

02.10.2013.

Борислав Ризов
boby@del.bas.bg

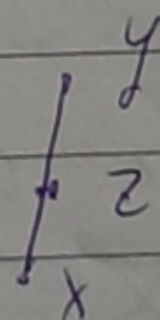
K1: 09.11 8T

K2: 11.01 8T

ПН, УН - 32

$$\frac{K1 + K2 + ПН + УН}{10} = 0$$

Prolog - min 4T



роотел (x, y)
визук $(x, y) \subseteq \exists z (p(z, x) \wedge p(y, z))$

драт, сира $\subseteq \exists z (p(z, x) \wedge p(z, y))$
сир вим сир е драт сир сир сир
 $\wedge \exists x = y$

Синтаксиски понятия

def: Терм (израз)

Var = $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ - безименно ~~неименовано~~ ^{именовано}

Const - имена за константи (импр. 1, 2, 0, ...)

Func - имена за функции (импр. +, *, -, f, ...)

Pred - имена за предикати ($<$, $>$)

Терм: константа - b

= променливи

= f - n -местни функционални символи

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ са термове, то

$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ е терм

Семантика:

$$A = \langle U, I \rangle$$

U - универсум, $U \neq \emptyset$

I - интерпретация

$v: Var \rightarrow U$, v - оценка

Пр. за терм: $1+x, f(f(x))$

$$\downarrow$$
$$\rightarrow +(1, x)$$

Интерпретация се състои от универсум,
 избор на функционални функции и избор на значения в универсум.

$$f^A: U^n \rightarrow U$$

$$c^A = I(c) \in U$$

$\uparrow$
интерпретацията на c

$$\|c\|_v^A = c^A$$

$$\|x\|_v^A = v(x)$$

$$\|f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\|_v^A = f^A(\|\sigma_1\|_v^A, \dots, \|\sigma_n\|_v^A)$$

Ст-та на x при струк. A
и оценка v

$$\dots \|\sigma_n\|_v^A \dots$$

Формули

1. Атомарни

1.1) $\sigma_1 = \sigma_2$

Пр: $1+x=y$

1.2) p е n -местен предикатен символ,
 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ са термове
 $p(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ е атом. ф-ла

Пр: $\text{Етило}(x)$

или $x < y$

вишок
хот

2. $\neg, \vee$ -формули, то ниверално приоритет
 $\neg \phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$
са също формули

Ако и $x \in \text{Var}(\text{пром.})$

$\Rightarrow \exists x \phi, \forall x \phi$ също са формули

Семантика: Кои са верни формули?

$\models$ са верни A

1.1) $\models \sigma_1 \models \sigma_2$
 $\downarrow$
съвпадат

1.2) $\models \sigma_1 \models \sigma_2 \models \dots \models \sigma_n \models \phi$

Пр: $1+x < 3$

Оценката казва x , интерпретирани - символите
и значения

и трябва да проверим дали е
така

$x \in S_1, x \in S_2, \dots, x \in S_n$

В: $\phi \models \psi, \psi \models \phi$ е еквивалентна

2. $\neg \varphi$ е вярно, когато φ не е вярно
 $(\varphi \wedge \psi)$ е вярно, когато $\varphi \wedge \psi$
 $(\varphi \vee \psi)$ е вярно, когато $\neg \varphi \vee \psi$ или $\varphi \vee \neg \psi$ е вярно
 $(\varphi \rightarrow \psi)$ е вярно, когато $\neg \varphi \vee \psi$ е вярно

$\exists x \varphi$:

модифицирана оценка
 x -проб

a -обект от универсума

$$V_a^x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ V(y), & \text{иначе} \end{cases}$$

$\exists x \varphi$ е вярно $\Leftrightarrow \exists a \in U: A \models \varphi$ е вярно

$$\| \varphi \|_{V_a^x}^A = U$$

пр: в $N \quad \exists x: x < z$

$\forall x \varphi$: $\forall x \varphi$ е вярно $\Leftrightarrow \forall a \in U: A \models \varphi$ е вярно

Straw very Prolog

Prolog:

програма с име Σ

Решор казва дали е вярна формулата F за Σ
(дали F е спрва поименно от Σ)

1. Клаузи:

1.1) Фикси

предикат
правила

$p()$

$p() : \text{ако } p_1(), p_2(), \dots, p_n()$

(p е вярно ако p_1 е вярно и p_2 , p_n е вярно
при тези аргументи)

цели

? - $p_1(), p_2(), \dots, p_n()$

(вярно ли е, че p_1 е вярно и p_2 е вярно
... и p_n е вярно при тези аргументи)

Променливи - запосват с главни букви (x, x_{abc})

Константи - запосват с малки букви ($ivan, miki, A, a$)

$p(x) :- q(x), r(y)$

($p(x)$ е вярно, ако $q(x)$ е вярно и $\exists y: r(y)$)

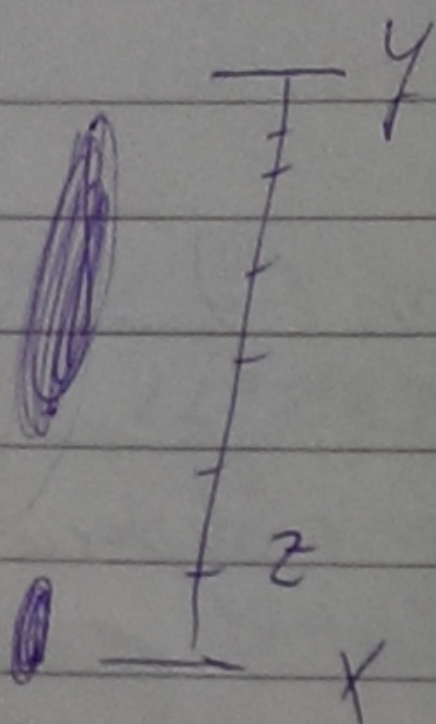
$p(x) :- q(x), r(y)$ } $p(x)$ е вярно ако
 $p(x) :- n(z)$ } е едно или друго

Програма:

Имаме: $p(\text{ivan}, \text{maria})$ y родител
 $p(\text{maria}, \text{peter})$
 Преводи се изразим $v(x, y)$ вук

Решим: $v(x, y) :- p(z, x), p(y, z)$

Потомък: $s(x, y)$?



$s(x, y) :- p(y, x).$
 $s(x, y) :- s(z, y), p(z, x).$

Затова не прави отпoнoмo извикване на $s(z, y)$

? - $s(\text{ivan}, \text{maria})$ Не!
 ? - $s(\text{ivan}, x)$ ^{кой} ~~кой~~ ^{кой} е потомък на Иван?
 ? - $s(x, \text{ivan})$ ^{кой} ~~кой~~ ^{кой} е потомък на Иван?
 ? - $s(x, y)$ Кой и кой е потомък?

$\text{add}(x, L, NL)$

Да добавим x в L и да получим NL
 (т.е. L не се променя)

призв. атом е
 рекур. (H, P)
^{символ 'атом'}

$\text{add}(x, L, d(x, L))$

добавяне x

Имплементация:

① member:

$\text{member}(H, [H|T])$
 $\text{member}(P, [H|T]) :- \text{member}(P, T).$

② append

$\text{append}([], B, B)$
 $\text{append}([H|A], B, [H|AB]) :- \text{append}(A, B, AB)$

③ последний элемент

$\text{last}(X, L) :- \text{append}(A, [X], L)$

X е последний на L , ако хам A до него и
пустим L .

④ член на списък

$\text{member}(X, L) :- \text{append}(A, [X|B], L)$

⑤ премахване на елемент от средата

$\text{remove}(X, L, N) :- \text{append}(A, [X|B], L),$
 $\text{append}(A, B, N)$

⑥ премахване ~~издава~~ от началото или из края

$\text{remove}(X, [X|T], T)$

$\text{remove}(X, [H|T], [H|N]) :-$
 $\text{remove}(X, T, N).$

⑥ добавление

$add(x, L, N) - remove(x, N, L).$

Задача: Пермутациями или список

И:

$perm([], [])$

$perm([H|T], L) :- member(H, L),$
 $remove(H, L, M),$
 $perm(T, M)$

ИИ: $perm([], [])$

$perm([H|T], L) :- remove(H, L, M),$
 $perm(T, M).$

Задача будем все пермутации

$perm(P, [1, 2, 3, 4]), write(P), nl, fail.$

⑦ сортированный список - проверка

$sorted([]).$

$sorted([_]).$

$sorted([A, B | T]) :- A \leq B, sorted([B | T]).$

⑧ сортирование

$sort(S, L) :- perm(S, L), sorted(L).$

⑨ премахиване списка X

I H:

remove-all (x, L, L) :- not(remove(x, L, _)).

remove-all (x, L, N) :- remove(x, L, M),
remove-all(x, M, N).

II H: remove-all (x, [], []).

remove-all (x, [X:P], L) :- remove(x, P, L).

remove-all (x, [H:P], [H:L]) :- X \= H, remove-all(x, P, L).

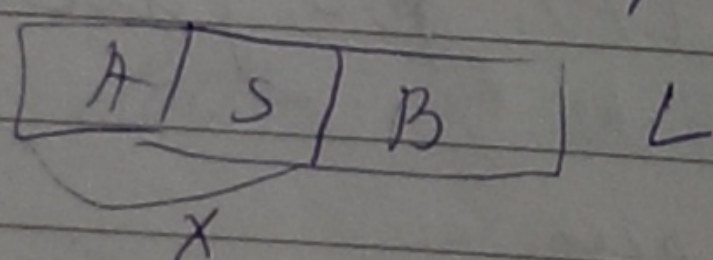
(10) omprugame

not(a). - ako a-P, ymoro - F
not((a, b)).

(11) sort c omprugame

$\forall x \in \mathcal{C} \iff \exists x \in \mathcal{C}$

sorted(L) :- not(~~sublist~~^{sublist}([A,B]), not(A=B)).
sublist(S, L) :- append(X, B, L),
append(A, S, X).



16.10.2013.

(12) %min (M, L).

I H:

min(M, L) :- member(M, L), not(member(M, L), N > M).

II H:

min(M, [M]).

min(M, [H:P]) :- min(M, P), less(M, H, N).

less(A, A, B) :- A < B

less(B, A, B) :- A > B

Selection Sort

(13) $ssort([], [])$
 $ssort([M|S], L) :- \text{min}(M, L), \text{remove}(M, L, T),$
 $ssort(S, T).$

(14) Quick Sort

$[x|L]$

$A \leq x < B$

$\% \text{split}(x, L, A, B) :-$

$\text{split}(x, [], [], [])$
 $\text{split}(x, [H|T], [H|A], B) :- H < x,$
 $\text{split}(x, T, A, B)$
 $\text{split}(x, [x|T], A, [H|B]) :- H \geq x,$
 $\text{split}(x, T, A, B).$

$qsort([], [])$
 $qsort(S, [x|L]) :- \text{split}(x, L, A, B),$
 $qsort(SA, A), qsort(SB, B),$
 $\text{append}(SA, [x], [SB], S).$

p.p - Bubble sort

(15) $\text{p.p.} \text{ bubble sort}$

$[]$ $\% \text{add}(x, N)$
 $[L, T, R]$ $\% \text{mt}(L, T)$ $\% \text{etr}$
 $\% \text{tsort}(S, L).$

tsort (S, L) :- mt (L, P), ltr (P, S)

add (x, [], [[], x, []]).

add (x, [L, P, R], [L1, P, R]) :- x < P

add (x, L, L1)

add (x, [L, P, R], [L, P, R1]) :- x >= P

add (x, R, R1).

ltr ([], []).

ltr ([L, P, R], S) :- ltr (L, L1), ltr (R, R1),
append (L1, [P|R1], S)

mt ([], []).

mt ([H|L], P) :- mt (L, P1), add (H, P1,

16 % reverse (R, L)

H.

reverse ([], []).

reverse (R, [H|L]) :- reverse (L, L1),
append (L1, [H], R)

II H.

L []

[H|L] S

L [H|S]

[] R

reverse1 (R, [], R)

reverse1 (R, [H|L]) :- reverse1 ([H|R], L, R)

reverse (R, L) :- reverse1 ([H|R], L, R)

reverse1 ([], L, R) :- reverse (R, L)

~~17~~ Арифметика

(+) x is $y + z$

(17) Римские числа

M - 1000
D - 500
C - 100
L - 50
X - 10
V - 5
I - 1

Размещение CM - 900
CD - 400
XC - 90
XL - 40
IX - 9
IV - 4

rom(0)
rom(x) :- r(z, y), $y \leq x$, write(z),
x1 is x-y, rom(x1).

r(m, 100)
r(cm, 900)
r(d, 500)
!
r(1, 1)

← факты
появляются в изходе
рег

ако не са подредени в изходен рег

* $\rightarrow$ not (~~y~~ r(z1, y1), $y1 > y$, $y1 \leq x$)

(18) рвпнми же список

%length (N, L)

length (0, [])

length (N, [H | T]) :- length (N, T), N is H+1

(19) списък на елементите на списък

sum (0, [])

sum (S, [H | T]) :- sum (R, T), S is H+R

23.10.2013.

% subset (x, s)

subset ([], ^S [])

subset (X | L, S) :- append (A, [X | B], S),
subset (L, B)

% x-элементно подмножество из L

% C (X, K, L)

X е K-элемент. подмножество на L

C ([], 0, L)

C ([X | L], K, S) :- append (A, [X | B], S), K4 is K-1,
C (L, K4, B).

Забележка: X е списък от числа, Y е списък от списъци от числа:

1. $p_1(X, Y) \subseteq$ Съвпадение елементите на X, когато
всички елементи на Y

2. $p_2(X, Y) \subseteq$ Съвпадение елементите на X, когато

е $\forall \forall \forall$ элемент из Y

3. $p_3(x, y) \Rightarrow$ Всеми элем. из X е $\forall$ изкой элем. из Y

4. $p_4(x, y) \Rightarrow$ Всеми элем. из X е $\forall \forall \forall$ всеми элем. из Y .

1. $\exists x \exists y \in$

2. $\exists x \forall y \in \models \exists x \exists y \neg \in$

3. $\forall x \exists y \in \models \neg \exists x \neg \exists y \in$

4. $\forall x \forall y \in \models \neg \exists x \neg \neg \exists y \neg \in \models \neg \exists x \exists y \neg \in$

$\forall x \models \neg \exists x \neg$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
---	--

Решение:

1. $p_1(x, y) :- \text{member}(A, x), \text{member}(B, y), \text{member}(A, B)$

2. $p_2(x, y) :- \text{member}(A, x), \text{not}(\text{member}(B, y), \text{not}(\text{member}(A, B)))$

3. $p_3(x, y) :- \text{not}(\text{member}(A, x), \text{not}(\text{member}(B, y), \text{member}(A, B)))$

4. $p_4(x, y) :- \text{not}(\text{member}(A, x), \text{member}(B, y), \text{not}(\text{member}(A, B)))$

Генератор на списък

? - $p(x)$ - генерира редици от числа (без
 $0, 1, 2, 3, \dots$
 $1, 3, 5, 7, \dots$
 $0, 1, 4, 2, \dots$ } възможности

$0, 1, \dots, 10$ } крайни
 $-10, -9, \dots, -3$

рвонти, тронти
 нр. $\neq$ ако ест. числа
 $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle$

0/0 ген. на ест. числа

$e(0)$
 $e(x) := -e(y)$, x is $y+1$

0/0 ген. на числа м/у AB

between $(A, A, B) := -A = B$
 between $(x, A, B) := -A < B$, A is $A+1$,
 between $(x, A+1, B)$.

0/0 всички рвонти естествени числа

$e(x, y) := -e(A)$, between $(x, 0, A)$, y is $A+1$

г.р. - генерира на целих числах

0, 1,

16

$$f_i \in (0, 1)$$
$$f_6(B, C) := -f_6(A, B), \quad C \text{ is } A+B$$
$$f_b(A) = f_b(A, C)$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_{n+3} = a_n + c_{n+1}$$

$\theta: p(L, L, L)$

$p(B, C, D) :- p(A, B, C), \text{Dis } A + B$

30.10.2013.

зрасс 1

Задача 2:

Зарази 2:
 60% $S(L, C)$ - разпредел L на частите, които са били
 елементи на C

$$[1, 2, 3, 4] \rightarrow [[1, 2, 3, 4], [[1, 2], [3, 4]], [[1, 2], [3]], \dots]$$

$\alpha \in \text{Aut}(A)$

задача 1: Решение

$p(0, [])$
 $p(N, [H | T]) :- \text{between}(H, 1, N), M \text{ is } N-H,$
 $p(M, T)$

Π_H : $p(N, [N])$

$p(N, [H | T]) :- N1 \text{ is } N-1, \text{between}(H, 1, N1),$
 $M \text{ is } N-H, p(M, T)$

задача 2:

$s(L, [H | T]) :- \text{append}(H, N, L), H1 = [H],$
 $N1 = [T], s(N1, T).$
 $s(L, []).$

задача 3:

$\% d(L, D) - \text{Декартово произведение}$

$d([], [])$

$d([H1 | T1], [M | N]) :- \text{member}(H1, M),$
 $d(T1, N)$

задача 4:

def - Двоично дърво

1) $[\]$ е двоично дърво

2) A, B са дървета, то $[A, B]$ е двоично дърво

Да се рекурентно дефинира двоично дърво

$d([\])$

$d([A, B]) = d(A), d(B)$

↑

това ще се преустрои.

Не работим с брой възли:

$Tree(T) :- e(N), t(N, T)$

$t(0, [\])$

$t(N, [A, B]) :- N \geq 1$

between(M, 0, N-1), P is N-1-M,

$t(M, A), t(P, B)$

Задача 5:

% $d(M, N)$ е четно $\Leftrightarrow M$ и N имат един
прост делител

Решение:

$m(A, B) :- 0 \text{ is } A \bmod B$

$div(M, D) :- \text{between}(0, 2, M), m(M, D)$

$p(P) :- \text{not}(div(P, Q), Q \neq P)$

$pddiv(M, D) :- div(M, D), p(D)$

$c(A, B) = \text{not}(\text{pdiv}(A, P), \text{not}(m(B, P)))$
 $d(A, B) = c(B, A), c(A, B).$

Зап. 6

$[[1], [[2]], [[3, [2]]]]$

→ $[4, 2, 3, 2]$

flat(L, F)

list([])

list([_]).

} негустым, чтобы
 проверить, что не
 пусто

flat([], [])

flat([H|T], L) : - list(H), flat(H, FH)

flat(T, FT), append(FT, FH)

flat([H|T], [H|F]) : - not(list(H)), flat(T, F)

Per. узрз

ϵ

$a \in \Sigma$

AB

$A+B$

$A \setminus B$

A^+

06.11.2013

Per. бук

$\{\epsilon\}$

$\{a\} LA \cdot LB = \{a \cdot b \mid a \in LA, b \in LB\}$

$LA \cdot LB = \{a \cdot b \mid a \in LA, b \in LB\}$

$LA \cup LB$

LA^+

$$L^0 = \{\epsilon\}$$

$$L^{n+1} = L^n L = L \cdot L^n$$

$$L^+ = \bigcup \{L^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$A^+ = A A^*$$

$$A^? = A + \epsilon$$

$$\langle \Sigma, a, s, f, \Delta \rangle$$

$$\text{eps} ([\epsilon], [\epsilon], [\epsilon], [\epsilon]).$$

$$a ([A, [\epsilon, 1], [0], [1], [\epsilon, A, 1]]).$$

$$\vee (N, [\epsilon], [\epsilon]).$$

$$\vee (N, [H, 1], [N, H, 1]) :-$$

$$NH \text{ is } H + N, \vee (N, 1, N).$$

$$\vee 3 (N, [\epsilon], [\epsilon]).$$

$$\vee 3 (N, [Q1, A, Q2], [F, Q4, A, N, Q2], [N]).$$

$$:- NQ1 \text{ is } N + Q1, NQ2 \text{ is } N + Q2,$$

$$\vee 3 (N, 1, N).$$

$$\vee A (N, [Q, s, f, d], [N, Q, NS, NF, ND]) :-$$

$$\vee (N, Q, NQ), \vee (NS, NS), \vee (NF, NF),$$

$$\vee 3 (N, D, ND).$$

$$\text{union} ([Q1, s1, f1, d1], B, [Q, s, f, d]) :-$$

$$\text{length} (N, Q1), \vee A (B, [Q2, s2, f2, d2]),$$

$$\text{append} (Q1, Q2, Q), \text{append} (s1, s2, s),$$

$$\text{append} (f1, f2, f), \text{append} (d1, d2, d).$$

clone (Q, A, [], [])
 clone (Q, A, [HIS], [[Q, A, H]]) : -
 clone (Q, A, S, D)

%tofinal (#1, S2, D1, D).
 tofinal (F1, S2, [], []).
 tofinal (F1, S2, [[Q1, A, Q2]] D1], D) : -
 member (Q2, F1), clone (Q1, A, S2, C),
 tofinal (F1, S2, D1, D2), append (C, D2, D)

start (S1, F1, S2, S) member (X, S1), member (X, F1), append (S1, S2, S)
 start (S1, F1, S2, S1) :- not (member (X, S1), member (X, F1))

concat ([Q1, S1, F1, D1], B, [Q, S, F2, D2]) :- length (N, Q1),
 vlt (N, B, [Q2, S2, F2, D2]), append (Q1, Q2, Q), start (S1, F1, S2, S)
 to final (F1, S2, D1, D3), append (D1, D2, D4), append (D3, D4, D)

plus ([Q, S, F, D], [Q, S, F, D2]) :- tofinal (F, S, D, D2), append (D, D2, D).

star (A, S) :- plus (A, P), eps (E), union (F, P, S).

match (W, [Q, S, F, D]) :- member (X, S), walk (X, W, [Q, S, F, D]).

walk (X, [], [Q, S, F, D]) :- member (X, F).

walk ([H|W], [Q, S, F, D]) :- member ([H, A, Y], D),
 walk (Y, W, [Q, S, F, D]).

3apaca 2: See Nom & upad.

$\text{path}(G, x, y, v, p)$
 $\text{path}(G, x, x, v, [x, v])$
 $\text{path}(G, x, y, v, p) :- \text{arc}(x, z, G),$
 $\text{not}(\text{member}(z, v)), \text{path}(G, z, y, [z, v, p]).$
 $\text{path}(G, x, y, p) :- \text{path}(G, x, y, [x], p).$

13.11.2013

Зем

- | Const
- | Var
- | Func

Земля

анализ

- $p(T_1, \dots, T_n)$
 $T_1 \equiv T_2$

Несколько

- $\neg \varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$
- $\forall x \varphi, \exists x \varphi$

$A = \langle U, I \rangle$

$U \neq \emptyset$

$\forall \text{Var} \rightarrow U$

$\| \gamma \|_A$

$$\|c\|_V^A = c^A$$

$$\|x\|_V^A = v(x)$$

$$f \|(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)\|_V^A = f^A(\|\tau_1\|_V^A, \dots, \|\tau_n\|_V^A)$$

$$= A \models \tau_1 \doteq \tau_2 \quad \vee \quad A \models \tau_1 \neq \tau_2$$

$$= A \models_p(\tau_1, \dots, \tau_n) \quad \text{t.c.i.k.} \quad < \|\tau_1\|_V^A, \dots, \|\tau_n\|_V^A > \in p^A$$

$$= A \models \neg \varphi \quad \text{t.c.i.k.} \quad A \not\models \varphi$$

$$= A \models \varphi \wedge \psi \quad \text{t.c.i.k.} \quad A \models \varphi \text{ and } A \models \psi$$

$$= A \models \varphi \wedge \psi \quad \text{t.c.i.k.} \quad A \models \varphi \text{ and } A \models \psi$$

$$= A \models \varphi \rightarrow \psi \quad \text{t.c.i.k.} \quad A \models \varphi \text{ and } A \models \psi$$

$$\prod n. \varphi \rightarrow \psi \models \neg \neg \varphi \vee \psi$$

$$= A \models \varphi \leftrightarrow \psi \quad A \models \varphi \text{ and } A \models \varphi \quad \text{and} \quad A \models \psi \text{ and } A \models \psi$$

$$= A \models \forall x \varphi$$

$$v_a^x(y) \begin{cases} v(x) & x \neq y \\ a, & x = y \end{cases}$$

$$A \models \forall x \varphi \quad \text{т.ч. т.г.} \quad \exists a \in A, \quad A \models \varphi$$

$$A \models \sum_v$$

$\langle A, v \rangle$ - модел за $\sum$
 при които $\sum$ е изпълнено
 (поиската v отсъства)

$$A \models \sum$$

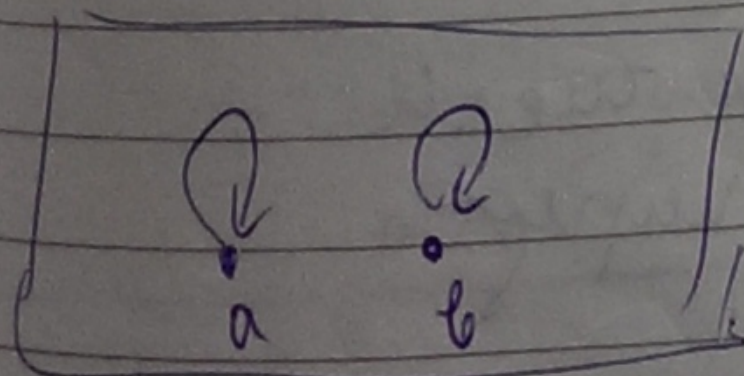
- при всяка оценка

$$\begin{aligned} & \forall x p(x, x) \\ & \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \\ & \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z)) \\ & \forall x \forall y (p(x, y) \wedge p(y, x) \rightarrow x = y) \end{aligned}$$

20.11.2013.

①

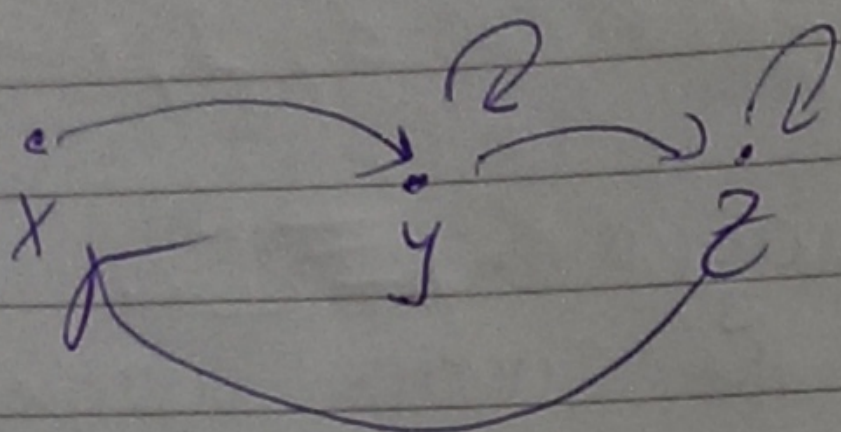
$$\begin{aligned} & \forall x p(x, x) \\ & \forall x \exists y \neg p(x, y) \\ & \forall x, \exists y, \exists z (p(x, y) \wedge \neg p(z, y)) \\ & \exists x \exists y (p(x, y) \wedge \neg p(y, x)) \end{aligned}$$



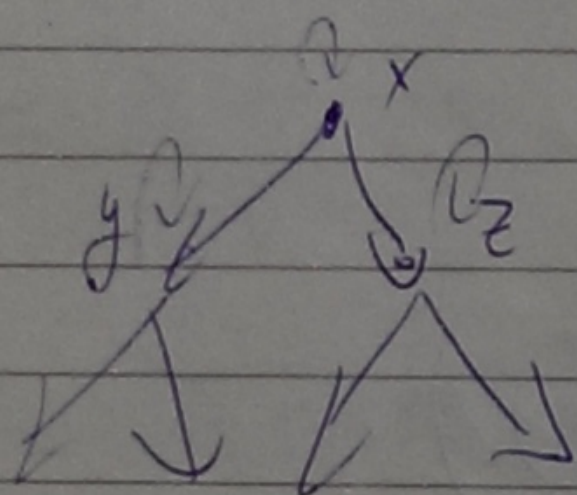
$$\langle \{a, b\}, \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \} \rangle$$

Вс $\varphi \neq \varphi$, φ е атомарна

$$(2) \quad \neg \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \vee p(y,z) \rightarrow p(x,z)) \\ \forall x \exists y (p(x,y) \wedge \neg p(y,x) \vee p(y,y))$$

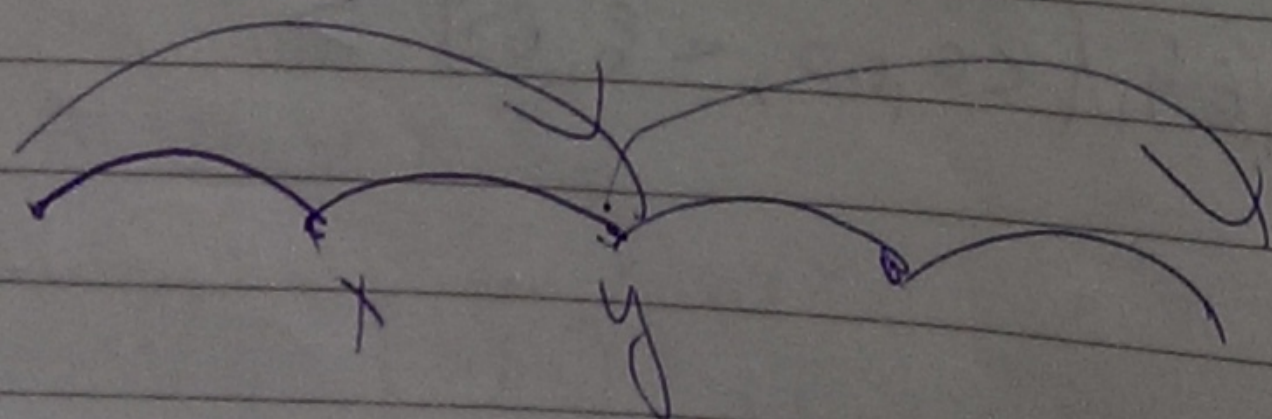
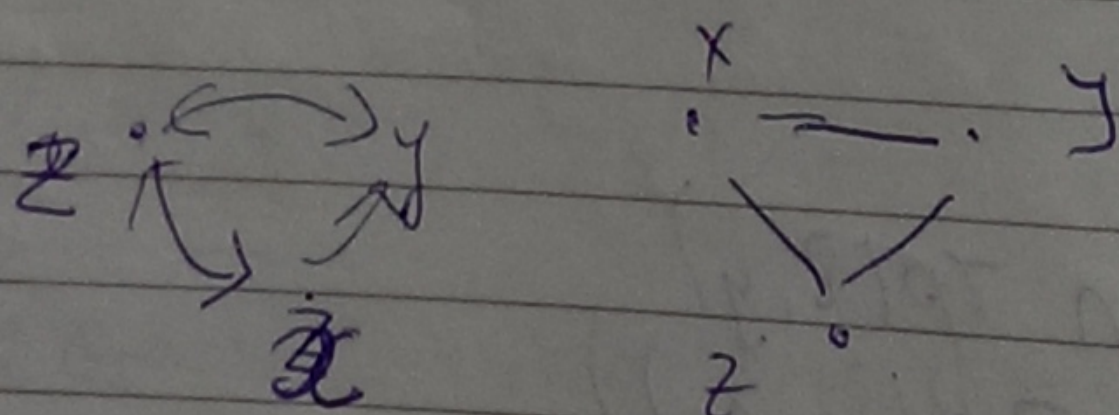


$$(3) \quad \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \vee p(y,z) \rightarrow p(x,z)) \\ \forall x \neg p(x,x) \\ \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge p(x,z) \wedge \neg p(y,z) \wedge \neg p(z,y) \wedge \neg (p(y,y) \wedge p(z,z)))$$



транзитивното затваряне
на релацията

$$(4) \quad \forall x \exists y \forall z (\neg p(x,x) \vee p(x,y) \vee p(z,x) \rightarrow p(z,y))$$



есть те же
предложения

2) var (от контр.)

$\forall x(M, N, L)$

$x(M, 0, \mathbb{Z})$

$x(M, N, [H, P])$ — $N > 0$, N_1 is $N-1$, between $(H, 0, M)$,
 $x(M, N+1, \mathbb{P})$.

Π_H

$p(L) := -e(N), \text{sums}(N, M)$.

$\forall x (p(x) \wedge q(x))$

связан
пром.

свободна
пром.

т.к. $\Rightarrow (\forall x p(x)) q(x)$

$E \neq \emptyset \Leftrightarrow E \cup \{e\}$ е неизпътиско

Док-во:

$\Rightarrow A \models E \cup \{e\}$

$\Downarrow A \models E$ и $A \models e$
 $\Downarrow A \models \emptyset$

$\Leftarrow E \cup \{e\}$

$\neg A \models E \quad A \not\models e \Rightarrow A \not\models \emptyset \Rightarrow A \models E \cup \{e\}$

но то е неизпътиско

(а нм му нммерихме мореп)

$\Sigma \models \Delta$

Всички модели на Σ са модели на Δ

- (1) 1. Ако всяко крайно теоремно Γ_0 на Γ е изпълнено, то и Γ е изпълнено
 2. Ако Γ е изпълнено, то съществува крайно теоремно, което е изпълнено.
 3. Ако $\Sigma \models \varphi$ то съществува Σ_0 с $\Sigma_0 \models \varphi$

Доказано

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$$

$$1 \Rightarrow 2$$

$$A \Rightarrow B$$

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

Доп, че в Γ $\nexists$ теорема, което Γ е изпълнено.
 $\Rightarrow \nexists$ теорема, се изпълни $\Rightarrow$
 Γ е изпълнено $\Rightarrow \nexists$

$$2 \Rightarrow 3$$

$$\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \exists \Gamma \{ \neg \varphi \} \text{ е изпълн.}$$

$$N_\varphi \subseteq \Sigma \cup \{ \neg \varphi \}$$

↑
крайно

$$\Sigma_0 = N_\varphi \setminus \{ \neg \varphi \}$$

$$N_\varphi \subseteq \Sigma_0 \subseteq \Sigma$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_0 \models \varphi$$

$$3 \Rightarrow 1$$

$$\nexists \Gamma_0 \subseteq \Gamma$$

Γ_0 - изгодно

↑
кратко

Γ - не изгодно

$$\exists \varphi \in \Gamma$$

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ - изгодно

$$\Gamma \not\models \neg \varphi$$

$$\Rightarrow \exists \Gamma_0 \subseteq \Gamma, \Gamma_0 \models \neg \varphi \Leftrightarrow \Gamma_0 \cup \{\varphi\} \text{ е}$$

и е норм. на Γ $\checkmark$

задача

Γ -множ. от формули

$\exists$ и $\forall$ стр. A има $\varphi \in \Gamma : A \models \varphi$

Да се разгледа възм. $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$:

$\varphi_1 \cup \varphi_2, \dots, \varphi_n$ е истина.

Решение:

$\bar{\Gamma} = \{\neg \varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$ - изгодно
т.к. (ако $A \models \varphi \Rightarrow A \not\models \neg \varphi$)

$\Rightarrow$ съществува $\Gamma_0 \subseteq \bar{\Gamma}$ - изгодно

$$\{\neg \varphi_1, \neg \varphi_2, \dots, \neg \varphi_n\} = \Gamma_0$$

$\exists$ същ $\varphi_i : A \not\models \neg \varphi_i \Rightarrow A \models \varphi_1 \cup \dots \cup \varphi_n$

г.р. $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$
 (1) $\varphi_1 \vdash \varphi_2 \vdash \varphi_3 \dots \vdash \varphi_n$
 $\varphi_1 \not\vdash \varphi_2 \not\vdash \varphi_3 \dots \not\vdash \varphi_n$

Да се покаже Γ е изпълнено

(2) Γ, Δ . За $\forall$ стр. A $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Delta \vdash A$
 φ и ψ формули $\varphi \models \Gamma, \psi \models \Delta$

27.11.2013.

От домашната:

(1) Покаже Γ е изпълнено $\Rightarrow$ Съществува $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ крайно изпълнено

Същ. и $\Gamma_0 \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ - изпълнено

$\varphi_1 \vdash \varphi_2 \vdash \varphi_3 \dots \vdash \varphi_n$

$\varphi_1 \models \varphi_2 \dots \varphi_n \models \varphi_{n+1}$

$\downarrow$

$\Rightarrow$ няма модел. $\Rightarrow \perp$

(2) $\Delta \models \Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$\varphi \subseteq \varphi_1 \wedge \varphi_2 \dots \varphi_n$ (ако е крайно)

Оттук:

$\Gamma \vee \Delta$ - изпълнено

Общ. $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta$
 кр. неуст.

$$\Gamma_0 = \Sigma \cap \Gamma$$

$$\Delta_0 = \Sigma \cap \Delta$$

$$\cap \Gamma \quad \alpha \subseteq \Gamma \cap \varphi_1 \cap \varphi_2 \dots \cap \varphi_n$$

$$\cap \Gamma_0$$

$$\cap \Delta_0$$

$$\Pi$$

$$\Pi$$

$$\Gamma$$

$$\Delta$$

Задача е макс:

$$A \models \Gamma \Rightarrow A \models \Gamma_0 \Rightarrow A \models \Delta_0$$

$$\Rightarrow A \models \Delta \Rightarrow A \models \Gamma$$

$$\Rightarrow \Gamma_0 \models \Gamma$$

$$\cap \Gamma_0 \models \Gamma$$

аналог. за Δ_0 ,

Определение

$$A, \text{Var}^{\text{free}}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}, a_1, \dots, a_n \in |A|$$

$$A \models \varphi [a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow A \models \varphi$$

$$\{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid A \models \varphi [a_1, \dots, a_n] \}$$

иногда в φ не фигурируют все переменные

①

$$\langle \mathbb{N}, +, 1 \rangle \equiv$$

{0}

$$x+x \equiv x$$

$$\forall x+y=x$$

$$\boxed{\exists \wedge \forall \rightarrow}$$

{1}

$$\{ \langle x, y \rangle \mid x < y \}$$

$$\mathcal{Q} \{ \exists z (x+z=y \wedge z=z+z) \}$$

$$x = x+x$$

$$\forall x / \mathcal{Q} \rightarrow y = \cancel{y+x}$$

$$\langle \mathbb{N}, +, 1 \rangle \equiv$$

②

$$\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle \equiv$$

$$\{1\} \quad \forall x \quad x \cdot y = x$$

$$\{0\} \quad x \cdot x \equiv x \quad \wedge \quad \forall z \quad z \cdot x = z$$

③

$$\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 1 \rangle \equiv$$

$$\mathbb{N} \quad x \equiv x$$

$$\mathbb{Z} \quad x \equiv x$$

// get- beuren etc. usw.

// $\emptyset$

④

$$\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$$

$$\{0\} \quad x = x+x$$

$\mathbb{N}$

$$\exists x \exists y \exists z \exists w (p = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z + w \cdot w)$$

⑤

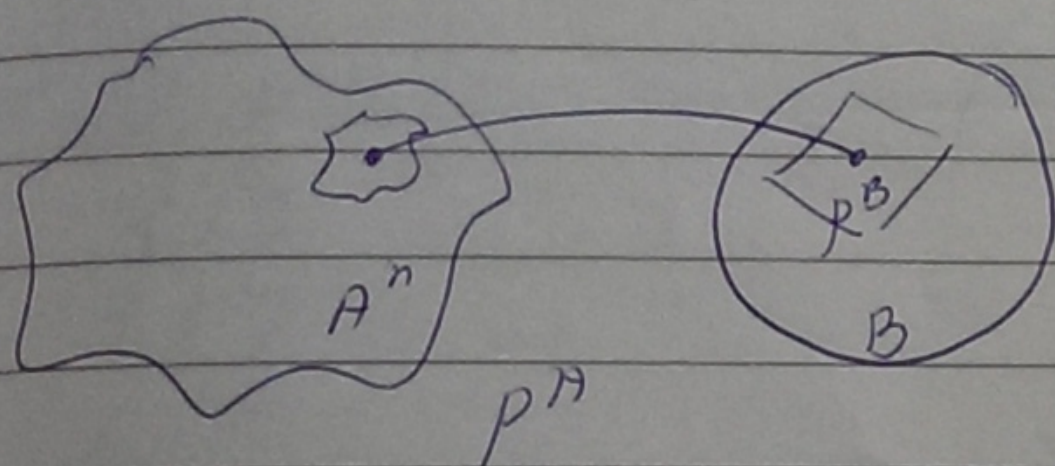
$$\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$$

$$\begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N}, \exists y \\ \psi_n(x) \rightarrow x \\ \exists x \exists y (\psi_1 \wedge \psi_n \wedge z = x+y) \\ \forall x \forall y (\psi_1 \wedge \psi_n \rightarrow z = x+y) \end{array}$$

$$\mathcal{C}_p \quad \forall x \forall y \left(m = x \cdot y \rightarrow x \neq m \vee y = m \right) \wedge \neg m = m \cdot m$$

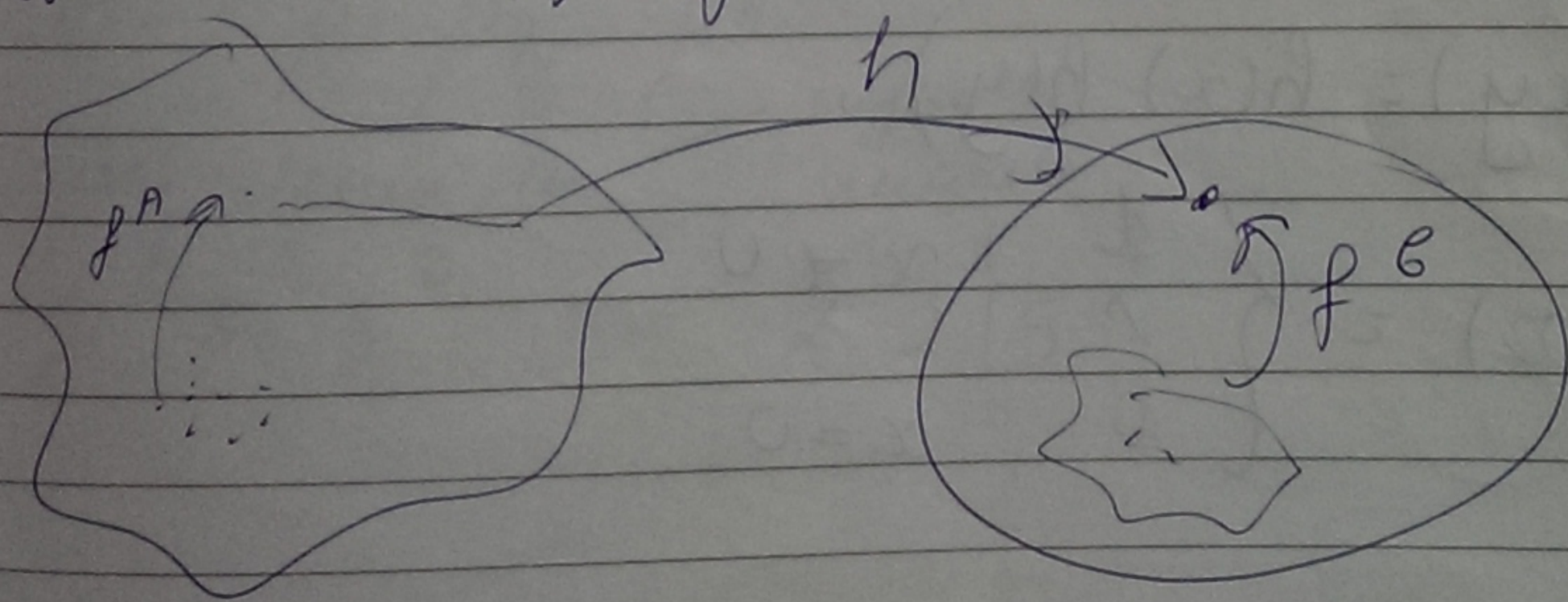
04.12.2013.

$$h: |A| \rightarrow |B| \quad \text{гомоморфизм}$$



$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^A \Leftrightarrow \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^B$$

$$h(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$$



$$h(c^A) = c^B$$

1. A - структура, $R \subseteq |A|^n$ определено,

h -автоморфизм в A . Верно е

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R \Leftrightarrow \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in R$$

Пр: 1

$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$$

$$\{0\} \quad x = x + x$$

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

$$h(x) = -x$$

Пр: 2

$$\langle \mathbb{R}, * \rangle$$

$$\{1\} \quad \forall x \quad y \cdot x = x$$

$$\{0\} \quad \forall x \quad y \cdot x = y$$

$$\{1, -1\} \quad \forall y (\forall x \quad y \cdot x = x \wedge \exists z \cdot z = y \wedge \neg \exists z \cdot z = y)$$

$$\langle \mathbb{Q}, * \rangle$$

$$h(xy) = h(x) \cdot h(y)$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Пр: 3

~~$$\langle \mathbb{Z}, * \rangle$$~~

$$\langle \mathbb{R}, + \rangle$$

$$\{0\} \quad x = x + x$$

$$h(x) = -x$$

Пр: 4

$$\langle \mathbb{R}^+, + \rangle, \langle \mathbb{Q}^+, + \rangle$$

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

$$h(x) = 2x$$

Пр: 5

$$\langle \mathbb{N}, * \rangle, (\mathbb{Z}, *)$$

105
115

$$h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$$

$$h(n) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} p_3^{d_3} \dots$$

$h(m)$

$$h(m) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} p_3^{d_3} \dots$$

Числа сгруппированы

$$h(2^1 3^1 5^0) = 2^0 3^1 5^1$$

Пр: 6

$$\langle \mathbb{N}, < \rangle$$

$$\exists x \ x < y$$

$$\forall x (x < y \rightarrow \exists z \ z < x) \wedge y$$

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{0, 2, 4, 6\} \subseteq \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

№: 7

$$\text{Var}^{\text{free}}(\varphi) = \text{Var}^{\text{free}}(\psi)$$

$$\varphi \wedge \psi \Rightarrow A \wedge B$$

№: 8

$$\text{Var}^{\text{free}}(\varphi) \cap \text{Var}^{\text{free}}(\psi) = \emptyset$$

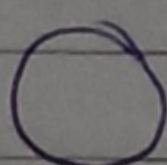
$$\text{Алм } \varphi \wedge \psi \Rightarrow A \times B$$

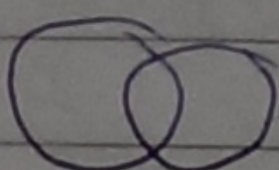
Задача.

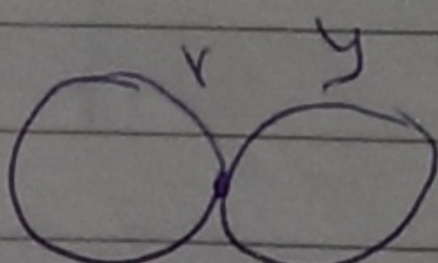
$$\langle \mathbb{Q}, <, 0, 1 \rangle$$

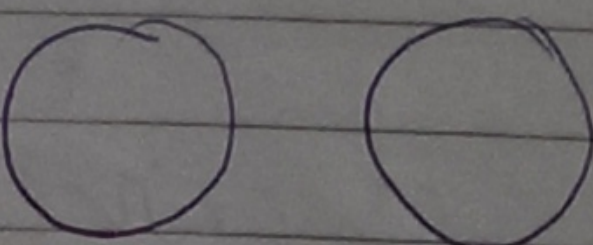
Определение $\mu \in \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

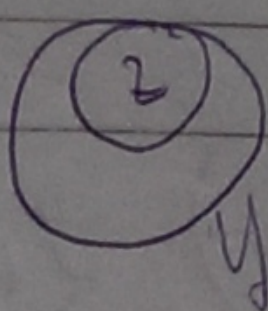
11.12.2013

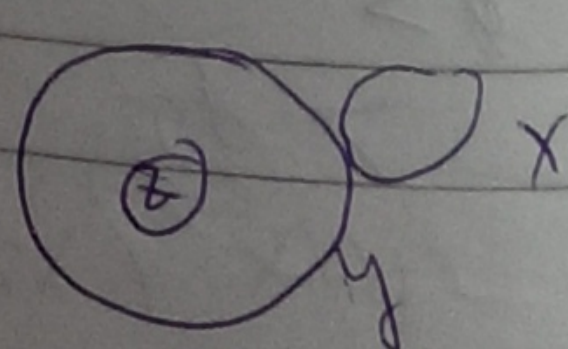
1.  $\equiv$

2. 

3.  $p(x, y)$

4. 

5. 

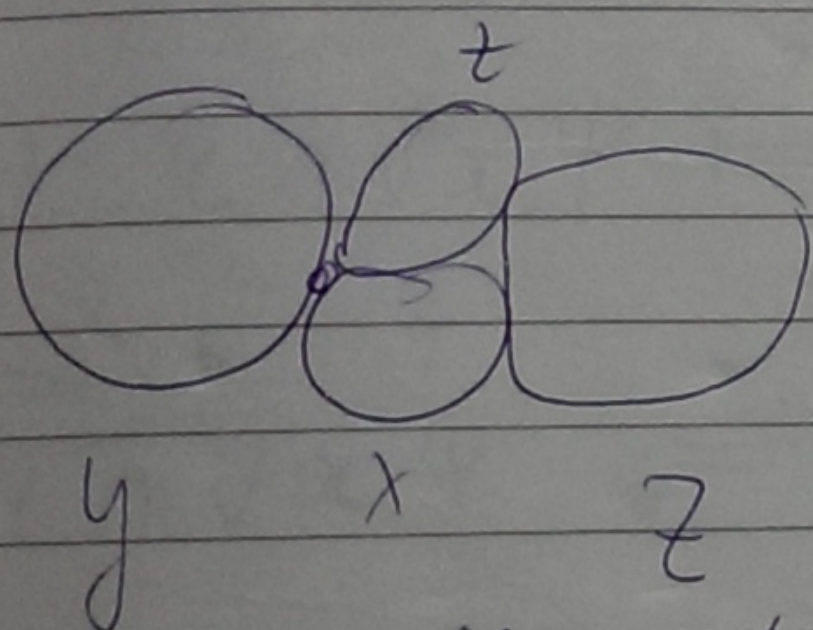
6. 

Тогарба:

$$\varphi_1 \subseteq \forall x (p(x, y) \leftrightarrow p(x, z))$$

$$\varphi_6 \subseteq \neg \exists x (p(x, y) \wedge p(x, z))$$

$$\varphi_4 \subseteq \neg \varphi_1 \wedge \exists x \exists t (p(x, t) \wedge p(y, t) \wedge p(t, z) \wedge p(x, y) \wedge p(z, z))$$



израда на φ_6 : (коз е воопш) z е воопшност за y

$$\varphi_6 \subseteq \forall x (p(x, y) \rightarrow \varphi_4(x, z))$$

$$\varphi_5 \subseteq \neg \varphi_1 \wedge \forall x (p(x, y) \rightarrow p(x, z) \vee \varphi_4(x, z)) \wedge \neg \varphi_6$$

задача:

$$|A| \neq \mathbb{N}$$

$$1. \langle x, y \rangle \in p^A \Leftrightarrow x + 2 = y$$

$$x \in \varphi^A \Leftrightarrow x = 3$$

$$\{3\}: q(x)$$

$$\{5\}: \exists x (q(x) \cap p(x, y))$$

$$\{112\}: \exists x (q_n(x) \cap p(x, y))$$

$$\{1\}: \exists x (q(x) \cap p(y, x))$$

$$\{0, 1\} \rightarrow \exists y p(y, x)$$

$$\{0\} \quad q_{0,1}(x) \cap \neg q_1(x)$$

задача,

$$\langle x, y \rangle \in p^A \Leftrightarrow x+3=y$$

$$x \in q^A \Leftrightarrow x=2$$

$$q(x) \quad \{2\} \quad \{5\} \quad \{8\}$$

$$\{5\}, \{8\}, \dots, q_n(x) = \exists x (q_n(x) \cap p(x, y))$$

$$\{x\}, \{x+3\}$$

$$0 \quad 3 \quad 6 \quad 9$$

$$1 \quad 4 \quad 7 \quad 10$$

$$2 \quad 5 \quad 8 \quad 11$$

абсолютно:

$$h(3x) = 3x+1$$

$$h(3x+1) = 3x$$

$$h(3x+2) = 3x+2$$

h -биевизм (т.к. $h^{-1} = h$)
 h - замяна
 $\Rightarrow h$ - автоморф

г.р. ако в записа 1 сменим континентите
 (напр. 4, 7 или 7, 4)

задача 3:

$x \notin \text{Var}^{\text{free}}(\varphi)$

(3) $\varphi \wedge \forall x \psi \models \forall x (\varphi \wedge \psi)$

$\Rightarrow \varphi \wedge \forall x \psi \models A \models \varphi \text{ и } A \models \forall x \psi$

За всяко $a \in |A|$ $A \models \psi \} \Rightarrow \forall a. a \in |A|$
 $x \notin \text{Var}^{\text{free}}(\varphi)$, то $A \models \varphi$ $\} A \models \varphi \text{ и } A \models \psi$
 $\} A \models \forall x (\varphi \wedge \psi)$

$\Leftarrow \forall x (\varphi \wedge \psi) \Leftarrow \exists a. a \in |A|$
 $A \models \varphi \text{ и } A \models \psi$

и т.т. $A \models \varphi$ защото $V_{V(x)}^x = V \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x (\varphi \wedge \psi)$

г.р. ако в записа 1 сменим континентите

$$\textcircled{4} \quad \varphi \vee \forall x \psi \stackrel{?}{=} \forall x (\varphi \vee \psi)$$

$$\Rightarrow \text{I} \quad A \models \varphi \vee \forall x \psi$$

$$\text{I m. } A \models \varphi$$

$$\exists a \ a \in |A| \quad A \models_{\forall a^x} \varphi \Rightarrow A \models_{\forall a^x} \varphi \vee \psi \Rightarrow$$

$$A \models_{\forall} \forall x (\varphi \vee \psi)$$

$$\text{II m. } A \models \forall x \psi$$

$$\exists a \ a \in |A|, \quad A \models_{\forall a^x} \psi \Rightarrow A \models_{\forall a^x} \varphi \vee \psi \Rightarrow$$

$$A \models_{\forall} \forall x \varphi \vee \psi$$

$$\Leftarrow \quad \text{ ~~} A \models_{\forall} \forall x (\varphi \vee \psi) \text{ }~~$$

$$\exists a \ a \in |A| \quad A \models_{\forall a^x} \varphi \text{ или } A \models_{\forall a^x} \psi$$

$$\text{I m. } \text{сбв. } a \in |A|, \quad A \models_{\forall a^x} \varphi \Rightarrow A \models_{\forall} \varphi$$

$$\Rightarrow A \models_{\forall} \varphi \vee \forall x \psi$$

$$\text{II m. } \text{не сбв. } a \in |A|, \quad \text{I m. } A \models_{\forall a^x} \psi \Rightarrow$$

$$\text{за } \forall c. a \in |A|, A \models_{\forall_a^x} \psi \Rightarrow A \models_{\forall_a^x} \forall x \psi$$

$$\Rightarrow A \models_{\forall_a^x} \psi \vee \forall x \psi$$

18.12.2013

$$\textcircled{1} x \notin \text{Var}^{\text{free}}(\psi)$$

$$\psi \vee \exists x \psi \models \exists x (\psi \vee \psi)$$

$$(\psi \vee \exists x \psi) \models \neg \neg (\psi \vee \exists x \psi) \models$$

$$\neg (\neg \psi \wedge \neg \exists x \psi) \models \neg (\neg \psi \wedge \forall x \neg \psi) \models$$

$$\neg \exists x (\neg \psi \wedge \neg \psi) \models \exists x \neg (\neg \psi \wedge \neg \psi) \models \exists x (\psi \vee \psi)$$

$$\textcircled{2} \psi \wedge \exists x \psi \models \exists x (\psi \wedge \psi) \text{ так и верно}$$

$$\textcircled{3} \forall x (\psi \wedge \psi) \models \forall x \psi \wedge \forall x \psi$$

$\models$

$$a \in |A|, A \models_{\forall_a^x} \psi \wedge \psi \models A \models_{\forall_a^x} \psi \text{ и } A \models_{\forall_a^x} \psi$$

$$\models A \models_{\forall_a^x} \forall x \psi \text{ и } A \models_{\forall_a^x} \forall x \psi \models \forall x \psi \wedge \forall x \psi$$

$$\textcircled{4} \exists x (\psi \vee \psi) \models \exists x \psi \vee \exists x \psi \text{ (книголюб, но с } \neg \neg)$$

* Пренесена нормализована форма

$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$

- ψ - безкванторна
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$
- $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$

$$\psi \rightarrow \forall x \psi \stackrel{?}{=} \forall x (\psi \rightarrow \psi)$$

$$(5) \quad \psi \rightarrow \forall x \psi \models \neg \psi \vee \forall x \psi \models \forall x (\neg \psi \vee \psi)$$

$$\models \forall x (\psi \rightarrow \psi)$$

$$(6) \quad \forall x \psi \rightarrow \psi \stackrel{?}{=} \forall x (\psi \rightarrow \psi)$$

$$\forall x \psi \rightarrow \psi \models \neg \forall x \psi \rightarrow \psi \models \exists x \neg \psi \rightarrow \psi \models$$

$$\exists x (\neg \psi \rightarrow \psi)$$

$\models$

$\neq$

$$(7) \quad \psi \Leftrightarrow \forall x \psi \models \forall x (\psi \Leftrightarrow \psi)$$

$$\psi \Leftrightarrow \forall x \psi \models (\psi \rightarrow \forall x \psi) \wedge (\forall x \psi \rightarrow \psi) \models$$

$$\forall x (\psi \rightarrow \psi) \wedge \exists x (\psi \rightarrow \psi) \models$$

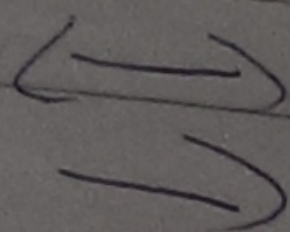
$$\exists x (\forall x (\psi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \psi)) \models$$

$$\exists x \forall y (\psi \wedge \frac{x}{y} \rightarrow \{ \frac{x}{y} y \} \wedge (\psi \rightarrow \psi))$$

~~*~~

Аннотация

1. упражнения



$$\varphi \leftrightarrow \psi \models (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \models \neg \varphi \vee \psi$$

2. Методи или махине $\neg$
 спор кванторите $\downarrow$ когато са $\neg \neg$

$$\neg \neg \varphi \models \varphi$$

$$\neg (\varphi \wedge \psi) \models \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg \forall x \varphi \models \exists x \neg \varphi$$

$$\exists \quad \forall$$

3. вариет кванторите (преименуване)

$$\exists x p(x, x) \rightarrow (\forall x \exists y (p(x, y) \leftrightarrow p(y, x)))$$

$$\neg \exists x p(x, x) \vee (\forall x \exists y (p(x, y) \leftrightarrow p(y, x)))$$

$$\neg \exists x p(x, x) \vee (\forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \wedge (p(y, x) \rightarrow p(x, y)))$$

$$\neg \exists x p(x, x) \vee \forall x \exists y ((\neg p(x, y) \vee p(y, x)) \wedge (\neg p(y, x) \vee p(x, y)))$$

$$\forall x \neg p(x, x) \vee \forall x \exists y (\dots)$$

$$\forall x_1 \neg p(x_1, x_1) \vee \forall x_1 \exists y_1 (\dots)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 [\neg p(x_1, x_2) \vee (\dots)]$$

... $\forall x_1 \exists y_1 \exists y_2 \dots$

Съединителни променливи

$\text{Var } \{x_1, \dots, x_n\}$

Формули

-) $x \in \text{Var}$
-) $\neg \varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$

$I: \text{Var} \rightarrow \{И, Л\}$

- 1) $\varphi \models \psi$ (всички модели на φ е модел и на ψ)
- 2) φ не е логическо противоречие
- 3) φ не е тавтология

$\Rightarrow$ Могава φ и ψ имат обща променлива

Док-во:

Доп, че $\text{Var}(\varphi) \cap \text{Var}(\psi) \neq \emptyset$

от 2) $\exists I \models \varphi$

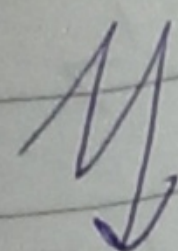
от 3) $\exists I \models \psi$

Ако $K(x) = \begin{cases} I(x) & \text{за } x \in \text{Var}(\varphi) \\ \neg I(x), & \text{иначе} \end{cases}$

$\Rightarrow K \models \varphi$

$K \not\models \psi$

и от (1) $\Rightarrow K \models \psi$



def: Литерал - атомарна ф-ца или отрицание на атомарна ф-ца

$$p, \neg p, q, p(x), \neg p(x), \neg p, (f(f(x)))$$

~~$\neg\neg p$~~ - не е, защото не е атом. ф-ца
нищо отриц. на нещо

4) def: крайно множит. от литерали

резюмът -

$$I \models D \Leftrightarrow \text{свуж. } L \in D, I \models L$$

$\uparrow$
литерал

Лема: $L \in D_1, \bar{L} \in D_2$
 $\underline{I} \in D_1, \bar{I} \in D_2$

$$D_1' = D_1 \setminus \{L\}$$

$$D_2' = D_2 \setminus \{\bar{L}\}, \text{ такава } I \models D_1' \cup D_2'$$

резолвента на D_1 и D_2
по L ($\bar{L}$)

Напр. $\{p, \neg q\}$ и $\{q, r, p\}$
резолвентата им е $\{r, p\}$

Напр!

$\{p, q\}$
 $\{ \neg p, \neg q \}$

$\Sigma \neq \varnothing \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg \varphi\}$ е неистинна
ПНФ, СЧФ, Дизъюнкта, Резолуция

Ремиз-зарька

$$\{ \underbrace{\vdash p, q}_1, \underbrace{\vdash p, \neg q}_2, \underbrace{\vdash \neg p, q}_3, \underbrace{\vdash \neg p, \neg q}_4 \}$$
$$R(2,3) \quad q = \neg p, \neg p \rightarrow q = \neg p \rightarrow q \quad -5$$

кризи розвитку

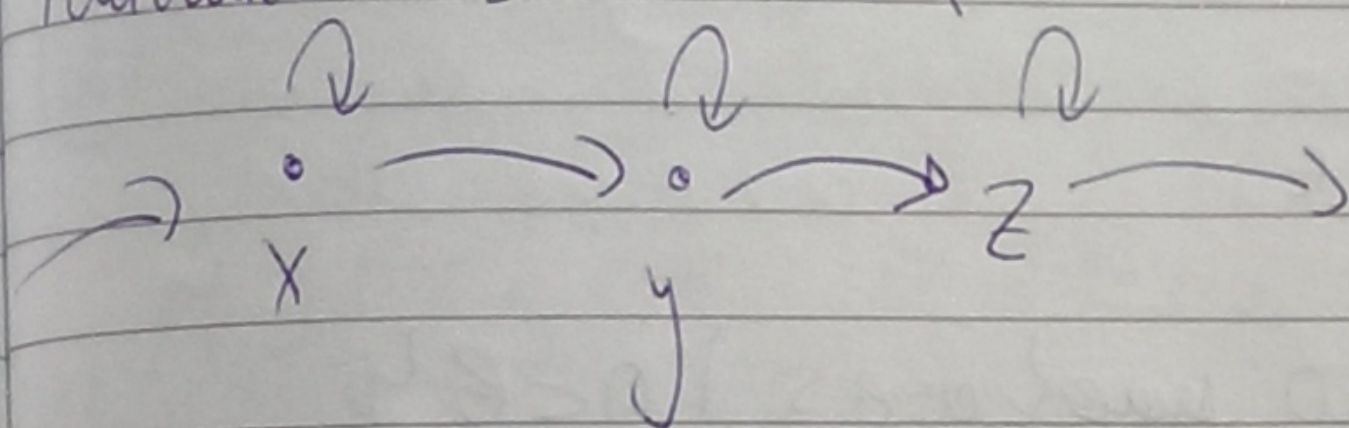
(т.к. запизва изпълнителността а
празна физикост няма модели)

08.01.2014

- ①
1. $\forall x \exists y (p(x, y) \wedge \neg p(y, x))$
 2. $\forall x \exists y (\neg p(x, y) \wedge \neg p(y, x))$
 3. $\forall x \exists y (p(x, y) \wedge p(y, x))$

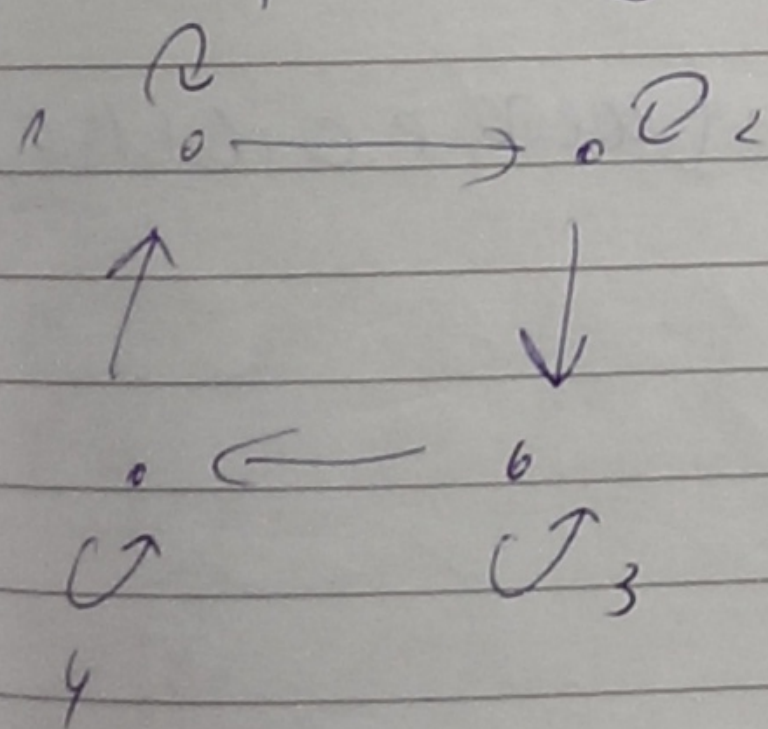
Исполнимо ли е?

Решение: I н.: безкрасен модел



II н. Намираме релация $\{ \langle x, y \rangle \mid y = x + 1 \}$
по-малко на е ест. числа

III н.: красен модел



прикине осигуряват 3
тези с еднаква сетност
(1 и 3, 2 и 4) осигуряват 2

- ②
- $$\exists n \forall x (f(x, n) = x \wedge f(n, x) = x)$$
- $$\forall x \forall y \forall z (f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)))$$
- $$\exists x \exists y \neg f(x, y) = f(y, x)$$

Исполнимо ли е?

I н.: некомутираща група

II: матрицы с умножением

Определенность:

① $|A| = N$

$$\langle a, b, c \rangle \in p^A \quad a + b + 1 = c$$

Да се док. ^{а с} определим ~~мнежа~~ $a, b \in \mathbb{Z}$ $1 \leq a < b \leq \sqrt{a}$
и се има единствен аутоморфизм.

Решение:

$$a < c, \text{ m.d. } a+1 \leq c$$

Мека е с разликата $m \mid a+1$ и s ,

m. e. $\theta = c - (a + 1)$ (nesso e $a + b + 1 = c$)

$$\Rightarrow \exists y \ p(x, y, z)$$

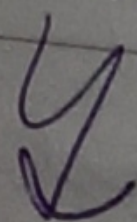
авто морсризбм:

Мореприятие

Don, ce uici grup, m. e (HSCB se uici)

$\Rightarrow h(n) \neq n$ (т.е. неметим един естественных чисел)

$\Rightarrow$ не е определен



$$\{0\} \quad \exists x, y : p(x, y, z)$$

$$\{1\} \quad \forall x \forall y (p(x, y, z) \wedge p(x, y, z))$$

$$\{1\} \quad \forall x \forall y (p(x, y, z) \wedge p(x, y, z))$$

$$C_n: \exists x \exists y (C_n(x) \wedge C_n(y) \wedge p(x, y, z))$$

(2)

2^N

$$p(a, b, c) \Leftrightarrow a \wedge b = c$$

а) Да а определит.

$$1. \{ \emptyset \}$$

$$2. \{ N \}$$

$$3. \{ \langle a, b \rangle \mid a \leq b \}$$

$$4. \{ \langle a, b, c \rangle \mid a \vee b = c \}$$

$$b) \{ x, y \} \text{ определено } \Leftrightarrow x \in \{ \emptyset, N \}$$

Решение:

а)

$$1. \forall x p(x, y, y)$$

$$2. \forall y p(x, y, y)$$

$$(или \forall x p(x, y, x))$$

$$3. p(x, y, x)$$

4.

$$p(x, y, z) \wedge p(y, z, y) \wedge \forall t (p(z, t, z))$$

$$\forall t (p(x, t, x) \wedge p(y, t, y) \rightarrow p(z, t, z))$$

$$(m.e. \quad x \leq z \wedge y \leq z \wedge \forall t (x \leq t \vee y \leq t \rightarrow z \leq t))$$

а) $\forall x, y, z, t (x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq t \rightarrow x \leq t)$

$p, q \in V$ we m enenine $p \leq q$

ans $\forall a \in p \Rightarrow h(a) \in q$

$$\text{anw } \mathcal{B} \stackrel{a}{=} \bar{a} \in \mathcal{P} \Rightarrow h(a) \in \mathcal{P}$$

ако $\exists a \in A$ $\Rightarrow$ $\exists h(a)$ са и при
 ако $\exists a$ са и при $\Rightarrow$ $\exists h(a)$ не е при

ако в a са приц $\Rightarrow$ в $R(a)$ няма приц
ако в a няма приц $\Rightarrow$ в $R(a)$ няма приц

Теперь

$$\text{I. I. } \underline{b} = \underline{b} \text{ e } p \Rightarrow \underline{bc} \text{ и } \underline{a} \text{ e } p$$

$\in h(a) \in q \in h(b) \in q \in h(c) \in q$
и так са $\in$ пенузи

Т.2. $\mathbb{C} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ не имеет смысла

$$\text{b } h(a) \rightarrow q \quad \text{e } h(b) \rightarrow p \Rightarrow h(c) \rightarrow \text{true}$$

Th. 3. $b \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P} \Rightarrow b \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}$

$$\Rightarrow h(a) \rightarrow q \quad b \quad (h(b)) \text{ ca a p u q}$$

* $h(c) \stackrel{r}{\leq} q \Rightarrow$ nur 6 pers

1.4. $b \neq \underline{b}$ нмс. $\text{что } p, \text{ что } q$

$\Rightarrow$ b с ~~н~~рмса ~~м~~а р. q

$h(a) \rightarrow q$ в $h(b)$ меньше p и $q \rightarrow$
 $h(c)$ больше p и q

I сп. в a е q

II сп. в a са и p и q

III сп. в a няма нито p, нито q

(3) $m^5 n^4 = k$
 $\langle m, n, k \rangle \in p^{\#}$

10) $\forall x (x, y, y)$

11) $p(y, y, y) \wedge \neg \forall x p(x, y, y)$

15.01.2013

$E \models \varphi$ т.е. $E \cup \{\neg \varphi\}$ е непротиворечиво

- 1) пренесена нормална форма
- 2) кюленова нормална форма
- 3) конюнктивна нормална форма
- 4) множество от дизюнкти
- 5) метод на резолюцията
- 6) празен дизюнкт

$\forall x \exists y \varphi$
 $\exists y \forall x \varphi$

$\varphi = p(x, y)$ не

$\varphi = p(x) \wedge q(y)$ да

$(\Rightarrow) \forall x p(x) \wedge \exists y q(y)$

варим x: става $\forall x p(x)$
 варим y: става $\exists y q(y)$

ако $\varphi \neq \psi$, φ е истинна

Едностъпкова скупинизация:

$$\forall x_1, \dots, \forall x_n \exists y \in$$

$$\forall x_1, \dots, \forall x_n \in \left\{ \frac{y}{f(x_1, \dots, x_n)} \right\}$$

отстраняването на един квантор за $\exists$

Скупинизация

$$\forall x_1, \dots, \forall x_n \underbrace{\exists y_1}_{f(x_1, \dots, x_n)} \forall x_{n+1}, \dots, \forall x_{n+m} \underbrace{\exists y_2}_{f(x_1, \dots, x_{n+m})} \dots$$

$$f(x_1, \dots, x_{n+m})$$

Например:

① $\exists x p(x)$

скуп. ф-ма: $p(c)$, $c = \text{const}$

② $\exists x \forall y p(x, y)$

скуп. ф-ма: $\forall y p(c, y)$

③ $\forall x \exists y \exists z p(x, y, z)$

скуп. ф-ма: $\forall x p(x, f(x), g(x))$

④ $\forall x \exists y \forall z \exists t p(x, y, z, t)$

скуп. ф-ма: $\forall x \forall z p(x, f(x), z, g(x, z))$

Субституция:

$$\left\{ \frac{x_1}{\tau_1}, \dots, \frac{x_n}{\tau_n} \right\} \quad \begin{array}{l} x_i \neq \tau_i \\ x_i = x_j \Rightarrow \tau_i = \tau_j \end{array}$$

$\left\{ \frac{x}{f(y)} \right\}$ - необратима, защото замение един символ с етири

$\left\{ \frac{x}{y} \right\}$ - необратима, защото може да има y -и

$\left\{ \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right\}$ - обратима (два поха свързата)

Конюнктивна нормална форма

Алгоритъм:

1. Премахване $\rightarrow, \leftarrow$
2. Бутаме $\neg$ до атом. ф-ли
3. Введем знак конюнкция

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Дизюнкти

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ - множ. от формули

$$\varphi_i = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k$$

$\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ - дизюнкт

Резолюция

$$\Phi_1 \{ p(f(x,y), t) \} \quad \sigma_1$$

$$\Phi_2 \{ \neg p(f(y,x)) \} \quad \sigma_2$$

$$\Phi_1 \{ p(f(f(x,y), t)) \}$$

$$\Phi_2 \{ \neg p(f(\frac{y}{f(x,y)}, t)) \}$$

либерална
резолвенти

$$\Phi_1 \sigma_1 \Phi_2 \sigma_2$$

резолвента

22.01.2013.

Резолюция

задачи 1:

1. Някои пациенти уважават докторите
2. Никой пациент не уважава марпатите
3. Докторите не са марпатии?

т.е. да докажем

$$\{ 1, 2 \} \models 3$$

т.с.т.к.

$\{ 1, 2, \neg 3 \}$ е противоречиво

ННФ

СНФ

КНФ

Дизюнкти

↓ Резолюция

Езика:

$n(x)$

$m(x)$

$g(x)$

$gb(x,y)$

$$1 \exists x (n(x) \wedge \forall y (g(y) \rightarrow gb(x,y)))$$

$$2 \forall x (n(x) \rightarrow \forall y (m(y) \rightarrow \neg gb(x,y)))$$

$$3 \forall x (g(x) \rightarrow \neg m(x))$$

$$\overline{3} : \stackrel{m.e}{\rightarrow} \forall x (g(x) \rightarrow \neg m(x)) \models \exists x (g(x) \wedge m(x))$$

1) $\mathcal{NH}\Phi$

$$1 \exists x \forall y (n(x) \wedge (g(y) \rightarrow gb(x,y)))$$

$$2 \forall x \forall y (n(x) \rightarrow (m(y) \rightarrow \neg gb(x,y)))$$

$$3. m \neq \emptyset \quad \mathcal{NH}\Phi$$

2) $\mathcal{CH}\Phi$

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi \quad \rightarrow \quad \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{2. } \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi \\ \text{3. } \exists y \varphi \end{array} \right\}$$

$$1. \forall y (n(c) \wedge (g(y) \vee gb(c,y)))$$

2. OK

$$3. g(a) \wedge m(a)$$

и да, с уио. о.и. и и OK. те $S_1 \subseteq X$

и да, с уио. о.и. и и OK. те $S_1 \subseteq X$

3) ЛНФ

$$A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_2$$

$$A_1: L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_2}$$

$$A_2: L_1^2 \vee \dots \vee L_n$$

$$2. \neg n(x) \vee \neg m(y) \vee \neg y\theta(x, y)$$

$$\{ \overset{1}{n(c)} \}, \{ \overset{2}{\neg \theta(y)}, y\theta(c, y) \}$$

$$\{ \overset{3}{\theta(a)} \}, \{ \overset{4}{m(a)} \}$$

$$\{ \overset{5}{\neg n(x)}, \neg m(y), \neg y\theta(x, y) \}$$

$$R(1, 5 \{ \overset{6}{\frac{x}{c}} \}) = \{ \neg m(y), \neg y\theta(c, y) \}$$

$$R(2 \{ \overset{7}{\frac{y}{a}} \}, 3) = \{ y\theta(c, a) \}$$

$$R(4, 5 \{ \overset{8}{\frac{y}{a}} \}) = \{ \neg n(x), \neg y\theta(x, a) \}$$

$$R(8 \{ \overset{9}{\frac{x}{c}} \}, 1) = \{ \neg y\theta(c, a) \}$$

$$R(7, 9) = \emptyset$$

задача 2:

1. Митнически обискират всички, които са през
Националната граница и не са дипломати

2. Някои графикали са преминали границата
и са били обдирани само от графикали
3. Дипломатичне са графикали

4. Има митнически, които са графикали

Език. $m(x)$ $ob(x, y)$
 $p(x)$ $pr(x)$
 $tr(x)$

1. $\forall x (pr(x) \wedge \neg p(x) \rightarrow \exists z (m(z) \wedge ob(z, x)))$
2. $\exists x (tr(x) \wedge pr(x) \wedge \exists y (tr(y) \wedge ob(y, x)))$
3. $\forall x (d(x) \rightarrow \neg tr(x))$

4. $\exists x (m(x) \wedge tr(x))$

$\neg \forall x (\neg m(x) \vee \neg tr(x))$

ПНФ:

1. $\models \forall x \exists z (\neg pr(x) \vee p(x) \vee (m(z) \wedge ob(z, x)))$

2. $\models \exists x \forall y (tr(x) \wedge pr(x) \wedge (\neg ob(y, x) \vee tr(y)))$

3. $\models \forall x (\neg p(x) \vee \neg tr(x))$

СНФ:

$$1) \forall x (\neg \text{np}(x) \vee g(x) \vee (m(f(x)) \wedge \text{os}(f(x), x)))$$

$$2) \forall x (\neg p(c) \wedge \text{np}(c) \wedge (\neg \text{os}(y, c) \vee \text{np}(y)))$$

3) OK

4) OK

KHΦ:

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \models (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \wedge \chi)$$

$$1) \neg \text{np}(\neg \text{np}(x) \vee g(x) \vee m(f(x))) \wedge (\neg \text{np}(x) \vee g(x) \vee \text{os}(f(x)))$$

2) OK

3) OK

4) OK

Διατύπων:

$$1. \{ \neg \text{np}(x), g(x), m(f(x)) \}, \{ \neg \text{np}(x), g(x), \text{os}(f(x)) \}$$

$$2. \{ \neg p(c) \}, \{ \text{np}(c) \}, \{ \neg \text{os}(y, c), \text{np}(y) \}$$

$$3. \{ \neg g(x), \neg \text{np}(x) \}, 4. \{ \neg m(x), \neg \text{np}(x) \}$$

$$R(3, 7, \frac{x}{c}) = \{ \neg m(c) \}$$

$$R(3, 6, \frac{x}{c}) = \{ \neg g(c) \}$$

$$R(g, 2 \left\{ \frac{x}{c} \right\}) = \left\{ \underset{11}{7np(c)}, \overset{10}{\delta(f(c), c)} \right\}$$

$$R(4, 10) = \{ \text{ob}(\overset{1}{f(c)}, \overset{11}{c}) \}$$

$$R\left(5 \left\{ \frac{y}{f(c)} \right\}, 11\right) = \left\{ \text{tp} / \left(\frac{12}{f(c)} \right) \right\}$$

$$R(12, 7, \frac{x}{f(c)} y) = \frac{13}{7} \mu(f(c)) y$$

$$R(12 \frac{x}{c} y, 13 y = 2 \supset \text{np}(c), y(c))$$

$$R(14, 9) = \{7np(c) \mid 9-15\}$$

$$R(4,5) = \boxed{2}$$

Зачем 31

1. Баки кают прегледа дозорци
2. Баки дозорци, които казва "вело"
3. Нми кают, които е заповяда умен дозорци
4. Баки ~~кают~~ кают, които прегледа дозорци,
но не го хванат, с разотсроби

5. Ако всички бързоходци, живят "бързо", то всички които са работещи

Ex: $\kappa(x), \delta(x), \text{mp}(x, y), \gamma(x), \beta(x, y), \text{beep}(x)$

$$1 \quad \forall x \mid (K(x) \rightarrow \exists y (S(y) \wedge hp(x, y)))$$

X 5'5 22' OK. n u H.H. O.H. O.H.

$\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 0$ if $|x| > 1$

$$2. \forall x (\delta(x) \wedge \text{beep}(x) \rightarrow \gamma M(x))$$

$$3. \neg \exists x (\kappa(x) \wedge \exists y (\delta(y) \wedge \gamma M(y) \wedge \exists (x,y)))$$

$$4. \forall x (\kappa(x) \wedge \exists y (\delta(y) \wedge \text{np}(x,y) \wedge \exists (x,y)) \rightarrow \text{p}(x))$$

$$5. \forall x (\delta(x) \wedge \text{beep}(x) \rightarrow \forall y (\kappa(y) \wedge \text{p}(y)))$$

75