in L_{kk}^{*}$ и $w_{p+1} \in L_{kj}$ $\Rightarrow w \in L_{ik}^{k} L_{kk}^{k\,*} L_{kj}^{k}$

Обратно, Очевидно $L_{ij}^{k} \subseteq L_{ij}^{k+1}$

$L_{ik} L_{jk}^{k} {}^{*} L_{jk}^{k} \subseteq L_{ij}^{k}$. Нека

$w \in L_{ik} L_{kk}^{k} {}^{*} L^{k}_{kj}$. Тогава

$w = w_1 \ldots w_{n+1}$, където $w_1 \in L_{ik}^{k}$,

$w_2, \ldots w_n \in L_{kk}^{k}$, $w_{n+1} \in L_{jk}^{k}$.

Тогава има път

$i a_{11} s_{11} a_2 s_{12} \ldots a_{1m_1} k$, $a_{11} a_{12} \ldots a_{1m_1} = w_1$

$k a_{21} s_{21} a_{22} s_{22} \ldots a_{2m_2} k$, $a_{21} a_{22}, \ldots a_{2m_2} = w_2$

$\vdots$

$k a_{n1} s_{n1} \ldots a_{nm_n} k$ $a_{n1}, \ldots a_{nm_n} = w_n$

$k a_{n+1} s_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+1 m_{n+1}} j$, $a_{n+1} \ldots a_{n+1 m_{n+1}}$
$= w_{n+1}$

където $a_{ij} \in \Sigma$ и $s_{ij} < k$.

$\Rightarrow$ има път $i a_{11} s_{11} \ldots a_{1m_1} k a_{21} \ldots a_{2m_2} k \ldots$
$\ldots k a_{n1} \ldots k a_{n+1} \ldots a_{n+1 m_{n+1}} j$ в G_A.
и $\Rightarrow w \in L_{ij}^{k+1}$:)) (*)

От това, че L_{ij} е регулярен и (*)
$\Rightarrow L_{ij}^{k}$ е регулярен за $\forall$

$0 \le k \le n+1$

В частност, L_{ij}^{n+1} е регулярен за $\forall i$.

Но $L(A) = \bigcup_{i \in F} L_{0i}^{n+1}$ и т.к. F е крайно, получаваме, че L е регулярен.

Th на Клини

Един ~~автомат~~ език е регулярен $\Leftrightarrow$ е автоматен

№ 13

Минимални автомати

Опр. Нека A_1 и A_2 са автомати над Σ. Ще казваме, че A_1 и A_2 са $\Leftrightarrow$ $A_1 \equiv A_2$, ако $L(A_1) \equiv L(A_2)$

Опр. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тотален детерминиран автомат над Σ ($\delta : Q \cdot \Sigma \to Q$) Ще казваме, че състоянието $q \in Q$ е достижимо, ако $\exists$ дума $w \in \Sigma^*$, такава че

$$\delta^*(q_0, w) = q.$$

В противен случай q е недостижимо.

Тв. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тотален детерминиран автомат и

$q \in Q$ е недостижимо. Тогава автоматът $A_1 = (Q \setminus \{q\}, q_0, \delta_1, F \setminus \{q\})$, където $\delta_1(q', a) = \{\delta(q, a)\} \setminus \{q\}$ е дет. автомат, такъв че $A \equiv A_1$.

Д-во: Тъй като $\forall\, \omega \in \Sigma^*$, $\delta^*(q_0, \omega) \neq q$, то $\delta^*(q_0, \omega) = \{\delta^*(q_0, \omega)\}$:

с индукция по ω:

(1) $\omega = \varepsilon$

$$\delta_1^*(q_0, \varepsilon) = \{q_0\} = \{\delta^*(q_0, \varepsilon)\}$$

(2) Нека ω е такава, че $\delta^*(q_0, \omega) = \{\delta_1(q_0, \omega)\}$. Тогава за $\forall$ буква $a \in \omega$,

$$\delta_1^*(q_0, \omega) = \bigcup_{q_0 \in \delta_1^*(q_0, \omega)} \delta_1(q, a) = \delta(\delta^*(q_0, \omega), a)$$

$$= \{\delta(\delta^*(q_0, \omega), a)\}, \{q\} = \{\delta^*(q_0, \omega a)\} \setminus \{q\}$$

Т.к. q е недостижимо

$$\delta^*(q_0, \omega a) \neq q$$

$$\delta_1^*(q_0, \omega a) = \{\delta^*(q_0, \omega a)\} \neq \emptyset$$

Оттук $L(A_1) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \delta_1^*(q_0, \omega) \cap F_1$

$$= \{\omega \mid \{\delta^*(q_0, \omega)\} \cap (F \setminus \{q\}) \neq \emptyset\} =$$

$= \{\omega \mid \delta^*(q_0, \omega) \in F\} = L(A)$.

Забележка: Ако последователно премахнем всички недостижими състояния в тотален и дет. автомат A ще получим автомат

$A' = (Q', q_0, \delta', F')$, еквив. на A, който няма недостижими състояния и такъв, че $\delta^*(q_0, \omega) = \{\delta^*(q_0, \omega)\}$ за вс. $\omega \in \Sigma^*$. В частност, A' е тот. и детерминиран автомат.

Опр. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тотален детерминиран автомат без недостижими състояния. Ще казваме, че състоянията $q_1, q_2 \in Q$ са екв. $q_1 \sim q_2$, ако $\{\omega \mid \delta^*(q_1, \omega) \in F\} = \{\omega \mid \delta^*(q_2, \omega) \in F\}$

Тв. 2 Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тотален детерминиран автомат над Σ без недостижими състояния. Нека $q_1, q_2 \in Q$ са такива, че

$q_1 \sim_A q_2$ и $q_2 \neq q_0$. Тогава

$A_1 = (Q \setminus \{q_2\}, q_0, \delta_1, F \setminus \{q_2\})$, където

$$\delta_1(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a), & \text{ако } \delta(q,a) \neq q_2 \\ q_1, & \text{ако } \delta(q,a) = q_2 \end{cases}$$

за $q \in Q \setminus \{q_2\}$ и $a \in \Sigma$ е тот. дет. автомат, екв. на A

Д-во: Очевидно A_1 е тотален детерминиран автомат

$\underline{L(A) = L(A_1)}$: Нека $L_1 = \{w \mid \delta^*(q_0, w) \in F$ и $\forall u, v \mid w = uv \Rightarrow \delta^*(q_0, u) \neq q_2\}$

Нека $L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, u) = q_2\}$ и

$L_3 = \{v \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_2, v) \in F\}$

Тогава $L(A) = L_1 \cup L_2 L_3$ и $L_1 \cap L_2 L_3 = \emptyset$

Ясно е, че $L_1 \subseteq L(A_2)$. Твърдим, че

$L_2 \subseteq \{u \in \Sigma^* \mid \delta_1^*(q_0, u) = q_1\}$

(на ново сл. път)

19. 12. 2013г.

Лекция

Опр. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е краен, дет. и тотален автомат. Въвеждаме рел. $\sim_A$ в Q чрез $q_1 \sim_A q_2 \iff \forall u \in \Sigma^* (\delta^*(q_1, u) \in F \iff \delta^*(q_2, u) \in F)$

Ясно е, че $q_1 \sim_A q_2 \Rightarrow q_2 \sim_A q_1$ и $q_1 \sim_A q_2$ & $q_2 \sim_A q_3 \Rightarrow q_1 \sim_A q_3$ за $\forall q_1, q_2, q_3 \in Q$. Сл. $\sim_A$ е рел. на екв.

Лема 2 Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е кр. дет. и тотален автомат над Σ. Нека $w_1, w_2 \in \Sigma^*$. Тогава

$$\delta^*(q_0, w_1) \sim_A \delta^*(q_0, w_2)$$

$$\iff w_1 \sim_{L(A)} w_2$$

Д-во: Нека $q_1 = \delta^*(q_0, w_1)$, $q_2 = \delta^*(q_0, w_2)$ за $\forall u \in \Sigma^*$ имаме

$$\delta^*(q_i, u) = \delta^*(\delta^*(q_0, w_i), u) =$$
$$= \delta^*(q_0, w_i u) \text{ за } i = 2.$$

От тук $\delta^*(q_i u) \in F \iff$

$$\delta^*(q_0, w_i u) \in F \iff$$

$$w_i u \in L(A) \text{ за } i = 1, 2.$$

Сл. $q_1 \sim_A q_2 \iff \forall u \in \Sigma^* (\delta^*(q_1, u) \in F \iff \delta^*(q_2, u) \in F) \iff \forall u \in \Sigma^* (w_1 u \in L(A) \iff w_2 u \in L(A)) \iff w_1 \underset{L(A)}{\sim} w_2$

Следствие: Ако $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен, то $\sim_L$ е с краен индекс.

Д-во: Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е рег. и нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тотален и дет. кр. автомат такъв, че $L(A) = L$.

~~Твърдим, че~~ От Лемата имаме, че

$$[w_1]_{\sim_L} \neq [w_2]_{\sim_L} \Leftrightarrow \delta^*(q_0, w_1) \neq \delta^*(q_0, w_2)$$

за вс. $w_1, w_2 \in \Sigma^*$. Сл. броят на ел. на $\Sigma^* / \sim_L$ не надминава броят на ел. на Q. Т.к. Q е крайно, $\Sigma^* / \sim_L$ е крайно, т.е. $\sim_L$ има кр. индекс.

Така док. следната Th

Th: Нека $L \subseteq \Sigma^*$. Тогава L е рег. $\Leftrightarrow$ $\sim_L$ има краен индекс.

Опр. Нека $A_1 = (Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1)$, $A_2 = (Q_2, q_{02}, \delta_2, F_2)$ са (тот. и дет.) кр. автомати над Σ. Нека $\varphi : Q_1 \rightarrow Q_2$. Ще казваме, че φ е изоморфизъм, ако

(1) φ е биекция

(2) $\varphi(q_{01}) = q_{02}$

(3) $\varphi(\delta_1(q, a)) = \delta_2(\varphi(q), a)$ за $\forall\, q \in Q_1$ и $a \in \Sigma$

(4) $\varphi[F_1] = F_2$

Th Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен. Нека A е краен детерминиран и тотален автомат над Σ, такъв че $L(A) = L$. Тогава бр. на състоянията на A_L не надминава бр. на състоянията на A. При това, ако бр. на състоянията на A_L съвпада с бр. на състоянията на A, то A_L и A са изоморфни (т.е. същ. изоморфизъм м/у A_L и A)

D-во. Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен и нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тот. и дет. автомат над Σ с $L(A) = L$. Нека $w_0 = \varepsilon, w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*$, такива че $[w_i]_{\sim_L} \neq [w_j]_{\sim_L}$ за $i \neq j$ и за вс. $w \in \Sigma^*$ ако

$$|w| < |w_i|, \text{ то } w \notin [w_i]_{\sim_L}$$

и $\Sigma^*/_{\sim_L} = \{[w_i]_{\sim_L} \mid 0 \leq i \leq n\}$. Да разгледаме изображението:

$$\varphi : \Sigma^*/_{\sim_L} \longrightarrow Q$$

дефинирано чрез $\varphi([w_i]_{\sim_L}) = \delta^*(q_0, w_i)$ за $0 \leq i \leq n$.

<u>φ е инекция</u>: Нека $0 \leq i \leq j \leq n$

Тогава $[w_i]_{\sim_L} \neq [w_j]_{\sim_L}$, т.е.

$$w_i \not\sim_L w_j$$

Оттук $\delta^*(q_0, w_i) \not\sim_A \delta^*(q_0, w_j)$,
откъдето $\delta^*(q_0, w_i) \neq \delta^*(q_0, w_j)$

От ~~инж~~ инекция следва, че броят на ел. на Q е по-голям или равен на бр. на ел. на $\Sigma^*/\sim_L$, $\|\Sigma^*/\sim_L\|$
Нека сега $\|Q\| = \|\Sigma^*/\sim_L\|$ твърдим, че φ е изоморфизъм:
(1) φ е биекция: следва от φ-инекция, $\|Q\| = \|\Sigma^*/\sim_L\|$ и това, че $\|Q\|$ е кр. число.

деф.

(2) $\underline{\varphi([\varepsilon]_{\sim_L}) = q_0}$: $\varphi([\varepsilon]_{\sim_L}) = $
$= \varphi([w_0]_{\sim_L}) = \delta^*(q_0, w_0) = \delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

(3) $\underline{\varphi(\delta_L([w_i]_{\sim_L}, a)) = \delta(\varphi([w_i]_{\sim_L}), a)}$:

Имаме
$$\varphi(\delta([w_i]_{\sim_L}, a)) = \varphi([w_i a]_{\sim_L}).$$
Нека $0 \leq j \leq n$ е такова, че
$w_i a \sim_L w_j$. Тогава
$$\varphi(\delta[w_i]_{\sim_L}, a)) = \delta^*(q_0, w_j).$$ От друга страна $\delta(\varphi([w_i]_{\sim_L}, a)) =$
$= \delta(\delta^*(q_0, w_i), a) = \delta^*(q_0, w_i a)$
Твърдим, че $\underline{\delta^*(q_0, w_j) = \delta^*(q_0, w_i a)}$:

Нека $q = \delta^*(q_0, w_i a)$. Т.к. φ е биекция $q = \varphi([w_k]_{\sim_L})$ за някое $0 \leq k \leq n$.

Ако доп., че $k \neq j$ ще получим, че
$\omega_j \not\sim_L \omega_k$, т.е. $\omega_j \not\sim \omega_i a$, което
противоречи на избора на j.
Сл. $j = k$, т.е.

$$\varphi(\{\omega_j\}_{\sim L}) = q = \delta^*(q_0, \omega_i a)$$

(4) $\underline{\varphi[F_L] = F}$: $[\omega_i]_{\sim L} \in F_L \iff \omega_i \in L \iff$
$\delta^*(q_0, \omega_i) \in F \iff \varphi(\{\omega_i\}_{\sim L}) \in F$ за
$0 \leq i \leq n$.

<u>Следствие</u>: Нека L е рег. Тогава с точност до изоморфизъм
A_L е единственият тотален краен автомат, разпознаващ L дет. и имащ минимално възможен бр. състояния.

08.01.2014г.

Упражнение

$\forall$
$\exists$
квантори

$\boxed{\underbrace{\forall x \forall y \forall z}_{\forall j} \forall \underbrace{\exists \exists}_{\exists}}(\underbrace{---}_{\text{няма квантори}})$ — пренексна нормална форма

$\boxed{\begin{array}{l} \Pi_5 \to \forall \exists \forall \exists \forall (---) \\ \Sigma_5 \to \exists \forall \exists \forall (---) \end{array}}$

D_5 може и с $\forall$, и със $\exists$

! Лема: $\forall L$ - рег. авт. $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall w \in L : |w| \geq n$
$\exists\, xyz\ (w = xyz$ и $y \neq \varepsilon$ и $|xy| < n$
и $\forall i : (xy^i z \in L))$

- $\forall L$-рег.
- $\exists\, n \in \mathbb{N}$
- $\forall\, w \in L$
  $|w| \geq n$
- $\exists\, xyz$
  $w = xyz$
  $|y| \neq 0$

$|xy| < n$

- $\forall i : xy^i z \in L$

П5 - не може по-сложно от Пг

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен

Да допуснем, че L е регулярен

Прилагаме Лемата

От лемата получаваме n

$$w = a^n b^n$$

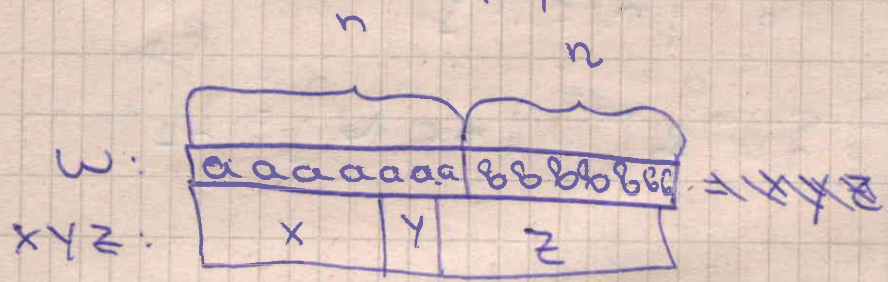
Разбира се $w \in L$ и $|w| = 2n \geq n$

От лемата получаваме думи $x\,y\,z$

$$w = a^n b^n = xyz$$

$$y \neq \varepsilon$$

$$|xy| < n$$



$$x = a^k$$

$$y = a^l$$

$$z = a^{n-k-l} b^n$$

$\forall i \quad x y^i z \in L$

$$a^k \cdot a^{il} a^{n-k-l} b^n \in L$$

$$a^{k+il+n-\cancel{k}-l} b^n \in L$$

$$\Downarrow$$

$$a^{(i-1)l+n} b^n \in L$$

$$\forall i$$

$$y \neq \varepsilon \Rightarrow l \neq 0$$

$$\Rightarrow (i-1)l \neq 0$$

при почти $\forall i$

$$\Rightarrow (i-1)l+n \neq n$$

при почти $\forall i$

пра прот. с $xy^iz \in L$

$\underline{\text{II}}$ начин

$$\varepsilon \in L$$

$$a^{-1}L = \{a^{n-1} b^n \mid n \geq 1\} =$$

$$= \{a^n b^{n+1} \mid n \in N\} = L_1 \quad \varepsilon \cancel{\notin}$$

$$a^{-1}L_1 = \{a^n b^{n+2} \mid n \in N\} = L_2 \not\ni \varepsilon$$

$$a^{-1}L_2 = L_3$$

$\vdots$

безброй много

$\Rightarrow$ нема кр. автомат

$b^{-1}L = \varnothing \quad \varepsilon$

$b^{-1}L_1 = \{b\} = M_1$

$b^{-1}L_2 = \{bb\} = M_2$

$b^{-1}L_3 = M_3 = \{bbb\}$ и т.н.

$a^{-1}M = \varnothing$

$a^{-1}M_1 = \varnothing$

$\vdots$

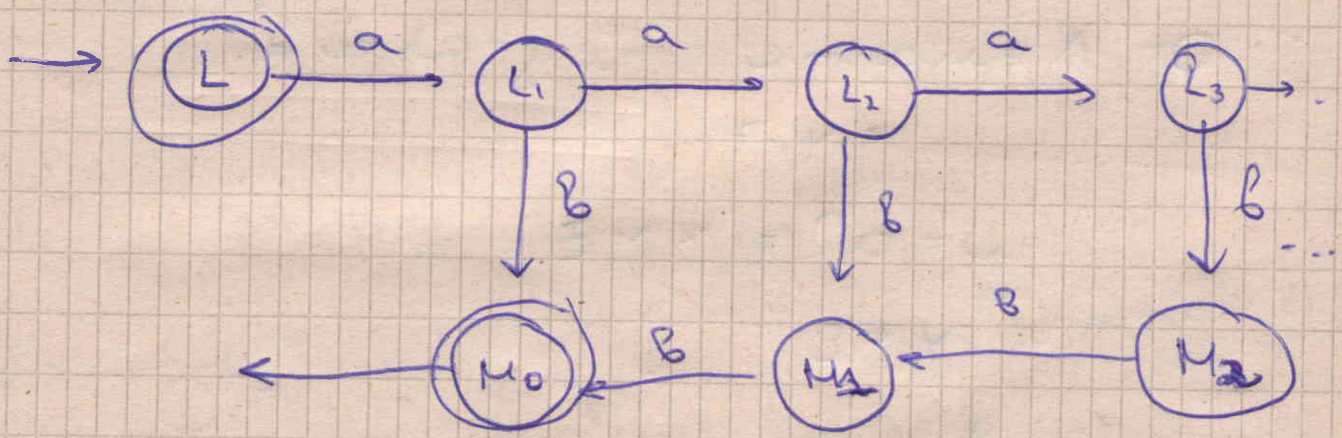
$b^{-1}M_1 = \cancel{\{\varepsilon\}} = M_0$

$b^{-1}M_3 = \{b\} = M_2$

$b^{-1}M_4 = M_3$

$\vdots$

$a^{-1}M_0 = b^{-1}M_0 = \varnothing$



Зад. $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

не е регулярен

$xy^i z \in L$

$L' = (a^* b^*) \setminus L = \{a^n b^n \mid n = m\}$

езикът от предната зад.

Зад. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

ДСД, че не е регулярен

Д-во: Доп., че е регулярен и прилагаме лемата за L

От лемата получаваме n.

Нека $w = a^{n^2}$

Ясно е, че $w \in L$ и $|w| = n^2 \geq n$

От лемата получаваме

x, y, z

$w = a^{n^2} = xyz$

$y \neq \varepsilon$

$|xy| < n$

$x = a^k$

$y = a^l$

$z = a^{n^2 - k - l}$

$\ell(i-1) = (m-n)(m+n)$

$\forall i \quad xy^iz \in L$

$a^k a^{\ell i} a^{n^2-k-\ell} \in L \quad \forall i$

$a^{\cancel{k}+\ell i+n^2-\cancel{k}-\ell} \in L \quad \forall i$

$\forall i: a^{n^2+\ell(i-1)} \in L$

$\Rightarrow \ell(i-1)+n^2$ е точен кв.

при $i=j$

$i=j+1$

Граматики

- Множество от терминални символи → малки букви (символи от нашата азбука)
- Множество от нетерминални символи → главни букви (служебни символи)
- начален символ → S
- крайно множество от правила

правило:

$\boxed{\text{думи}} \rightarrow \boxed{\text{думи}}$

зад. (1) $S \rightarrow aSb$

(2) $S \rightarrow \varepsilon$

$S \xrightarrow{1} aSb \xrightarrow{1} aaSbb \xrightarrow{1} aaaSbbb$

$S \xrightarrow{2} \varepsilon$

$aSb \xrightarrow{2} ab$

$aaSbb \xrightarrow{2} aabb$

*

Езикът е $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Съкращение $S \to aSb \mid \varepsilon$

$S \to ab$

$ab \to aabb$

$\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

безконтекстна?

$S \to H \mid ab$

$H \to aSb$

$S \to aSb \mid ab$

$\{a^n b^m \mid n \geq m\}$

$S \to aS \mid b \longrightarrow \{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$

$S \to aS \mid aSb \mid \varepsilon$

S — $a^n S b^m \quad n \geq m$

 — $a^n b^m$

$K = \{a^n S b^m, \ a^n b^m \mid n \geq m\}$

$S \in K$

Ако приложим $S \to aS$ към

$a^n S b^m$ и получаваме

$a^{n+1} S b^m \in K$

Ако $S \to aSb$

$a^{n+1} S b^{m+1} \in K$

$S \to \varepsilon$

$a^n b^m \in K$

$S \to aSb \mid T$

$T \to aT \mid \varepsilon$

$a^m S b^m$

$a^m T b^m$

$a^{m+i} T b^m$

зад. $\{a^n b^m \mid n > m\}$

$S \to aH$
$H \to aHb \mid aH \mid \varepsilon$

или

$S \to aSb \mid aS \mid a$

или

$S \to aSb \mid aT$
$T \to aT \mid \varepsilon$

или

$S \to aH$
$H \to aHb \mid T$
$T \to aT \mid \varepsilon$

или

$S \to aSb \mid T$
$T \to aT \mid a$

зад.

$\{a^n b^m \mid n \neq m\} = \{a^n b^m \mid n > m\} \cup \{a^n b^m \mid n < m\}$

$S' \to aS'b \mid aS' \mid a$

$S'' \to aS''b \mid S''b \mid b$

$S = S' \mid S''$

зад. $\{a^n b^m c^{n+m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

$a^n b^m c^{n+m} = a^n b^m c^m c^n$

$S \to aSc \mid T$

$T \to bTc \mid \varepsilon$

зад. $\{a^n b^{n+m} c^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

$\overbrace{a^n b^n}^{N} \underbrace{b^m c^m}_{M}$

$S \to abS$

$S \to NM \mid \varepsilon$

$N \to aNb \mid \varepsilon$

$M \to bMc \mid \varepsilon$

зад. $\{a^{2n+3m+5} b^{2m+7k+3} \cdot c^{3l+i+4} d^{8n+5i+2} \mid n, m, k, l, i \in \mathbb{N}\}$

$a^5 \cdot a^{2n}$

''

$a^{2n+5} \cdot a \cdot a^m \cdot a^{2m} \cdot b^{2m} \cdot b^{7k+3} \cdot c^{3l+4} \cdot c^i \cdot d^i \cdot d^{8n+4i+2}$

$\underbrace{\underbrace{a^{2n} \cdot a^5 \cdot \cancel{a} \cdot \underbrace{a^{3m} \, b^{2m}}_{M} \, \underbrace{b^{7k}}_{K} \cdot b^3 \cdot \underbrace{c^{3l}}_{L} \cdot c^3 \cdot \underbrace{c^i \cdot d^{5i}}_{I} \cdot d^{8n}}_{N} \cdot \cancel{d} \, d^2}_{S}$

$S \rightarrow Nd^2$

$N \rightarrow a^2 N d^8 \mid a^5 M K b^3 L c^3 I$

$M \rightarrow a^3 M b^2 \mid \varepsilon$

$K \rightarrow b^7 K \mid \varepsilon$

$L \rightarrow c^3 L \mid \varepsilon$

$I \rightarrow c I d^5 \mid \varepsilon$

зад. $\{a^n b^m \mid n > 2m\}$

$$a^n b^m = \underbrace{\underbrace{a^i}_{I} \cdot a \cdot \underbrace{a^{2m} b^m}_{M}}_{S}$$

$M \Rightarrow a^2 M b \mid \varepsilon$

$I \Rightarrow a I \mid \varepsilon$

$S \Rightarrow I a M$

$\{a^n b^m \mid n \leq 2m\}$

$m \geq \frac{n}{2}$

$a^n b^m = a^n b^{\frac{n}{2}} \cdot b^i$

Ако $n = 2k$

$a^n b^m = a^{2k} \cdot b^m =$

$$= \underbrace{a^{2k} \cdot b^k b^i}_{\text{можем}}$$

Ако $n \neq 2k$

$n = 2k + 1$

$n \leq 2m \Leftrightarrow 2k + 1 \leq 2m$

$2k + 2 \leq 2m$

$k + 1 \leq m$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k < m$

$$a^n b^m = \underbrace{a^{2k+1} \quad b^{k+1+j}}_{\text{може :))}}$$

$S \to S' \mid S''$

$S' \to kI$

$K \to a^2Kb \mid \varepsilon$

$I \to bI \mid \varepsilon$

$$\underbrace{a^{2k} \cdot a \cdot b^k}_{k} \, \underbrace{b \, b^{j}}_{J}$$

$S'' \to KbJ$

$K \to a^2Kb \mid a$

$J \to bJ \mid \varepsilon$

09.01.2014 г.

Лекция

№14 Контекстно свободни граматики и езици

Деф. Под контекстно свободна граматика ще разбираме всяка наредена четворка $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$, където Γ и Σ са крайни азбуки, $\Gamma \cap \Sigma = \emptyset$, $S \in \Gamma$ и

$R \subseteq \Gamma \times (\Gamma \cup \Sigma)^*$ е крайно. Елементите на Γ наричаме нетерминални символи, елементите на Σ - терминални символи, S - начален символ, R - правила на граматиката. Вместо $(A, \omega) \in R$ пишем $A \to \omega \in R$. В случай, че $A \to \omega_1, \dots, A \to \omega_k \in R$ ще записваме по-кратко $A \to \omega_1 | \omega_2 | \dots | \omega_k$

Деф. Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е контекстно свободна. Дефинираме релацията $\vdash_G$ между думите над $\Gamma \cup \Sigma$, чрез $u \vdash_G v \overset{def}{\iff}$ съществуват думи $u_1, u_2, \omega \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ и $A \in \Gamma$, така че $u = u_1 A u_2$, $v = u_1 \omega u_2$ и $A \to \omega \in R$

По този начин $u_1 A u_2 \vdash_G u_1 \omega u_2$ за вс. $u_1, u_2, \omega \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $A \in \Gamma$, така че $A \to \omega \in R$. С $\vdash_G^*$ означаваме рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_G$. С други думи за вс. $u, v \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, $u \vdash_G^* v \iff$ същ. $u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v$, $n \geq 0$, така че $u_i \vdash_G u_{i+1}$ за $i = 0, \dots, n-1$

В този конкретен случай к., че дължината на извода е n

(1) $\underline{\{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \subseteq L(G)}$:

С индукция по n ще докажем, че
$S \vdash_G^* 0^n S 1^n$

(i) При $n=0$ очевидно $S \vdash_G^* 0^0 S 1^0$

(ii) Нека n е такова, че
$S \vdash_G^* 0^n S 1^n$. Тъй като
$S \to 0S1$ е правило на G,
$0^n S 1^n \vdash_G 0^n 0 S 1 1^n$ и значи
$S \vdash_G^* 0^{n+1} S 1^{n+1}$

Следователно за вс. n, $S \vdash_G^* 0^n S 1^n \vdash_G 0^n 1^n$

Сл. $0^n 1^n \in L(G)$ за вс. n.

(2) $L(G) \subseteq \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$:

С инд. по дължината на извода в G ще док., че $S \vdash_G^* w \Rightarrow w = 0^n S 1^n$ или $w = 0^n 1^n$ за някое ест. n

(i) Нека $S \vdash_G^* w$ за 0 на брой стъпки

Сл. $w = S$, т.е. $w = 0^0 S 1^0$.

(ii) Нека $S \vdash_G^* w$ за $k+1$ стъпки. Тогава $S \vdash_G^* w'$ за k стъпки и $w' \vdash_G w$. От инд. предположение $w' = 0^n S 1^n$ или $w' = 0^n 1^n$ за някое $n \geq 0$. Т.к. $w' \vdash_G w$, $w' = 0^n S 1^n$. Т.к. единствените правила на G са $S \to \varepsilon$ и $S \to 0S1$, $w = 0^n 1^n$ или $w = 0^{n+1} S 1^{n+1}$

Сл. $L(G) = \{w \in \{0,1\}^* \mid S \vdash_G^* w) \subseteq \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Лема 1 : Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е краен. Тогава L е контекстно свободен

Д-во: Нека $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ $n \geq 0$, $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*$. Нека $G = (\{S\}, \Sigma, S, \{S \to w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_n\})$

Сл. $L(G) = L$

Лема 2: Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са контекстно свободни езици над Σ. Тогава $L_1 \cup L_2$ е контекстно свободен.

Д-во: Нека $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, S_1, R_1)$
$G_2 = (\Gamma_2, \Sigma, S_2, R_2)$ са

контекстно свободни граматики, такива че $L(G_1) = L_1$
$L(G_2) = L_2$ и
двете граматики нямат общи нетерминални символи.
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.
Нека $G = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$, където $S \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Sigma$. Твърдим, че $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

(1) $L(G_i) \subseteq L(G)$ за вс. $i = 1, 2$

Нека $w \in L(G_i)$. Тогава $S_i \vdash_{G_i}^* w$
Т.к. вс. правила на G_i са правила на G, $S_i \vdash_G^* w$. От друга страна $S \vdash_G S_i$ и сл.

$S \vdash_G^* w$, т.е.

$w \in L(G)$.

винаги с ММИ

(2) $L(G) \overset{?}{\subseteq} L(G_1) \cup L(G_2)$:

С индукция по дължината на извода в G ще док., че $S \vdash_G^* w \Rightarrow$
$w = S$ или $S_1 \vdash_{G_1}^* w_1$ или
$S_2 \vdash_{G_2}^* = w$

(i) Нека $S \vdash_G^* w$ за 0 на брой стъпки. Тогава $w = S$.

(ii) Нека $S \vdash_G^* w$ за 1 стъпка. Тогава т.к. единствените правила за S са $S \to S_1$ и $S \to S_2$, $w = S_1$ или $w = S_2$ и значи
$S_1 \vdash_{G_1}^* w$ или $S_2 \vdash_{G_2}^* w$

(iii) Нека $S \vdash_G^* w$ за $n \geq 2$ стъпки. Тогава $S \vdash_G^* w'$ за $n-1$ стъпки и $w' \vdash_G w$ за някоя w от

$w \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\} \cup \Sigma)^*$

Т.к. $n \geq 2$ и S не участва в дясната част на правилата от R_1 и R_2, съгласно инд. предположение $S_i \vdash_{G_i}^* w'$ за някое $i = 1, 2$. Т.к. $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $w' \in (\Gamma_i \cup \Sigma)^*$ и сл. w се получава от w' с помощта на някое от правилата на R_i, които са единствените, съдържащи лява част от Γ_i.

Сл. $S_i \xrightarrow[G_i]{} {}^* w' \xrightarrow[G_i]{} w$, т.е. $S_i \xrightarrow[G_i]{} {}^* w$

Сл. $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \xrightarrow[G]{} {}^* w \} \subseteq$

$\{ w \in \Sigma^* \mid S_i \xrightarrow[G_i]{} {}^* w$ за $i = 1, 2 \} =$

$= L(G_1) \cup L(G_2)$

Лема 3: Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са контекстно св. Тогава $L_1 L_2$ е конт. св.

Д-во: Нека $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, S_1, R_1)$ са

$G_2 = (\Gamma_2, \Sigma, S_2, R_2)$

к.с.г., такива че $L(G_i) = L_i$ за $i = 1, 2$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Нека ~~Ga~~

$G = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$. Твърдим, че

$L(G) = L(G_1) L(G_2)$

(1) $L(G_1) L(G_2) \subseteq L(G)$:

Нека $w \in L(G_1) L(G_2)$, т.е.

$w = w_1 w_2$ за някои

$w_1 \in L(G_1)$ и $w_2 \in L(G_2)$.

Тогава $S_i \xrightarrow[G_i]{} {}^* w_i$ за $i = 1, 2$. Т.к. правилата G_1 и G_2 са правила на G, имаме

$S \xrightarrow[G]{} S_1 S_2 \xrightarrow[G]{} {}^* w_1 S_2 \xrightarrow[G_1]{} {}^* w_1 w_2$, т.е. $S \vdash_G^* \omega$.

Обратно

(2) $\underline{L(G_0) \subseteq L(G_1)L(G_2)}$

С индукция по дължината на извода в G ще док., че

$$S \vdash_G^* \omega \Rightarrow \omega = S \text{ или } \omega = \omega_1\omega_2$$

за някои ω_1, ω_2, такива че

$$S_i \vdash_{G_i}^* \omega_i \text{ за } i = 1, 2. \; (\omega_i \in (\Gamma_i \cup \Sigma)^*)$$

(i) $S \vdash_G^* \omega$ за 0 на брой стъпки $\Rightarrow \omega = S$

(ii) $S \vdash_{G_i}^* \omega$ за 1 стъпка, т.е. $S \vdash_G \omega$ сл. $\omega = S_1 S_2$ и при това $S_1 \vdash_{G_1}^* S_1$, $S_2 \vdash_{G_2}^* S_2$.

(iii) $S \vdash_G^* \omega$ за $n \geq 2$ стъпки. Тогава

$S \vdash_G^* \omega'$ за $n-1$ стъпки и

$\omega' \vdash_G \omega$ за някоя дума

$$\omega' \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\} \cup \Sigma)^*$$

Т.к. $n-1 \geq 1$ и S не участва в R_1 и R_2, ω' не съдържа S. Сл., съгласно индукционното предположение, $\omega' = \omega_1' \omega_2'$ за някои ω_1', ω_2', т.че $S_i \vdash_{G_i}^* \omega_i'$ за $i = 1, 2$.

Т.к. $\omega_1' \omega_2' \vdash_G \omega$, $\omega = \omega_1 \omega_2'$ или

$w = w_1' w_2$ за някои w_1, w_2. ■
Б.О. $w = w_1 w_2'$. Тогава w_1 се получава от w_1' чрез заместване на някой от нетерминалните символи в w_1'. Т.к. $S_1 \vdash_G^* w_1'$, $w_1' \in (\Gamma_1 \cup \Sigma)^*$ и сл. замяната е извършена с помощта на някое от правилата в R_1 (съществено използване, че $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$), т.е. $w_1' \vdash_G w_1$. Оттук $S_1 \vdash_{G_1}^* w_1$.

Следователно

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \vdash_{G}^* w \} \subseteq$$

$$\{ w_1 w_2 \mid S_1 \vdash_{G_1}^* w_1 \text{ и } S_2 \vdash_{G_2}^* w_2,\ w_1, w_2 \in \Sigma^* \} = L(G_1) L(G_2)$$

15.01.2014 г.

Упражнение

$$\{ a^{2k+3n+1}, b^{3k+5l+4}, c^{5n+7l} \mid n, k, l \in \mathbb{N} \}$$

$$a^{2k} \cdot a^{3n}\, a\, b^{3k}\, b^{5l}\, b^{4}\, c^{5n}\, c^{7l}$$

не може безконтекстна граматика

$a^i a^j = a^j a^i$

$a^i b^j \neq b^j a^i$

$(ab)^i \neq a^i b^i$

$\overset{4}{abab}$

$$= a^{3n} \underbrace{\underbrace{a^{2k}\, a\, b^{3k}}_{K}\ \underbrace{b^{5p}\, b^4\, c^{7p}}_{L}}_{} c^{5n}$$

S

$S \to a^3 S c^5 \mid KL$

$aaaScccccc$

$$S \to a^3 S c^5 \to a^3 a^3 S c^5 c^5 \to a^3 a^3 a^3 S c^5 c^5 \ldots \to a^{3n} S c^{5n}$$

n пъти прилагане правилото

$K \to a^2 K b^3 \mid a$

$L \to b^5 L c^7 \mid b^4$

$$\{a^n b^k \mid n > 2k\} = \{a^{2k+1+i} \cdot b^k \mid n, i \in \mathbb{N}\}$$

$$n \geq 2k+1$$

$$n = 2k+1+i$$

$$\{a^n b^k \mid n < 2k\}$$

$$n \leq 2k-1$$

$$k \geq \frac{n+1}{2}$$

$$\cancel{k = \frac{n+1}{2}}$$

I сл. $n = 2m+1$

$$k \geq m+1 \qquad k = m+1+i$$

$$\{a^{2m+1} b^{m+1+i} \mid m, i \in \mathbb{N}\}$$

начален символ S'

II сл. $n = 2m$

$$k \geq \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2} \Rightarrow k \geq m+1$$

$$k = m+1+i$$

$$\{a^{2m} b^{m+1+i} \mid m, i \in \mathbb{N}\}$$

нач. с-л S''

$S \to S' \mid S''$

граматика I сл.

граматика II сл.

да ~~не~~ се използват различни терминални символи

$L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w) \}$

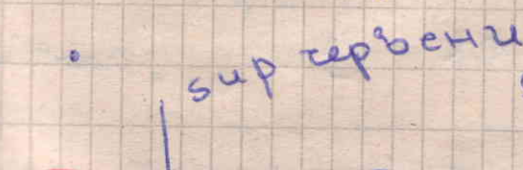
$N_z(w)$ = броят на буквите z в w

$a^n b^n$

$S \to aSb \mid bSa \mid \varepsilon \mid \underline{abSba \mid baSab}$

не

? $aa \ldots aa$



$f(0) > 0$ f непр.

$f(1) < 0$

Нб.

$A = \{ x \in [0,1] \mid f > 0 \}$

$B = \quad f < 0$

$q = \sup A$

Ако $f(q) > 0$, то $f > 0$ в ок-т на q, т.е.

при някои $x > q$ $f(x) > 0$

$x \in A$

- против. с $q = \sup A$

q е точна горна гр. на A

$\Rightarrow$ има безкрайно

близки до q елементи на A

$\Rightarrow$ +непр. на $f \Rightarrow f(q) \geq 0$

Значи $f(q) = 0$

$S \to aSb \mid bSa \mid \varepsilon \mid SS$

Доп. противното (искаме да док. SS)

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} w \in L \Rightarrow awb \in L \\ w \in L \Rightarrow bwa \in L \\ \varepsilon \in L \\ w' \in L \text{ и } w'' \in L \Rightarrow w'w'' \in L \end{array}\right\} \Rightarrow \forall w \text{ (грам. разпознава } w \Rightarrow w \in L)$$

За обратната посока да доп. прот.

$\exists$ дума $w \in L$, но w не се

разпознава от грам.

Нека w бъде възможно найкъса

дума с това свойство
ε се разпознава $\Rightarrow \omega \neq \varepsilon$
Ако $\omega \neq \varepsilon$ и ~~[illegible]~~ $\omega \in L$, то
ω съдържа поне 2 букви.
Ако $\omega = a\omega' b$ или $\omega = b\omega' a$, то
$\omega' \in L$.

ω' е по-къса от ω, значи се
разпознава.
От тук с първите две правила
получаваме, че ω се разпознава
$\Rightarrow \mathring{X}$
$\Rightarrow$ ~~т~~ $\omega = a\omega' a$ или $b\omega' b$

аналогично
на $a\omega' a$

Съгласно <u>Лемата</u>
съществуват u' и u'' т.че
$u', u'' \in L$, $u' \neq \varepsilon$, $u'' \neq \varepsilon$ и
$\omega = u'u''$
u' и u'' са по-къси от ω, значи се
разпознават.
От тук и правилото $S \to SS$
получаваме, че ω се разпознава. $\mathring{X}$

<u>Лема</u>: Ако $\omega = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n$, $\xi_1 = \xi_n = a$
и $N_a(\omega) = N_b(\omega)$, то $\exists\, u', u''$,
че $N_a(u') = N_b(u')$ $u' \neq \varepsilon$
$N_a(u'') = N_b(u'')$ $u'' \neq \varepsilon$ и

$\omega = u'u''$.

Д-80: Нека $k_i = N_a(\xi_1, \ldots, \xi_i) - N_b(\xi_1, \ldots, \xi_i)$

$$k_0 = N_a(\varepsilon) - N_b(\varepsilon) = 0$$

$$k_1 = N_a(a) - N_b(a) = 1$$

$$k_n = N_a(\omega) - N_b(\omega) = 0$$

$$k_{n-1} = -1$$

$$|k_{i+1} - k_i| = 1$$

$$A = \{ i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \mid k_i > 0 \}$$

$$1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$$

Нека $m = \max A$

$$m \in A \Rightarrow k_m > 0$$

$$\overset{m < n-1}{m+1 \notin A} \Rightarrow k_{m+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow m+1 \leq n-1$$

$$|k_{m+1} - k_m| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$k_{m+1} = 0$$

$$k_m = 1$$

$u' = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \ldots \xi_{m+1}$

$u'' = \xi_{m+2} \xi_{m+3} \ldots \xi_{n+1}$

$$\left.\begin{array}{l} k_{m+1} = 0 \\ k_{m-1} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow m+1 < n-1 \Rightarrow m+2 \le n-1$$

$k_{mn} = 0 \Rightarrow u' \in L$

$$\left.\begin{array}{l} w = u'u'' \\ u' \in L \end{array}\right| \Rightarrow u'' \in L$$

! Безконтекстна граматика за аритм. изрази с +, -, *, /, (,), x, y, z, ест. числа (напр. 42)

$(x+42*y)/z$

$S \to S+S \mid S-S \mid S*S \mid S/S \mid (S) \mid x \mid y \mid z \mid N$

$N \to DN \mid D$

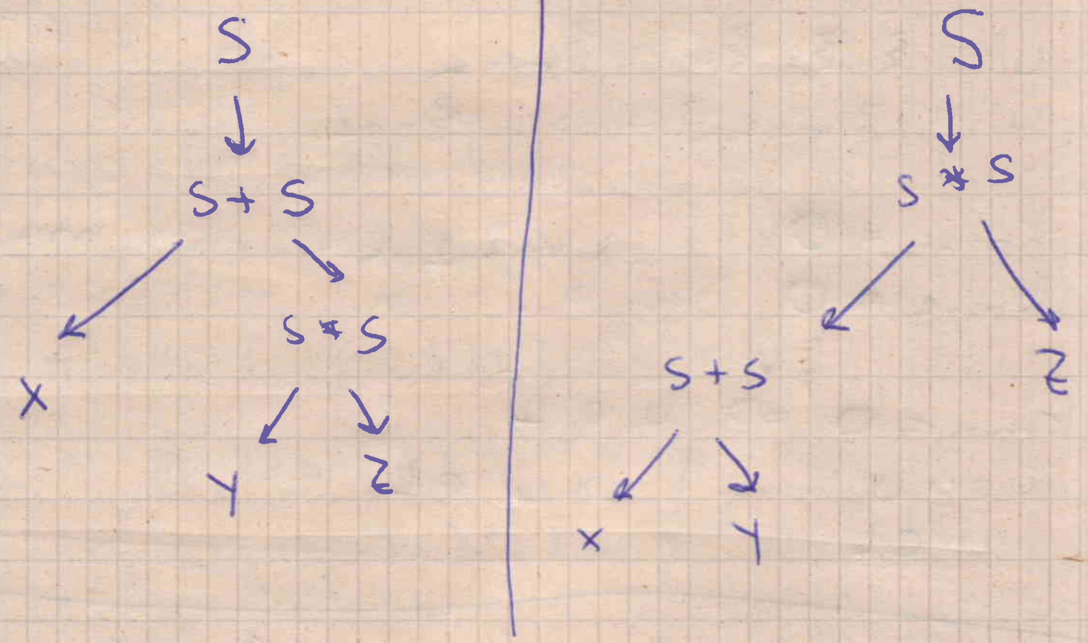
$D \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \mid 9$ → регулярен език $\{0-9\}^+$

$x + y * z$

$S \to S+S$

$S+S$: $S \to x$, $S \to S*S$

недетерминирана граматика:



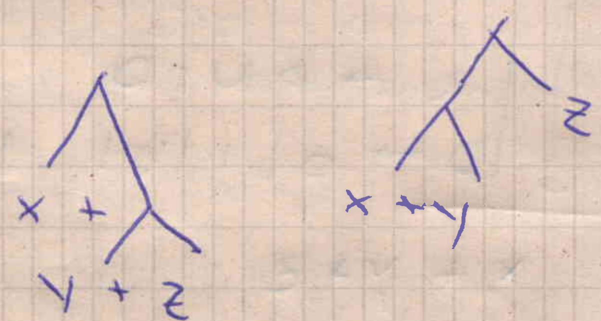
$S \to S+S \mid S-S \mid T$

$T \to T*T \mid T/T \mid R$

$R \to x \mid y \mid z \mid N \mid (S)$

не прави неверни дървета, но все още е недетерминирана

$x+y+z$



детерминирана граматика:

$S \to T+S \mid T-S \mid T$

$T \to R*T \mid R/T \mid R$

$R \to x \mid y \mid z \mid N \mid (S)$

Схема на транслатор (напр. компилатор

изходна програма - редица от символи → лексически анализатор

вназя част от граматиката, която може да се направи с крайни автомати

↓

редица от лексеми

token

$\underbrace{\text{/* коментар */}}$

{ int x_2; x = 4 + ~~2~~23

$\boxed{\{}$ $\boxed{\text{int}}$ $\boxed{x_2}$ $\boxed{;}$ $\boxed{x_2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{+}$ $\boxed{23}$

↓

синтактичен анализатор

(частта от граматиката, която не може да се направи с автомати)

синтактични дървета ←

регулярна граматика → Lexx ⟶ код на C → лексичен анализ

→ Yacc ⟶ код на C → синтактичен анализатор

безконтекстна граматика

Контекстно зависими граматики

$S \to aSb \mid \varepsilon$

$ab \to ba$

$ba \to ab$

- думите с равен бр. a и b

$\{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$ ∄ контекстно свободна граматика

~~$S \to A\Omega$~~

$S \to T\Omega$

$T \to aTbc \mid \varepsilon$

S

S

$T\Omega$

$aTbc\Omega$

$aaTbcbc\Omega$

$- \; - \; - \; -$

$a^n T \underbrace{bc\,bc \ldots bc}_{n \text{ пъти}} \Omega$

$a^n bc\,bc \ldots bc\,\Omega$

S

$T\Omega$

$aTbc\Omega$

$aaTbcbc\Omega$

$cb \to bc$

$. \; - \; .$

$a^n T \underbrace{bc\,bc \ldots bc}_{n \text{ пъти}} \; \Omega$

$S \to T\Omega$

$T \to aTbc \mid \varepsilon$

$cb \to bc$

$Tb \to bT$ прескача b

$\Omega c \to c\Omega$ прескача c

$T\Omega \to \varepsilon$

граматика

$\{a^n b^k c^{nk} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

$S \to T\Omega$

$T \to aDT \mid Tb \mid \varepsilon$

S

$T\Omega$

$\underbrace{aDaDaD\ldots}_{\text{n на брой букви a и D}} \; \overbrace{bbb\ldots}^{\text{k на брой букви b}}\Omega$

$\cancel{Db \to bcD}$

$Db \to bDc$

$cb \to bc$

$Da \to aD$

$D\Omega \to \Omega$

$c\Omega \to \Omega c$

$\Omega \to \varepsilon$

зад. $\{ a^n \mid n$ не е просто число $\}$

$$S \to \Gamma S' \Delta$$

$\boxed{\text{правилата от предишната задача,}}$ но S' вместо S

$$\Gamma a^n b^k c^{nk} \Delta$$

$\Gamma a \to a \Gamma_2$

$\Gamma_2 a \to \Gamma_3$

$\Gamma_3 a \to \Gamma_3$

$\Gamma_3 b \to \Gamma_4$ поне едно b

$\Gamma_4 b \to \Gamma_5$ поне 2 b

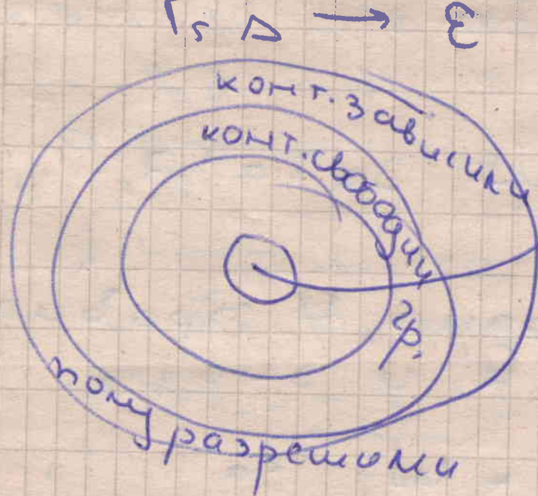
$\cancel{\Gamma_4 b \to \Gamma_5}$

$\Gamma_5 b \to \Gamma_5$

$$\Gamma^5 c^{nk} \Delta$$

$$\Gamma^5 c \to a \Gamma_5$$

$$\Gamma_5 \Delta \to \varepsilon$$



регулярни или автоматни езици

16.01.2014г.

Лекция

Лема 4: Нека L е контекстно свободен език. Тогава L^* е к.св.

Д-во: Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е к.с.г с $L(G) = L$. Да разгл. к.с.г.
$G' = (\Gamma \cup \{S'\}, \Sigma, S', R \cup \{S' \to \varepsilon \mid SS'\})$

(1) $L^* \subseteq L(G')$ Нека $w \in L^*$. Тогава $w = w_1 w_2 \dots w_n \in L$. Прилагайки n пъти правилото $S' \to SS'$ получаваме

$$S' \vdash_{G'} SS' \vdash_{G'} SSS' \vdash_{G'} S^3 S' \vdash_{G'} \dots$$

$$\vdash S^n S \text{ и значи}$$

$$S' \vdash_{G'}^* \underbrace{SS..S}_{n} S'. \text{ Т.к. } w_i \in L \text{ за}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$S \vdash_{G}^* w_i \text{ за } i = 1, 2, \dots, n$$

От друга страна, $\forall$ правило на G е правило на G' и значи

$$S \vdash_{G'}^* w_i \text{ за } i = 1, \dots, n$$

Сл. $S' \vdash_{G'^*} \underbrace{SS\ldots S}_{n} S' \vdash_{G'}{}^* w_1 \underbrace{S\ldots S}_{n-1} S' \vdash_{G'^*}$
$w_1 w_2 \underbrace{S\ldots S}_{n-2} S' \vdash_{G'^*} \ldots \vdash_{G'^*}$

$w_1 w_2 \ldots w_n S'$ и значи $S' \vdash_{G'}{}^* wS'$
Прилагайки $S' \to \varepsilon$, от тук получаваме

$$S' \vdash_{G'}{}^* w. \text{ Сл. } w \in L(G')$$

(2) $L(G') \subseteq L^*$ С индукция по дължината на извода в G' ще док., че за $w \in (\Gamma' \cup \Sigma)^*$,

$$S' \vdash_{G'^*} w \Rightarrow w = w_1 w_2 \ldots w_n S' \text{ или}$$

$$w = w_1 w_2 \ldots w_n \quad \text{за някое } n \geq 0$$

и думи $w_1, w_2, \ldots, w_n$, такива че

$$S' \vdash_{G^*} w_i \text{ за } i = 1, 2, \ldots, n$$

(i) Нека w се извежда от S' в G' за 0 стъпки. Тогава $w = S'$ и тв. се получава при $n = 0$

(ii) Нека $S' \vdash_{G'} w$ за $k+1$ стъпки.

Тогава $S' \vdash_{G'^*} w'$ за k стъпки и $w' \vdash_{G'} w$ за някоя дума

$$w' \in (\underbrace{L \cup \{S'\}}_{\Gamma'} \cup \Sigma)^*$$

Съгласно индукционното предположение $w' = w_1 w_2 \dots w_n S'$ или $w_1 w_2 \dots w_n$ за някое $n \geq 0$ и думи $w_1, w_2, \dots, w_n$, такива че

$$S \vdash_{G'*} w_i \text{ за някое } i = 1, 2, \dots, n$$

Да забележим, че $w_1, w_2, \dots, w_n$ * не съдържат символа S'

1сл.) $w' = w_1 w_2 \dots w_n$ Т.к.

$w' \vdash_{G'} w$ и S' не участва в $w_1, w_2, \dots w_n$

$w' \vdash_{G} w$. При това при едностъпковия извод $w' \vdash_{G} w$ е заменен един нетерминален $A \in \Gamma$ с дума v, съгласно правилото

$A \to v \in R$. Този символ се намира в някоя от думите $w_1, w_2, \dots, w_n$. Нека тази дума е w_i. Тогава $w = w_1 w_2, \dots, w_{i-1}, w_i', \dots, w_n$, където $w_i \vdash_{G} w_i'$ чрез заместване на подходящо срещане на A с V. Тогава

$$S \vdash_{G*} w_i' \text{ и следователно}$$

думата ω има желаното свойство.
2сл.) $\omega' = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n S'$
2.1) ω се получава от ω' чрез прилагане на правило за някои $A \in \Gamma$. Аналогично на 1сл.

2.2) ——— " ——— за S'
2.2.1) Приложеното правило е $S \to \varepsilon$.
Тогава $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$
2.2.2 — " ——— $S \to SS'$. Тогава
$\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n SS' = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \omega_{n+1} S'$,
където $\omega_{n+1} = S$ Ясно е, че $S \vdash_{G^*} S$

$L(G') = \{\omega \in \Sigma^* \mid S' \vdash_{G'^*} \omega \subseteq \{\omega \in \Sigma^* \mid$
$\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ за някое $n \geq 0$ и
думи $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in L\} = L^*$

Th Всеки регулярен език е контекстно свободен.

Д-во. Съгласно леми от 1 до 4 всеки краен език е к.с. и к.с. езици са затворени относно операциите $\cup$, $\cdot$ и $+$
т.к. класът на регулярните езици е най-малкият клас, съдържащ кр. езици и затворен

относно опер. $\cup$, $\cdot$ и $*$
$\Rightarrow$ вс. регулярен език е к.с.

~~Лема~~ Лема за разрастването за к.с. езици

Th (Pumping Lemma)

Нека L е к.с. език. Същ. $n > 0$, т.че за $\forall$ $w \in L$, ако $|w| > n$, то $w = xyzuv$ за някои думи x, y, z, u, v, такива че

$$|yzu| \leq n, \ |yu| > 0 \text{ и за } \forall$$
$$i \geq 0 \quad xy^izu^iv \in L$$

Д-во: Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е к.с.г. с $L(G) = L$. Да разгледаме рел. $\underset{G}{\models}$ м/у думи от $(\Gamma \cup \Sigma)^*$, за която $w \underset{G}{\models} w' \Leftrightarrow w'$ се получава от w чрез едновременно заместване на всички нетерминални символи в w съгласно правилата над R.

Пример: Нека $G = (\{S\}, \{0, 1\}, S, S \to 0S \mid 1S \mid SS\})$

$$S01S1S \underset{G}{\models} S011S1S,$$

$$\boxed{S}\,01\,\boxed{S}\,1\,\boxed{S} \models_G \boxed{SS}\,01\,\boxed{0S}\,1\,\boxed{SS}$$

$$\boxed{S}\,01\,\boxed{S}\,1\,\boxed{S} \models_G \boxed{0S}\,01\,\boxed{1S}\,1\,\boxed{1S}$$

! Ние избираме кое правило да използваме

Ясно е, че ако от $w \models_G w'$, то от $w \vdash_{G^*} w'$. Нека с $\vdash_{G^*}$ означим рефл. и транзитивно затв. на $\vdash_{G^*}$. Ясно е, че ако от началния $S \vdash_{G^*} w$ и $w \in \Sigma^*$, то $S \vdash_{G^*} w$. Нека с M означим дължината на най-дългата дясна част на правило от R (в частност $A \to u \in R$, то $|u| \le M$) Нека $S \models_{G^*} w$ за n стъпки. Тогава

$$\underline{\underline{|w| \le M^n}}$$

Индукция по n (1) при $n = 0$ $w = S$ $|w| = 1 = M^0$

(2) Нека $S \models_{G^*} w$ за $n+1$. Тогава $S \vdash_{G^*} w'$ за n стъпки и $w' \vdash w$. От w и $|w'| \le M^n$. Възможно най-голямата дължина на w се

получава при положение, че ω' се състои само от нетерминирани символи и вс. един от тях е заместен съгласно правило от R с дясна част с дължина M. Оттук

$$|\omega| \le |\omega'|. M \le M^n. M = M^{n+1}$$

Нека $n_1 = M$. Нека $\omega \in L$ и $|\omega| > n$.
Нека $S \vdash_G \omega_1 \vdash_G \omega_2 \vdash_G \dots \vdash_G \omega_n = \omega$ е възможно най-кратък спец. извод на ω. Тогава $n_1 = M^{|\Gamma|} < |\omega| \le M^n$ и сл. $|\Gamma| < n$. Нека фиксираме един терминален символ в ω_n, който е получен на последната стъпка. Тогава, той е получен от нетермин. символ A_{n-1} в думата ω_{n-1} чрез някое от правилата. A_{n-1} е получен от нет. символ A_{n-2} от думата ω_{n-2} чрез някое от правилата. и т.н. В крайна сметка получаваме редица от нет. символи $A = S, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ Т.к. $n > |\Gamma|$ $A_k = A_j$ за някое $k \ne j$.
Нека x, y, z, u, v са думи от Σ^*, такива че $\omega = xyzuv$ и

$$S \vdash_{G*} xA_k v A_a \vdash_{G*} yA_j u, \text{ т.е}$$

$$A_k \vdash_{G*} yA_k n \text{ и } A_k \vdash_{G*} z$$

Нека $i \geq 0$. Тогава $S \vdash_{G^*} xA_k v \vdash_{G^*} xy A_{k+1} uv$

$\vdash_{G^*} xy^2 A_{k+1} u^2 v \vdash_{G^*} xyy A_k uuv \vdash_{G^*} \ldots$

$\ldots \vdash_{G^*} xy^i A_k u^i v \vdash_{G^*} xy^i z u^i v$

Т.к. изводът $S \vdash_{G} \omega_1 \vdash \omega_2 \vdash_{G_1} \ldots \vdash_{G_1} \omega_n$ е възможно най-кратък

$$|yu| > 0$$

Т.к. $A_k \vdash_{G^*} yzu$ за $n-k$ стъпки, то дължината на $|yzu| \leq M^{n-k}$.

При подходящ избор на k, който може да бъде направен

$$n-k \leq |r| + 1$$

$$\text{и} \quad |yzu| \leq n;$$

Пример: $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ не е к.с. език

Да доп., че L е к.с. и нека $n_L > 0$ е числото от Лемата. Нека $\omega = 0^{n_L} 1^{n_L} 2^{n_L}$. Тогава $|\omega| = 3n_L > n_L$ и ~~та~~ сл. $\omega = xyzuv$ за някои думи x, y, z, u и v такива че

$|yzu| \leq n$, $|yu| > 0$ и за вс. $i \geq 0$

$$xy^i z u^i v \in L$$

Т.к. $|yzu| \leq n_L$ и $xyzuv = 0^{n_L} 1^{n_L} 2^{n_L}$

yzu не съдържа някоя от буквите 0, 1, или 2. От др. стр. т.к. $|yu| > 0$,

22.01.2014г.

Упражнение

Дяснолинейна граматика:

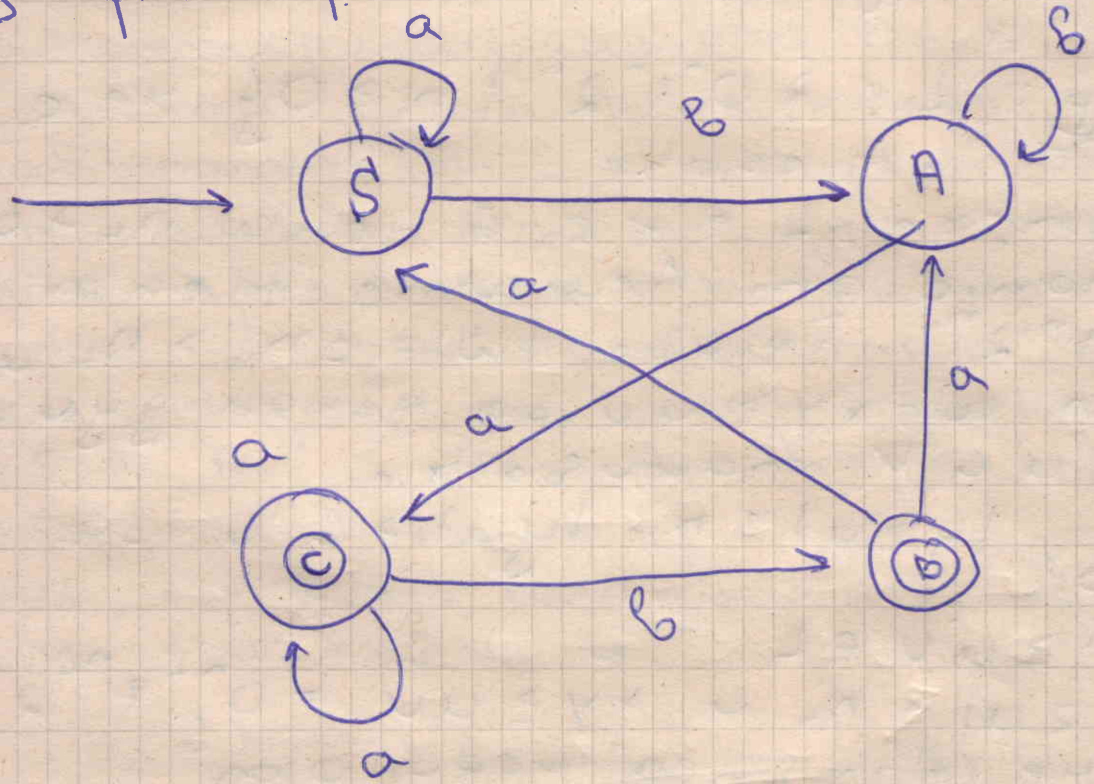
правилата са от вида

$A \rightarrow b\,C$

$A \rightarrow \varepsilon$

$$\boxed{\begin{array}{l} A \rightarrow b\,C \\ A \rightarrow b \end{array}}$$

недетерминиран



трябва да можем да махнем нетерминалните

$S \to aS \mid bA$

$A \to bA \mid aC \mid a$

$C \to aC \mid bB \mid \varepsilon \mid a \mid b$

$B \to aS \mid aA \mid \varepsilon$

махаме C

компенсира B

разпознава се

babaaba разпознава се

S A C B S A C

A ε

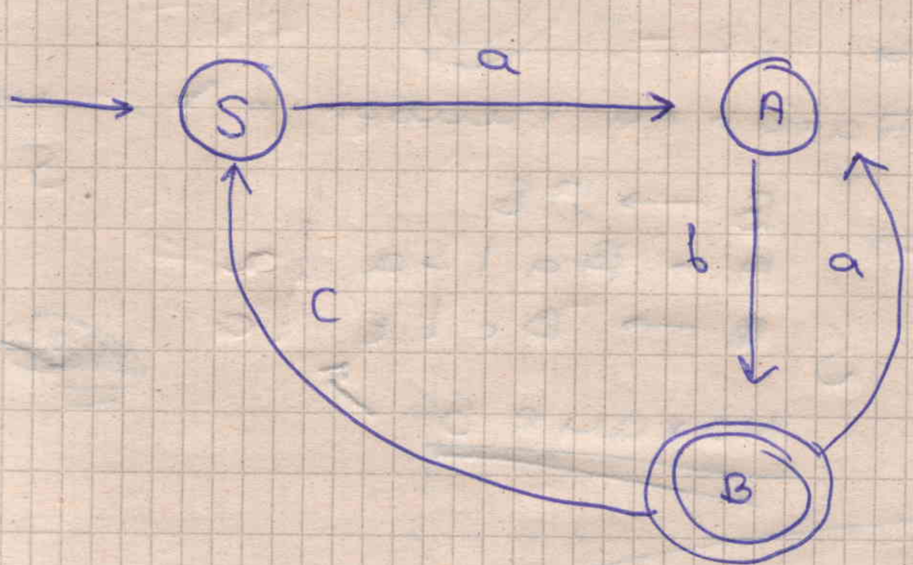
прилагаме второто

$S \vdash bA \vdash baC \vdash babB \vdash babaS$

$babB \vdash babaA$

$babaS \vdash bababA \vdash bababaC \vdash bababa$:))

$babaA \vdash bababA$

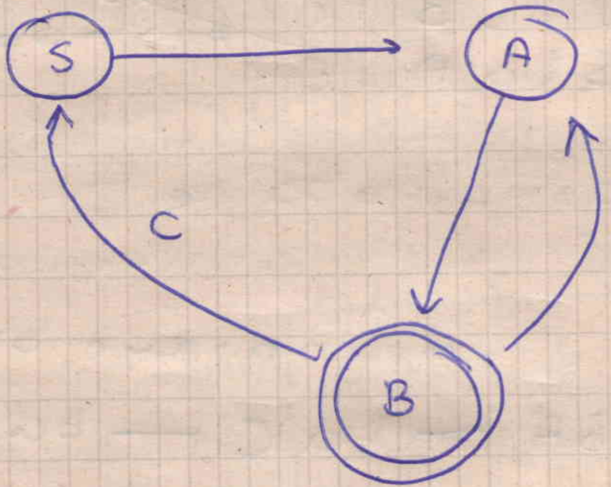


$S \to aA$

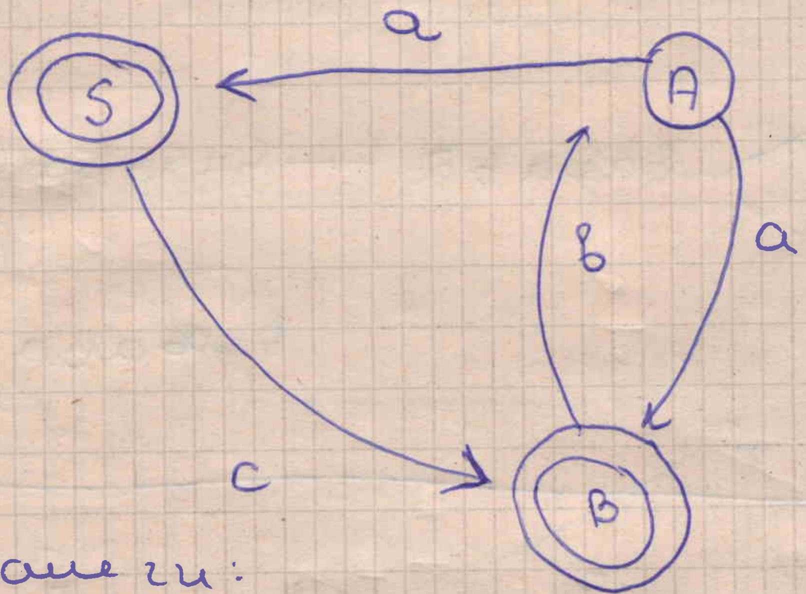
$A \to bB \mid b$

$B \to aA \mid cS \mid \cancel{\varepsilon}$

ляволинейна



Обръщаме автомата



Обръщаме ги:

Начален символ е в,ане S

~~B → BA~~
~~A → a~~

$B \to Ab$

$A \to Ba \mid Sa \mid a$

$S \to Bc \mid \cancel{\varepsilon}$ | ка

махаме S

Контролно → дяснолинейно

палиндроми $S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

Булеви изрази с:

$+,\ \vee,\ \Rightarrow,\ (,\ ),\ x, y, z$

$\cancel{S \to T + S \mid T \ldots}$

$S \to T + S \mid T \vee S \mid T.$ $\quad \cancel{S \to T \Rightarrow 4}$

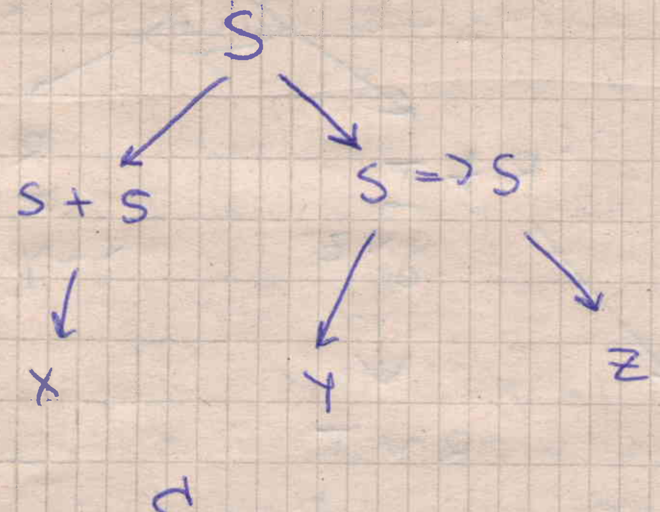
$T \to T \Rightarrow R$

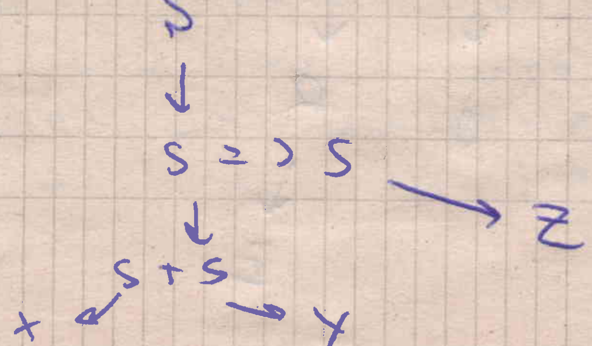
$R \to \mid x \mid y \mid z \mid (S)$

$S \to S + S \mid S \vee S \mid S \Rightarrow S \mid (S) \mid x \mid y \mid z$

недетерминирана

$x + y \Rightarrow z$





R   R | R

$S \to \cancel{\emptyset} \Rightarrow \cancel{\emptyset\emptyset}$

$R \to R + T \mid T \vee R \mid T$

$T \to \mid x \mid y \mid z \mid (S)$

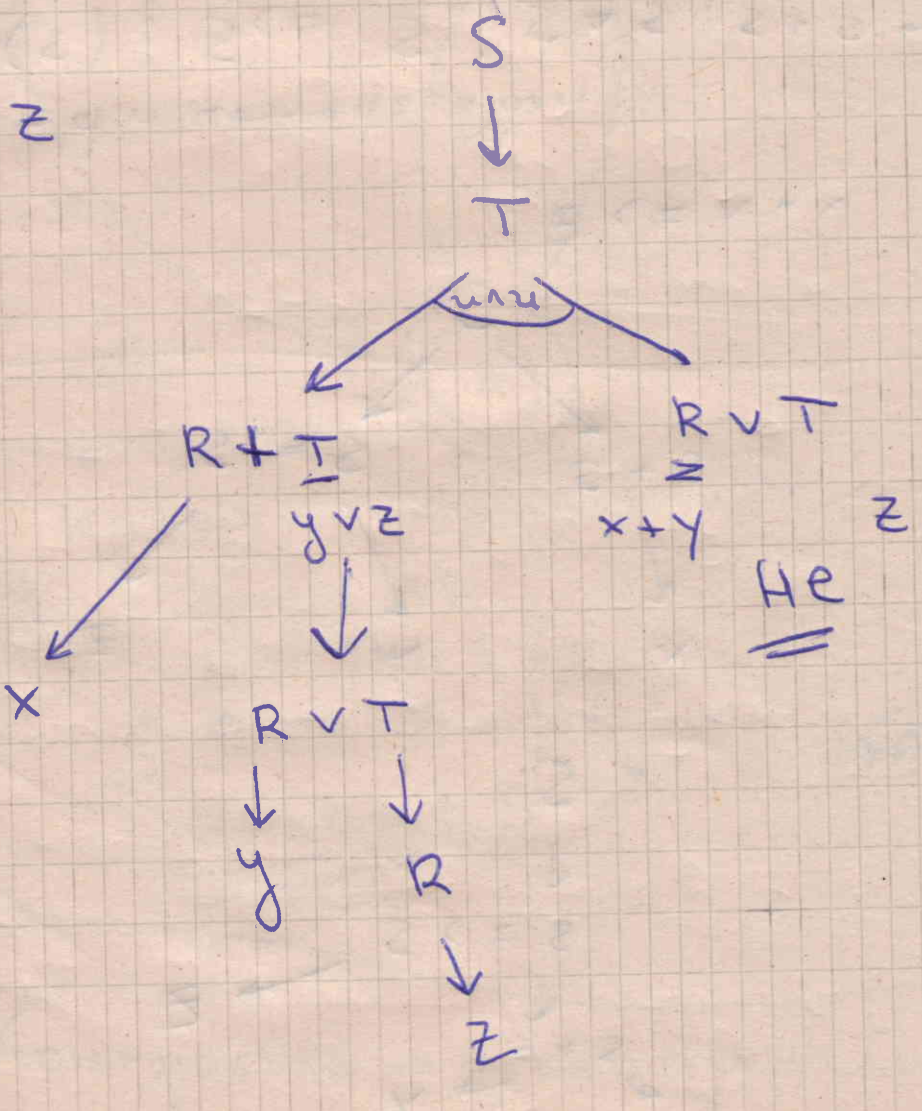
$S \to T \Rightarrow T \mid T$

$T \to R + T \mid R \vee T \mid R$

$R \to x \mid y \mid z \mid (S)$

~~xxxxx~~

$x + y \vee z$



23.01.2014г.

Лекция

Лема за разрастването

Th Нека L е к.с. език. Тогава същ. $n>0$, т.че за $\forall$ $w \in L$, ако $|w|>n$, то $w = xyzuv$ за някои думи x, y, z, u, v, т.че $|yzu| \leq n$, $|yu|>0$ и за $\forall$ $i \geq 0$, $xy^izu^iv \in L$

Тв.1 Езикът $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ не е контекстно свободен

Д-во: Да доп., че L е к.с. език и нека n_0 е числото от Th. Нека $w = 0^{n_0} 1^{n_0} 2^{n_0}$. Тогава $w \in L$ и $|w| = 3n_0 > n_0$ и значи $w = xyzuv$ за някои думи x, y, z, u и v, т.че $|yzu| \leq n_0$, $|yu|>0$ и за $\forall$ $i \geq 0$ $xy^izu^iv \in L$. Т.к. $xyzu = 0^{n_0} 1^{n_0} 2^{n_0} =$
$= \underbrace{00..0}_{n_0} \underbrace{11..1}_{n_0} \underbrace{22..2}$ и $|yzu| \leq n_0$, думата yzu не съдържа някоя от буквите 0, 1 или 2. Да разгледаме думата $w_0 = xy^0zu^0v = xzv$ е дума от L. w_0 се получава от w чрез изтриване на буквите на y и u. Т.к. $|yu|>0$, изтрита е

поне една буква. От друга страна ци не съдържа някоя от буквите 0, 1 или 2.
=> в ω_0 бр. на буквите 0, 1 и 2 не е един и същ. От тук $\omega_0 \notin L$

Тв. 2 Контекстно свободните езици не са затворени относно операцията сечение
Д-во: Нека $L_1 = \{0^i 1^j 2^k \mid i = j\}$

$L_2 = \{0^i 1^j 2^k \mid j = k\}$, т.е

$L_1 = \{0^n 1^n 2^k \mid n, k \geq 0\}$

$L_2 = \{0^i 1^m 2^m \mid i, m \geq 0\}$

Езиците L_1 и L_2 са контекстно свободни

1. Езикът $L_1 = L_{11} L_{12}$, където

$L_{11} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$,

$L_{12} = \{2^k \mid k \geq 0\}$.

L_{11} е контекстносвободен, L_{12} е рег. и значи к.с.
Сл. L_1 е к.с.

2. $L_2 = L_{21} L_{22}$, където $L_{21} = \{0^i \mid i \geq 0\}$, $L_{22} = \{1^m 2^m \mid m \geq 0\}$ L_{21} е

регулярен и значи е к.с., а L_2 е к.с. Сл. L_2 е к.с.
Да разгледаме $L = L_1 \cap L_2$. Имаме
$L = \{0^i 1^j 2^k \mid i=j, j=k\} = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$
Съгласно Тв.1 L не е контекстно свободен.
Тв.3 Контекстно свободните езици не са затворени относно операцията допълнение.
Д-во. Предвид правилото на Де Морган ($\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$), ако к.с. езици са затворени относно операцията допълнение, то те са затв. относно операцията сечение. Сега Тв. следва от Тв2

№ 15

Нормална форма на Чомски

Опр. Казваме, че к.с.г. $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е в нормална форма на Чомски, ако за вс. правило $A \to \omega \in R$, $|\omega| = 2$

Th За $\forall$ к.с.г. G същ. к.с.г. G', т.че за вс. ω с $|\omega| \geq 2$, $\omega \in L(G) \iff \omega \in L(G')$

Д-во: Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$

Пример: $G = (\{S\}, \{(,)\}, S,$
$\{S \to \varepsilon \mid (S) \mid SS\})$

(())(())((()()))

Стъпка 1. Премахване на дългите правила (дясна част ≥ 3)

Образуваме нова граматика G_1, като $\forall$ правило $A \to a_1 a_2 \ldots a_n \in R$, където $n \geq 3$, а $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma \cup \Sigma$ се заместв[а] с редицата правила:

$A \to a_1 A_1$
$A_1 \to a_2 A_2$
$- - - -$
$A_{n-2} \to a_{n-1} a_n$

където $A_1, \ldots, A_{n-2}$ са нови нетерминални символи

Така правилото $A \to a_1 \ldots a_n$ от R се симулира от извода

$A \vdash_{G_1} a_1 A_1 \vdash_{G_1} a_1 a_2 A_2$
$\vdash_{G_1} \ldots a_1 a_2 \ldots a_{n-2} A_{n-2} \vdash_{G}$

$a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n$

$G_1 = (\Gamma, \Sigma, S, R_1)$ и $L(G_1) = L(G)$

<u>За примера</u>: $S \to (S)$ се замества с $S \to (S_1$, $S_1 \to S)$ и

$G_1 = (\{S, S_1\}, \{(,)\}, S, \{S \to \varepsilon | SS |$
$(S_1; S_1 \to S)$

<u>Стъпка 2</u>: <u>Премахване на ε-правилата</u>: Разглеждаме мн.

$E = \{A \in \Gamma_1$, за които

$$E = \{A \in \Gamma_1 \mid A \Rightarrow^*_{G_1} \varepsilon\}$$

Мн. E може да бъде намерено чрез следния алгоритъм:

$E = \emptyset$

while $\{A \in \Gamma \setminus E \mid$ същ. $A \to w \in R_1$ с $w \in E^*\} \neq \emptyset$ добавяме символ A от $\Gamma \setminus E$, за който има $A \to w \in R_1$ с $w \in E^*$, в E.

Образуваме к.с. G_2 от G_1, като махаме $\forall$ правила $A \to \varepsilon \in R_1$ и за вс. правило $B \to CD \in R_1$ ($C, D \in \Gamma \cup \Sigma$), т.че $C \in E$ (съответно $D \in E$) добавяме правило $B \to D$ (съответно $B \to C$)

По този начин

$G_2 = (\Gamma_1, \Sigma, S, R_2)$; като

$L(G_2) = L(G_1) \setminus \{\varepsilon\}$

<u>За примера:</u> $E_0 = \emptyset$

$E_0^* = \{\varepsilon\}$

$S \to \varepsilon \mid SS \mid (S_1$ правила

$S_1 \to S)$ на G_1

$E_1 = \{S\}$;

$E_1^* = \{\varepsilon, S, SS, SSS, \dots\}$

$E_2 = \{S, S\} = \{S\} = E_1$

с дясна част ε

с — " — S и т.н.

$$\boxed{E = E_2 = \{S\}}$$

правила на G_2 трием едното от двете

$S \to SS \mid (S_1$

$S_1 \to S)$

(отпадат тези, които отиват в ε)

$S \to SS \mid (S_1 \mid S$

$S_1 \to S) \mid)$ трием

Стъпка 3: Премахване на правила с дължина 1: За вс. символ

$A \in (\Gamma \cup \Sigma)$ обр. мн. $D(A)$

$$D(A) = \{ B \in \Gamma \cup \Sigma \mid A \vdash_{G}^{*} B \}$$

Разбира се $A \in D(A)$. При това, ако $A \in \Sigma$, $D(A) = \{A\}$.

$D(A)$ можем да построим чрез следния алгоритъм:

$D(A) = \{A\}$

while $\{B \in (\Gamma \cup \Sigma) \setminus D(A) \mid$
$C \to B \in R_2$ за някое C от $D(A)\} =$
$= X \neq \emptyset$ добавяме ел. на X към $D(A)$.

Образуваме граматиката

$G' = (\Gamma_1, \Sigma, S, R')$ от

граматиката G_2, премахвайки $\forall$ правила $A \to \omega \in R$, за които $|\omega| = 1$ и прибавяйки за вс. правило:

1. За вс. правило $A \to BC$, правилата $A \to B'C'$, където $B' \in D(B)$, а $C' \in D(C)$
2. За вс. правило $A \to BC$ със $A \in D(S)$, прибавяме $S \to B'C'$ за $B' \in D(B)$ и $C' \in D(C)$

S

В сила е $L(G') = L(G_2) \setminus \Sigma$

<u>За примера:</u>

G_2: $S \to SS \mid (S_1 \mid S$

$S_1 \to S),\ )$

терминален символ

за 1 стъпка

~~за 1 ст~~

$D(() = \{(\}$

$D()) = \{)\}$

$D(S) = \{S\}$

$D(S_1) = \{S_1,)\}$

за 1 стъпка

$$\boxed{\begin{aligned} G': S &\to SS \mid (S_1 \mid () \\ S_1 &\to S) \end{aligned}}$$

#

Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е к.с.г. в нормална ф-ма на Чомски

Нека $w = x_1 x_2 \ldots x_n \in \Sigma^*$, $n \geq 2$ и

$x_1, x_2, \ldots x_n \in \Sigma$

Нека за $1 \leq i \leq n$ и

$0 \leq s \leq n-i$ с

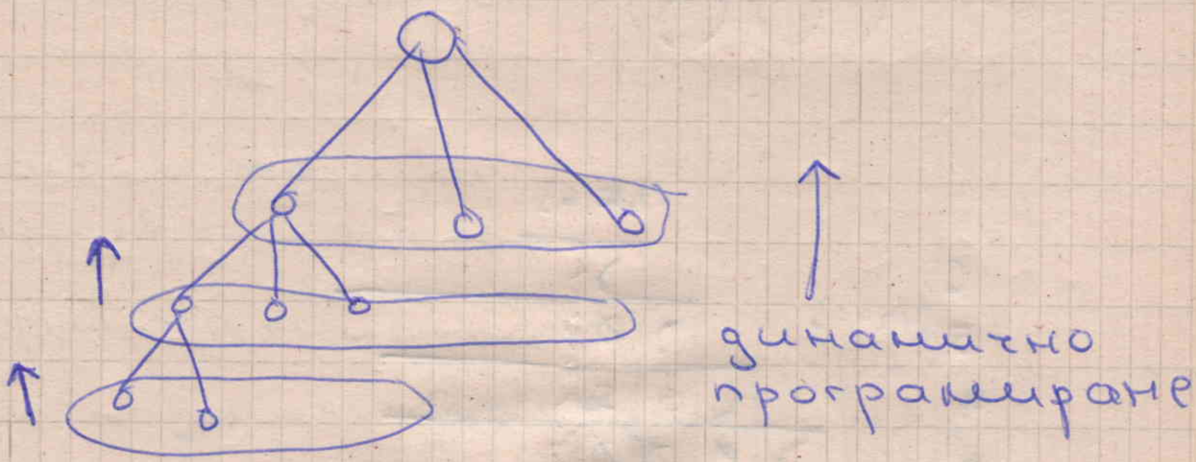
$N[i, i+s]$ ~~за~~ озн.

мн. R

$N[i, i+s] = \{A \in \Gamma \mid A \Rightarrow_G^* x_i x_{i+1} \dots x_{i+s}\}$

Тогава $\omega \in L(G) \iff S \in N[1, 1+n-1]$

Вс. едно от мн. $N[i, i+s]$ може да бъде намерено чрез следния алгоритъм (за динамично програмиране)



$N[i, i+0] = \{x_i\}$ за $1 \leq i \leq n$

for $S = 1, \dots, n-1$ do

for $i = 1 \dots n-S$ do

for $k = i \dots i+s-1$ do

ако има правило $A \to BC$ за някои $B \in N[i,k]$ и $C \in N[k+1, i+s]$

прибавяме A към $N[i, i+s]$

$G' : S \to SS \mid (S_1 \mid ()$

$S_1 \to S)$

$G: \Gamma = \{S, S_1\}$

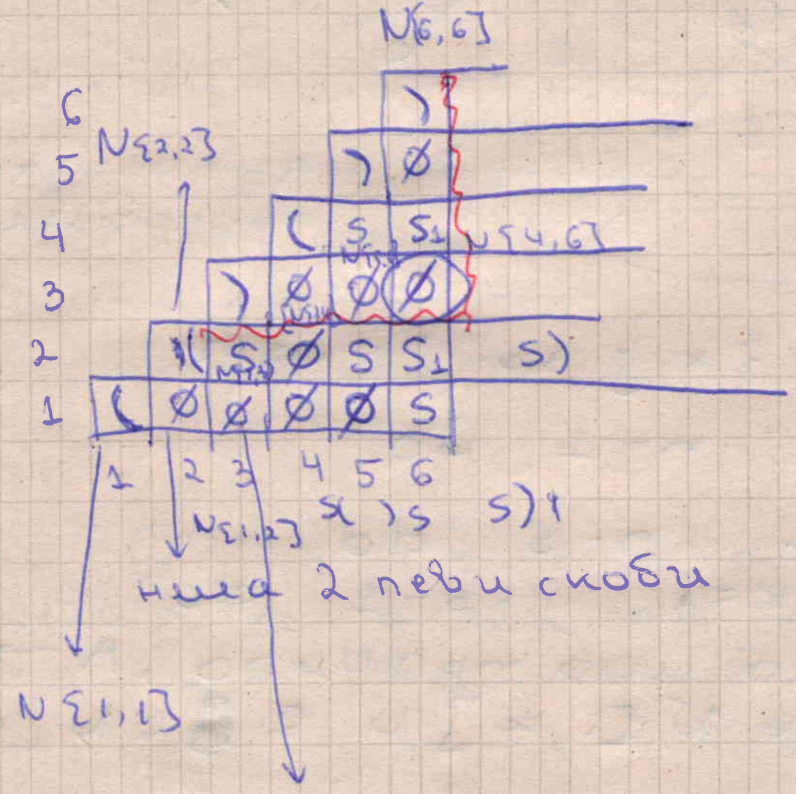
$\Sigma = \{(\ )\}$

S

$R: S \to SS \mid (S_1 \mid ()$

$S_1 \to S)$

(( ) ( ))



N{1,3} се получава от

N{1,1} N{2,3}

N{1,2} N{3,3}

N [2, 4]

N [3, 5] → N [3, 3] N [4, 5]

N [3, 4] N [5, 5]

N [1, 4] → N [1, 1] N [2, 4]

N [1, 2] N [3, 4]

N [1, 3] N [4, 4]

Избираме 1 позиция

Разп. наляво и нагоре

∀ нетерминални, които могат

да изведат)(()) - няма

такива

$S_1 \vdash_{G^*} ()(())$ S_1 единствен

на място

(()()) ∈ L(G) защото S → [1, 6]

n×n

n-дължина дума

n^2 стъпки

квадратичен алгоритъм

---

1 въпрос + 1 задача

Ксения Ивова Цочева
Приложна математика
II курс, III група

Факултетен №: 31302

1 зад. $S \to abS \mid b$

$$ab \to b$$
$$ab \to abab$$

b

$$L = \{(ab)^n b \mid n \in N\}$$
$$(ab)^* b$$

$$S \vdash abS \vdash ababS \vdash abababS \ldots$$
$$\vdash (ab)^n \qquad (ab)^n b$$

2 зад. $S \to aSb \mid \varepsilon$

$$L = \{a^n b^n \mid n \in N\}$$

3 зад. $S \to bSb \mid A$

$A \to aA \mid \varepsilon$

$$L = \{b^n a^k b^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

~~$a^n b^k a^l b^m$~~

a

4 зад.

$S \to A \mid B \mid \varepsilon \qquad a^* b^* \mid b^* \mid \varepsilon = a^* b^*$

$A \to aA \mid B \mid \varepsilon \qquad a^*(\varepsilon \mid b^*) = a^* b^*$

$B \to bB \mid \varepsilon$

$L = \{ \{\varepsilon\} \cup a^n b^k \,\|\, n, k \in N \}$

$S \to \varepsilon$

$S \to A$, $S \to B$

$A \to B \to bB \to bbB \to \dots b^k B \to b^k$

$A \to \varepsilon$

$A \to aA \to a\cancel{bb} \to abB \to abbB$

$aA \to a$

$aA \to aaA \to aaB \to aabB \to aabbB \dots$

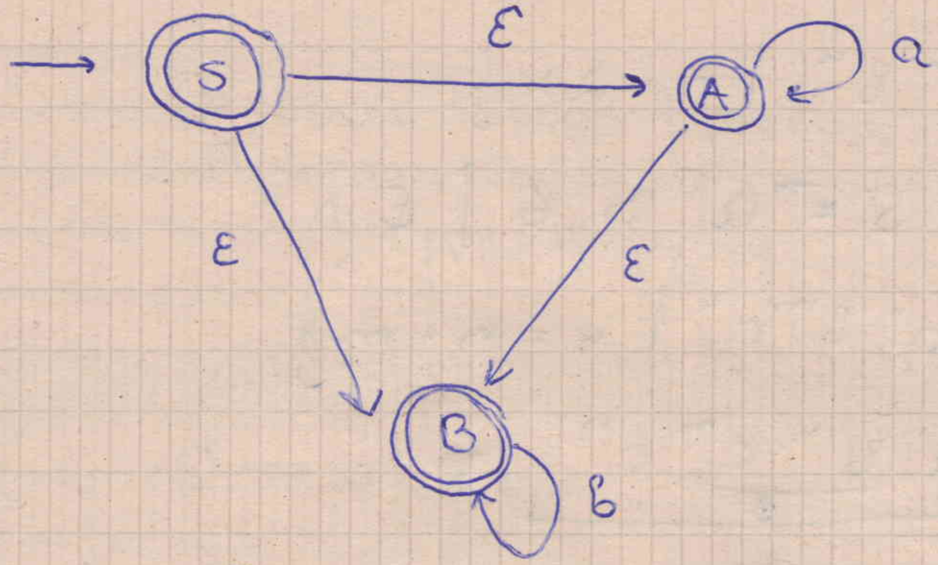
$aaA \to aaaA \to a^n A \to$

$\{a^n b^k \mid n, k \in N\} \cup$

$\{b^k \mid k \in N\} \cup$

$\{\varepsilon\} = \{a^n b^k \mid n, k \in N\}$

недетерминирани



5 зад. $L = \{a^n b^k \mid n > k\}$

$n = k + i \quad i \in \mathbb{N}$

$a^i \cdot a^k \cdot b^k$

$S = a\,K \mid \varepsilon$
$K = aKb \mid \varepsilon$

$S = aA \mid K \mid \varepsilon$
$K = aKb \mid \varepsilon$
$A = aA \mid \varepsilon$

$\{a^n b^k \mid n \geq k+1\} \quad n = k+1+i$

$\{a^{k+1+i} b^k \mid k, i \in \mathbb{N}\}$

$a^k \underbrace{a a^i}_{I} b^k \qquad I = aI \mid \varepsilon$

$S \to aSb \mid aI$

$S \to aSb \mid aS \mid a$

зад. $\{a^n b^k \mid n = 2k\}$

$$S \to a^2 S b \mid \varepsilon$$

зад. $\{a^n b^m c^k \mid k = n+m\}$

$$\underbrace{a^n \underbrace{b^m c^m}_{B} c^n}_{A}$$

$$B \to bBc \mid \varepsilon$$
$$A \to aAc \mid B$$

зад. $\{a^n b^m c^k \mid k = n-m\}$

$n = k+m$

$$\underbrace{a^k \overbrace{a^m b^m}^{M} c^k}_{S}$$

$$S \to aSc$$
$$M \to aMb \mid \varepsilon$$

зад. abba aabbaa baab

ababab

ba

$S \to aBa \mid M$ $\quad L \to bSb$

$B \to bBb \mid \varepsilon$

$M \to abM\,\cancel{ab}\,ba \mid \varepsilon$

$N \to baN\,\cancel{ba}\,ab \mid \varepsilon$