24.III.2014г. Комплексен анализ – лекция

Степенни редове. Формула на Коши-Адамар

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, M – множеството от точките на сходимост

int M – областта на сходимост

Формула на Коши–Адамар

Нека $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Тогава редът $\sum a_n z^n$ е абсолютно сходящ за $|z|<R$ и е разходящ за $|z|>R$

<u>Доказателство:</u> Имаме $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|.\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}$ и от критерия на Коши $\Rightarrow$ редът (1) е абсолютно сходящ за $\frac{|z|}{R}<1 \iff |z|<R$ и е разходящ за $\frac{|z|}{R}>1 \iff |z|>R$.

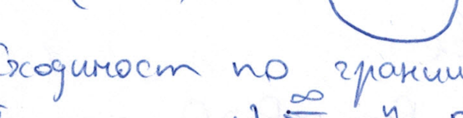
<u>Следствие ~~Свойство~~ 1:</u> Областта на сходимост на реда (1) е кръг $k(0,R)$.

$k(0,R)$ – кръг на сходимост на (1)

R – радиус на сходимост на (1)

<u>Следствие 2:</u> (Лема на Абел) Ако редът $\sum a_n z^n$ е сходящ в z_0, то той е абсолютно сходящ в кръга $|z|<|z_0|$.

$|z|<|z_0|\le R$



Сходимост по границата

<u>Примери:</u> 1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R=1$

редът е разходящ за $|z|=1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $R=1$ и редът е абсолютно сходящ за $|z|=1$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $R=1$, сходящ за $z\neq 1$ и разх. за $z=1$.

Теорема за диференциране на степенни редове

Лема Редовете $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$, ...

$f_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k}$, ... – имат един и същи радиус на сход.

Доказателство: Достатъчно е да покажем, че $R_{сх.}$ на $f = R_{сх.}$ на f_1

~~R радиуса~~ Нека $R = R_{сх.}$ на f, $R_1 = R_{сх.}$ на f_1. ~~Имаме, че~~ Редовете f_1 и zf_1 $(z \neq 0)$ имат един и същи радиус на сходимост. От формулата на Коши-Адамар имаме, че $\frac{1}{R_1} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|na_n|} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = R_1$

(*) $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, то $\overline{\lim}\, a_n b_n \leq \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n$

ако $\overline{\lim}\, a_n = \lim a_n$, то $\overline{\lim}\, a_n b_n = \lim a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n$.

Теорема за диференциране на степенни редове

Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с $R_{сх.} = R > 0$. Тогава ф-ята $f(z)$ е холоморфна в кръга на сходимост $k(0,R)$ и $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $z \in k(0,R)$.

Доказателство: 1) Зад. $\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} = (z - z_0) \sum_{k=1}^{n-1} k z_0^{k-1} z^{n-k-1}$

2) Нека $z_0 \in k(0,R)$ $(|z_0| < R)$. Нека $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. От лемата знаем, че

z, R_1, z_0, 0

$R_{сх.}$ на φ е R. Имаме $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \varphi(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (z^n - z_0^n)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right] = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right] \overset{1}{=}$

$\overset{1}{=} (z - z_0) \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} k z_0^{n-1} z^{n-k-1}$ Нека $z \to z_0 \Rightarrow |z| < R_1 < R$. Тогава $\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \varphi(z_0)\right|$

$\leq |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{n-1} k |z_0|^{k-1} |z|^{n-k-1} \leq |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| R_1^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{|z - z_0|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| R_1^{n-2}$

защото (Лемата) редът $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$ е абсолютно сходящ за $|z| < R$ $\quad \leq \frac{M}{2} |z - z_0|$

Следователно $f'(z_0) = \varphi(z_0)$. Аналогично следва, че $\exists f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$ и т.н.

$\exists f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}$ $\quad z \in k(0,R)$.

Освен това $f^{(k)}(0) = k! a_k \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Теорема за единственост на степенни редове

Th. Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е степенен ред с $R_{сх.} = R > 0$

Ако 0 е точка на сгъстяване на нулите на $f(z)$, то $f(z) \equiv 0$, $z \in k(0,R)$

т.е. $a_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$

Доказателство: Да допуснем, че $f(z) \not\equiv 0$, $z \in k(0,R)$. Тогава $\exists s \geq 0$, т.ч.

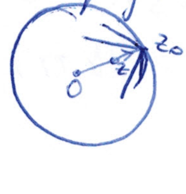
$a_0 = a_1 = \dots = a_{s-1} = 0$, $a_s \neq 0$ и $f(z) = a_s z^s + a_{s+1} z^{s+1} + \dots$

Имаме, че $f(z) = z^s (a_s + a_{s+1} z + \dots) = z^s \cdot \varphi(z)$, където $\varphi(z) = a_s + a_{s+1} z + \dots$ – има същия радиус на сходимост – R. От Th. (за диференциране) $\Rightarrow \varphi(z)$ е холоморфна в $k(0,R)$ и значи е непрекъсната в $k(0,R)$.

Тъй като $\varphi(0) = a_s \neq 0$, то непрекъснатост $\exists \delta > 0$, т.ч. $\varphi(z) \neq 0$, $|z| < \delta$.
Но тогава $f(z) = z^s \cdot \varphi(z) \neq 0$ $\forall z: 0 < |z| < \delta$, което означава че 0 не е точка на сгъстяване на нули на f!

<u>Следствие</u> (Th за идентичност)
Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ са степенни редове с $R_{сх.} = R > 0$. Ако 0 е точка на сгъстяване на множеството $\{z \in k(0,R) : f(z) = g(z)\}$, то $f(z) \equiv g(z)$, $z \in k(0,R)$, т.е. $a_n = b_n$, $n = 0,1,\dots$

Гранична теорема на Абел: Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е степенен ред с $R_{сх.} = R$ и нека $\sum a_n z_0^n = S$, за $|z_0| = R$. Тогава $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in [0, z_0]}} f(z) = S$



Функциите e^z, $\sin z$, $\cos z$.

<u>I. e^z</u>

<u>Деф:</u> $e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ $\quad R_{сх.} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$

$\Rightarrow e^z$ е холоморфна в $\mathbb{C}$ - цяла ф-я $\quad (e^z)' = e^z$, $z \in \mathbb{C}$

Свойства на e^z:
1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; 2) $e^z \neq 0$: $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \neq 0$; 3) $z = iy$, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

<u>Лема:</u> Ако f е холоморфна в област D и $f'(z) = 0$, $z \in D$, то $f(z) = const$, $z \in D$.

$(f = u + iv$, $f' = 0 \Leftrightarrow u_x = u_y = v_x = v_y = 0$

Да разгледаме ф-та $f(z) = e^z \cdot e^{a-z}$ цяла функция

$f'(z) = e^z \cdot e^{a-z} - e^z \cdot e^{a-z} = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Следователно (Лемата)

$f(z) \equiv const = f(0) = e^a$, $z \in \mathbb{C}$, т.е. $e^z \cdot e^{a-z} = e^a$, $\forall a, z \in \mathbb{C}$

Полагаме: $z = z_1$, $a = z_1 + z_2$ и получаваме $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

3) $z = iy$, $e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots =$

$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right) = \cos y + i \sin y$$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y \Rightarrow \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ $\quad$ (Ойлер)

$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \Rightarrow \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}$

$\underline{e^{i\pi} = -1}$

4) $z = x + iy$, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5) e^z е периодична функция с основен период $2\pi i$

① $\cancel{e^{z+2\pi i}}$ $e^{z+2k\pi i} = e^{x+i(y+2k\pi)} = e^x e^{i(y+2k\pi)} = e^x(\cos(y+2k\pi)+i\sin(y+2k\pi))$

$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$

② Нека ω е период на e^z, т.е. $e^{z+\omega} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, в частност при $z=0 \Rightarrow e^\omega = 1$. Нека $\omega = u+iv$. Тогава $e^\omega = 1 \Leftrightarrow e^u \cdot e^{iv} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^u(\cos v + i\sin v) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^u \cos v = 1 \\ \underset{\neq 0}{e^u} \sin v = 0 \end{cases} \Rightarrow v = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$e^u \cos n\pi = 1 \Leftrightarrow e^u(-1)^n = 1 \Rightarrow n = 2k$ и $u = 0$. Следователно $v = 2k\pi$ $z=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$