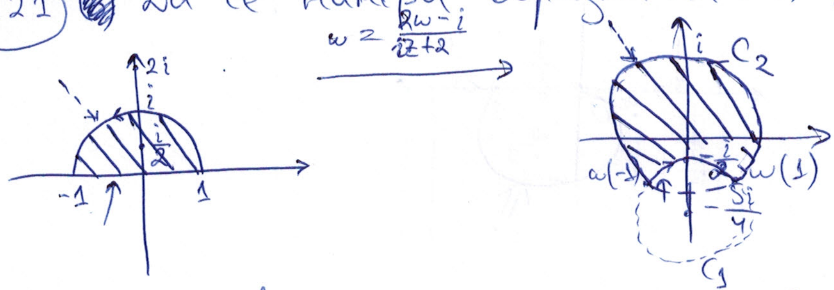
3.21 Да се намери образът на: в) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ чрез $w = \frac{2z-i}{iz+2}$

Особената точка на $w(z)$ е $2i$.



$2i \notin \mathbb{R}$, следователно образът на $\mathbb{R}$ е окръжност C_1.

$2i$ и $-2i$ са инверсни спрямо $\mathbb{R}$, следователно $w(2i)$ и $w(-2i)$ са инверсни спрямо C_1.

Но $w(2i) = \infty$, следователно $w(-2i) = -\frac{5i}{4}$ е центърът на C_1.

Освен това C_1 съдържа $w(0) = -\frac{i}{2}$.

$[-1, 1]$ се изобразява в част от C_1 с краища $w(-1) = -\frac{2+i}{2-i} =$
$= -\frac{(2+i)^2}{5} = -\frac{4+4i+i^2}{5} = -\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ и $w(1) = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{5} = \frac{4-4i+i^2}{5} =$
$= \frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ и съдържаща $w(0) = -\frac{i}{2}$.

$2i$ не ~~може да~~ лежи на единичната окръжност, са образът на ед. окръжно[сттта]
е окръжността C_2.

$2i$ и $\frac{i}{2}$ са инверсни спрямо единичната окръжност, следователно $w(2i)$ и $w(\frac{i}{2})$ са инверсни спрямо C_2.

Но $w(2i) = \infty$, следователно $w(\frac{i}{2}) = 0$ е центърът на C_2.

Освен това C_2 съдържа $w(1)$ и $w(-1)$.

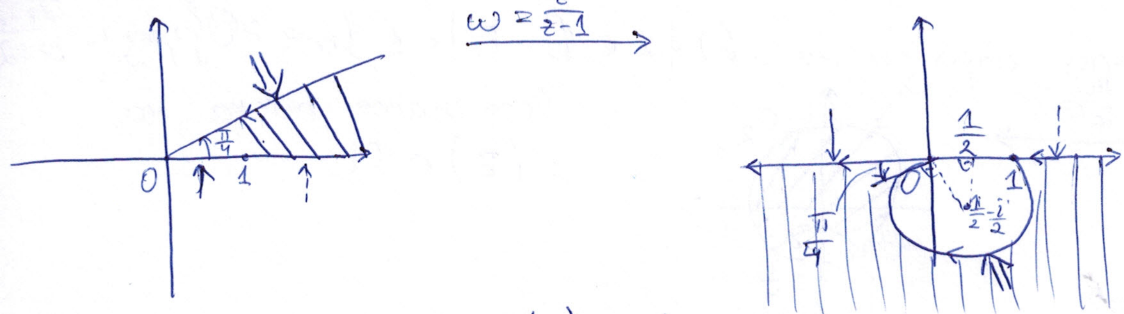
Понеже $|w(1)| = 1$, то C_2 е ед. окр.

Горната единична полуокръжност се изобразява в част от C_2 с краища $w(-1)$ и $w(1)$ и съдържаща $w(i) = i$.

Накрая от $w(\frac{i}{2}) = 0$ намираме образа на областта.

! Много е вероятно да се падне на контролно.

2) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ чрез $w = \frac{z}{z-1}$



Особена точка на $w(z)$ е 1.

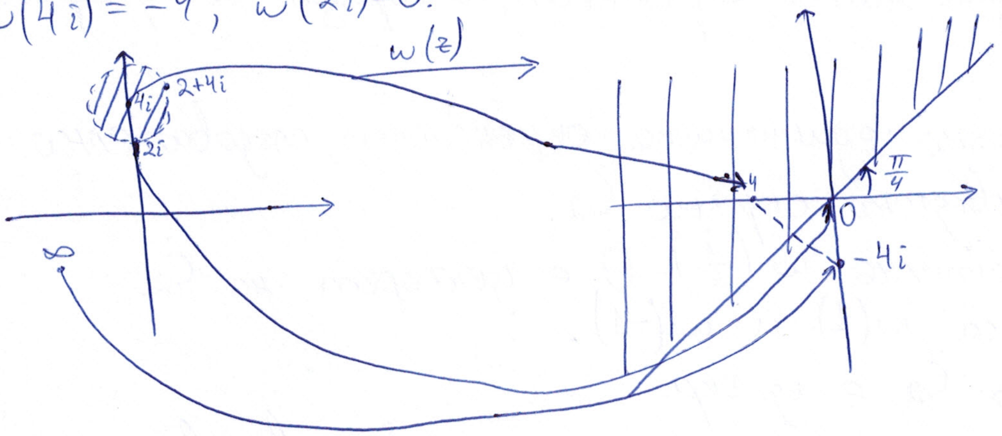
Според 3.21 а) образът на $[0,1]$ е $\overrightarrow{[0,-\infty)}$

Образът на $\overrightarrow{[1;+\infty)}$ е част от $\mathbb{R}$ с краища $w(1)=\infty$ и $w(\infty)=1$ и несъд. $w(0)=0$

Образът на лъча $\arg z = \frac{\pi}{4}$ е дъга от окр. с краища $w(0)=0$ и $w(\infty)=1$ и сключваща в $w(0)=0$ ъгъл $\frac{\pi}{4}$ с $\overrightarrow{[0,-\infty)}$

Накрая от принципа за съответствие на границите намираме образа на областта.

3.22 Да се намери дробнолинейна функция (ДЛФ) $w(z)$, която изобразява в) кръга $k(4i,2)$ в полуравнината $\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{5\pi}{4}$, така че $w(4i)=-4$, $w(2i)=0$.



Нека ДЛФ $w(z)$ е решение на задачата. Тогава $w(z)$ изобразява окръжност $C(4i,2)$ в правата $v=u$.

$4i$ и ∞ са инверсни спрямо окръжност $C(4i,2)$, следователно $w(4i)$ и $w(\infty)$ са инверсни спрямо правата $v=u$.

Но $w(4i)=-4$, следователно $w(\infty)=-4i$. Така $w(z)$ се определя еднозначно от равенствата $w(4i)=-4$, $w(2i)=0$, $w(\infty)=-4i$.

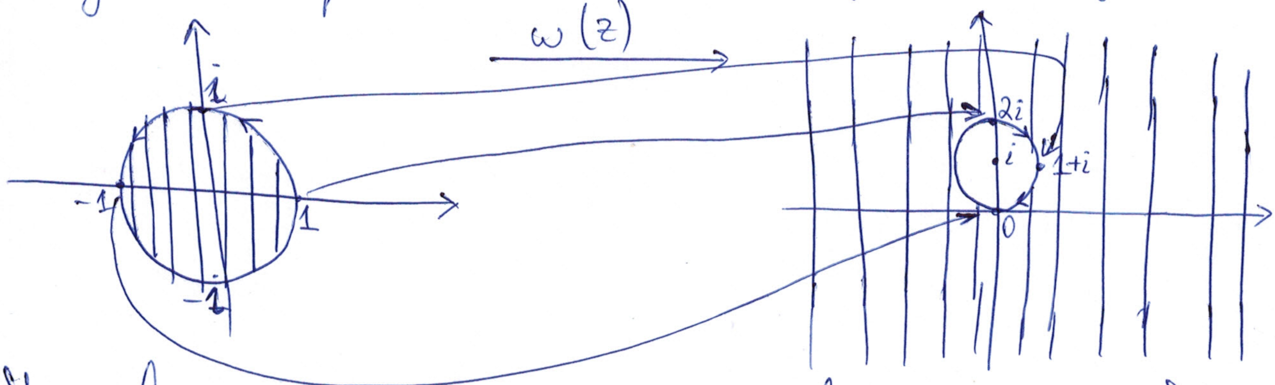
$$(w,-4,0,-4i)=(z,4i,2i,\infty) \Leftrightarrow \frac{0-w}{0+4} : \frac{-4i-w}{-4i+4} = \frac{2i-z}{\underset{=-2i}{2i-4i}} : \underbrace{\frac{\infty-\cancel{2i}}{\infty-4i}}_{=1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{w}{4}\cdot\frac{4-4i}{-4i-w} = \frac{z-2i}{2i} \Leftrightarrow w\cdot\frac{1-i}{4i+w} = \frac{z-2i}{2i} \Leftrightarrow w(1-i).2i = (z-2i)(4i+w)$$

$$\Leftrightarrow w.[(1-i).2i - z + 2i] = 4i(z-2i) \Leftrightarrow w = 4i\,\frac{z-2i}{2+4i-z}.$$

Тази ДЛДФ $\omega(z)$ наистина е решение на ~~функцията~~ задачата: понеже $\omega(2+4i)$, то $\omega(z)$ изобразява окръжност $C(4i,2)$ в права l. $4i$ и ∞ са инверсни спрямо $C(4i,2)$ следователно $\omega(4i)=-4$ и $\omega(\infty)=-4\cdot i$ са инверсни спрямо l следователно l е правата $v=u$. Понеже $\omega(4i)=-4$, то $\omega(z)$ изобразява кръга $K(4i,2)$ в полуравнината $\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{5\pi}{4}$.

г) единичния кръг $|z|<1$ в областта $|w-i|>1$.



Упътване: Нека $\omega(z)$ е единствената дробнолинейна функция, за която $\omega(1)=2i$, $\omega(i)=1+i$, $\omega(-1)=0$. Тя се определя от равенството $(\omega, 2i, 1+i, 0)=(z, 1, i, -1)$. Тази ДЛДФ $\omega(z)$ изобразява единичната окръжност в окр. $|w-i|=1$. Освен това според принципа за съответствие на границите, областта $|z|<1$, която лежи отляво на единичната окръжност при ориентацията, определена от $1, i$, и -1 се изобразява в областта, която също лежи отляво на окръжността $|w-i|=1$ при ориентацията, определена от ~~$\omega(1)=2i$~~ $\omega(1)=2i$, $\omega(i)=1+i$, $\omega(-1)=0$. Следователно $\omega(z)$ изобразява $|z|<1$ в $|w-i|>1$.

$$(\omega, 2i, 1+i, 0)=(z, 1, i, -1) \Longleftrightarrow \frac{1+i-\omega}{1+i-2i}:\frac{0-\omega}{0-2i}=\frac{i-z}{i-1}:\frac{-1-z}{-1-1}$$