Скаларно произведение на вектори

Цели: Обяснение на понятието скаларно произведение.
След обучението Вие:
1. ще изчислявате скаларното произведение на два вектора
2. ще използвате скаларното произведение за изчисляване на ъгъла между два вектора.

Както е известно при умножаването на вектор с число се получава вектор. Сега ще въведем друг тип умножение, а именно умножение на два вектора, при което резултатът е число (скалар).

Определение. Ако $\vec{u}=\langle u_1,u_2\rangle$ и $\vec{v}=\langle v_1,v_2\rangle$ са два вектора в двумерно пространство, то скаларното произведение на $\vec{u}$ и $\vec{v}$ се бележи с $\vec{u}.\vec{v}$ и се дефинира като

$$\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2\,.$$

Аналогично, ако $\vec{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ и $\vec{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ са вектора в тримерното пространство, то скаларното им произведение е

$$\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\,.$$

С думи казано, скаларното призведение на два вектора се получава като умножим съответните им компоненти и ги получените произведения съберем. Запомнете, че скаларното произведение е число.

<u>Пример 1.</u>

$$\begin{aligned}&\langle 3,5\rangle.\langle -2,4\rangle=3(-2)+5.4=-6+20=14\\&\langle 2,3\rangle.\langle -3,2\rangle=2(-3)+3.2=0\\&\langle 1,3,-4\rangle.\langle 5,-2,-3\rangle=1.5+3(-2)+(-4)(-3)=11\end{aligned}\,.$$

Забележка. По-нататък ще използваме удебелен шрифт за да записваме векторите.

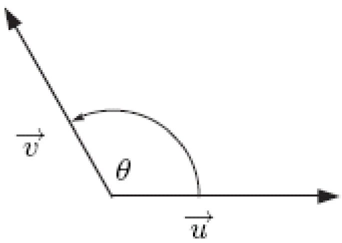
Свойства на скаларното произведение

Ако $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ са вектори в двумерно, тримерно или n–мерно пространство и k е произволно число, то

- $\mathbf{u.v} = \mathbf{v.u}$
- $\mathbf{u.(v + w) = u.v + u.w}$
- $k(\mathbf{u.v}) = (k\mathbf{u}).\mathbf{v} + \mathbf{u}.(k\mathbf{v})$
- $\mathbf{v.v} = |\mathbf{v}|^2$
- $\mathbf{0.v} = 0$

Ъгъл между два вектора

Нека $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ са ненулеви вектори в двумерно или тримерно пространство, разположени така, че началните им точки съвпадат, както е показано на долната фигура.



Ъгълът между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ може да се дефинира като най-малкият ъгъл по посока обратна на часовниковата стрелка ($0 \leq \theta \leq \pi$), който се получава при въртене на $\mathbf{u}$ до съвпадане с $\mathbf{v}$.

<u>Теорема.</u> Ако $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ са ненулеви вектори в двумерно или тримерно пространство и θ е векторът между тях, то

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u.v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|}.$$

Често е удобно тази формула да се записва във вида:

$$\mathbf{u.v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|\cos\theta.$$

Забележка. $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ са перпендикулярни.

Пример 2. Да се намери ъгълът между векторите $\mathbf{u} = i - 2j + 2k$ и $\mathbf{v} = -3i + 6j + 2k$.

Имаме $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 2 \rangle$ и $\mathbf{v} = \langle -3, 6, 2 \rangle$. От формулата

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|}$$

намираме

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\mathbf{v} &= 1(-3) + (-2)6 + 2.2 = -11 \\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7 \end{aligned} \quad .$$

Тогава

$$\cos\theta = \frac{-11}{7.3} = -\frac{11}{21}.$$

Следователно,

$$\theta = \arccos(-\frac{11}{21}) \approx 2.12 \ \mathbf{rad} \ \approx 121.6^0 .$$

Литература:

Adams R.A., *Calculus: A complete Course*, 5th Edition, Pearson Education Limited, 2003.

Anton H., Bivens I., Davis S., *Calculus*, 8th Edition, John Wiley&Sons, 2005.

Moris O.D., Cooke P., *Text & Tests 5*, The Celtic Press, 1993.

Автор:
Оливия Джил