07.V.2014г КА - упражнение

(7.18) Нека γ е положително ориентирана затворена жорданова крива, непинаваща през точката $a \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Докажете, че

$$I = \int_\gamma (z-a)^k dz = \begin{cases} 0, & \text{ако } a \in Ext\,\gamma \\ 0, & \text{ако } a \in Int\,\gamma \text{ и } k \neq -1 \\ 2\pi, & \text{ако } a \in Int\,\gamma \text{ и } k = -1 \end{cases}$$

Доказателство: 1сл. $a \in Ext\,\gamma$

Сега по основната теорема на Коши $I = 0$.

2сл. $a \in Int\,\gamma$

$C(a,r): z = a + r.e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$

Избираме толкова малко $r>0$, че $\overline{K(a,r)} \subset Int\,\gamma$

По теоремата на Коши за сложен контур $I = \int_{C(a,r)} (z-a)^k dz =$

$$= \int_0^{2\pi} [(\cancel{a} + re^{it}) - \cancel{a}]^k \, d(a+re^{it}) = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} r e^{it} . i\, dt =$$

$$= r^{k+1} . i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = \begin{cases} \frac{r^{k+1}}{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} \, d\, i(k+1)t = \frac{r^{k+1}}{k+1} e^{i(k+1)t}\Big|_0^{2\pi} \\ i \int_0^{2\pi} 1\, dt = it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i, \text{ ако } k=-1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &= 0, \text{ ако } k \neq -1 \\ &= 2\pi i, \text{ ако } k = -1 \end{aligned}\right\}$$

Изолирани особени точки

Теорема на Тейлър: Ако $f(z)$ е холоморфна в отворения кръг $K(z_0, R)$, то $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in K(z_0,R)$, където $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad 0 < r < R$$

Теорема на Лоран: Ако $f(z)$ е холоморфна в пробития отворен кръг $K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, то $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in K(z_0,R)\setminus\{z_0\}$,

където $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, $0<r<R$

Определение 1: Казваме, че $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особена точка на $f(z)$, ако $f(z)$ е холоморфна в пробита околност на z_0.

Определение 2: Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особена точка на $f(z)$, $f(z)$ е холоморфна в $K(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ и $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ е лорановото ѝ развитие там.

Казваме, че:

1) z_0 е отстранима особена точка на $f(z)$, ако $a_n = 0$ за $\forall n < 0$

2) z_0 е полюс на $f(z)$, ако краен брой от числата a_n с $n<0$ са различни от 0 (по-точно, ако $a_{-m} \neq 0$ и $a_n = 0$ при $n < -m$, то z_0 се нарича m-кратен полюс на $f(z)$).

3) z_0 е съществена особена точка на $f(z)$, ако безбройно много от числата a_n с $n<0$ са различни от 0.

Теорема на Риман Следните твърдения са равносилни:

1) z_0 е отстранима особена точка на $f(z)$;

2) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (крайно число);

3) $f(z)$ е ограничена в пробита околност на z_0.

Теорема Следните твърдения са равносилни:

1) z_0 е полюс на $f(z)$;

2) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

3) $\exists m \in \mathbb{N}$, такова че $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, където $\varphi(z)$ е холоморфна в околност на z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$ (в този случай z_0 е m-кратен полюс на $f(z)$)

4) $\exists m \in \mathbb{N}$, такова че z_0 е m-кратна нула на $\frac{1}{f(z)}$ (в този случай z_0 е m-кратен полюс на $f(z)$).

Теорема на Сохоцки – Вайерщрас Следните твърдения са равносилни:

1) z_0 е съществена особена точка на $f(z)$;

2) в $\overline{\mathbb{C}}$ $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$;

3) $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ $\exists$ редица $z_n \to z_0$, такава че $f(z_n) \to \alpha$.

Въведените понятия се пренасят и за случая $z_0 = \infty$. По определение $f(z)$ има такава особеност в ∞, каквато $f(\frac{1}{z})$ в 0.

От тук следва, че ако $f(z)$ е холоморфна в $|z| > R$ и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ е лорановото ѝ развитие там, то:

1) ∞ е отстранима особена точка на $f(z)$, ако $a_n = 0$ за $\forall n > 0$

2) ∞ е m-кратен полюс на $f(z)$, ако $a_m \neq 0$ и $a_n = 0$ за $\forall n > m$.

3) ∞ е съществена особена точка на $f(z)$, ако $a_n \neq 0$ за безкрайно много $n > 0$.

Учитване: $f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n$

(8.12) Да се намерят особените точки в $\overline{\mathbb{C}}$ на $f(z)$ и да се определи вида им:

а) $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^4}$

Особените точки на $f(z)$ са ∞ и корените на уравнението $z^4 = -1$, т.е. точките $z_k = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$, $k = 1, 2, 3, 4$

$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{z^4} + 1} = 1 \Rightarrow \infty$ е отстранима особена точка на $f(z)$.

Точките z_k, $k = 1, 2, 3, 4$ са еднократни нули на знаменателя на $f(z)$ и не са нули на числителя. Тогава z_k са еднократни нули на $\frac{1}{f(z)}$, следователно са еднократни полюси на $f(z)$.

в) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$

Особените точки на $f(z)$ са ∞ и корените на уравнението $z^2 = -1$, т.е. точките $\pm i$.

Точките $\pm i$ са еднократни нули на знаменателя на $f(z)$ и не са нули на числителя, те са еднократни полюси на $f(z)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = 0.0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{z\to\infty} f(z) \Rightarrow \infty$ е съществена особена точка на $f(z)$.

г) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$ $\qquad e^z = 1 \Leftrightarrow z = \operatorname{Log} 1 \Leftrightarrow z = \ln\underbrace{|1|}_{0} + i\arg 1 \Leftrightarrow$ $z = i\,2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Особените точки на $f(z)$ са ∞ и точките $z_k = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

∞ не е изолирана особена точка на $f(z)$.

Точките $2k\pi i$ с $k \neq 0$ са еднократни полюси на $\frac{1}{e^z - 1}$ и не са особени точки на $\frac{1}{z}$, следователно те са еднократни полюси на $f(z)$.

В пробита околност на 0 $\quad \dfrac{1}{e^z - 1} = \dfrac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

От тук $a_{-1} = \lim_{z\to0} \dfrac{z}{e^z - 1} = \lim_{z\to0} \dfrac{1}{\frac{e^z - e^0}{z - 0}} = \dfrac{1}{(e^z)'_{|z=0}} = \dfrac{1}{e^z_{|z=0}} = 1$.

Следователно $\dfrac{1}{e^z - 1} = \dfrac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, от където $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ и 0 е отстранима особена точка на $f(z)$.

е) $f(z) = e^{\frac{\quad}{1-z}}$

Особените точки на $f(z)$ са ∞ и 1.

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} e^{\frac{1}{\frac{1}{z}-1}} = e^{-1} \Longrightarrow \infty$ е отстранима особена точка на $f(z)$.

$$f(z) = e^{\frac{\cancel{z+1}(z-1)+1}{1-z}} = e^{-1+\frac{1}{1-z}} = e^{-1}\cdot e^{\frac{1}{1-z}} = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(1-z)^n},\ z\in\mathbb{C}\setminus\lbrace$$

1 е съществена особена точка на $f(z)$.

ж) $f(z) = \frac{z^2-1}{\sin^3 \pi z}$

Особените точки на $f(z)$ са ∞ и точките $z_k = k$, $k\in\mathbb{Z}$.

∞ не е изолирана особена точка на $f(z)$

Точките z_k с $k \neq \pm 1$ са трикратни нули на знаменателя на $f(z)$ и не са нули на числителя, следователно те са трикратни полюси на $f(z)$.

Точките ± 1 са трикратни нули на знаменателя на $f(z)$ и еднократни нули на числителя, следователно те са двукратни полюси на $f(z)$.

12.V.2014г. КА-лекция

Теорема на Лоран

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f(z)$ е холоморфна във венеца $V = V(z_0, r, R) =$
$= \{z : 0 \le r \le |z - z_0| < R \le +\infty\}$

Тогава

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

$\forall z \in V$. Редът е абсолютно сходящ във V, равномерно върху компактните подмножества на V и коефициентите a_n са еднозначно определени, като:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad , n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\gamma_\rho = \{|z - z_0| = \rho, \ r < \rho < R\}$$

$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ – правилна част в реда на Лоран на f

$f^+(z)$ е холоморфна в $|z - z_0| < R$

$f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ – главна част

$f^-(z)$ е холоморфна в $|z - z_0| > r$

$f(z) = f^+(z) + f^-(z), \ z \in V$.

Неравенства на Коши за коефициентите

Ако f е холоморфна във $V = V(z_0, r, R)$, то

$|a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \ n = 0, \pm 1, \dots, \ r < \rho < R$, където $M(\rho) = \max_{\gamma_\rho} |f(z)|$

Връзка с редове на Фурие

$\varphi(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \varphi(t) \quad (*)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\gamma_\rho = \{ |z - z_0| = \rho, \; r < \rho < R \}$$

$$\cos nt = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

Заместваме в (*) и:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} dt$$

Нека f е холоморфна в $r < |z| < R$ и $r < 1 < R$

Тогава $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ се развива в ред на Лоран във $r < |z| < R$

като $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = 1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \dots$

Нека $\varphi(t) = f(e^{it}), \; t \in [0, 2\pi]$

Тогава $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = 1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \underset{\zeta = e^{it}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}$

$$\times \cancel{i e^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} dt$$

<u>Пример:</u>

Да се пресметне $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nt}{n!}, \; t \in [0, 2\pi]$

Нека $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nt}{n!}$ $\qquad \cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \Rightarrow \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{int} + e^{-int}}{2n!} =$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{1}{z^n n!} \right), \; z = e^{it}$

Нека

$f(z) := \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!} + \frac{1}{n! z^n}\right)$ - тя е холоморфна в $0 < |z| < +\infty$ и

$f(z) = \frac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{2}$. Тогава $\varphi(t) = f(e^{it}) = \frac{e^{e^{it}} + e^{e^{-it}}}{2}$

Изолирани особени точки
(от еднозначен характер)
на холоморфни функции.
Теореми на Риман и на ~~Сохоцки~~-Вайерщрас.

<u>Деф. 1:</u> $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича особена точка на f, ако f не е холоморфна в z_0, но във всяка околност на z_0, има точки, в които f е холоморфна.

<u>Деф. 2:</u> $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особена точка на f, ако в пробучена околност на z_0, f е холоморфна

$z_0 \in \mathbb{C}$, е неизолирана, ако във всяка пробучена околност на z_0 има особени точки.