24.II.2014г. Комплексен анализ

~~Иван Хаджиевски~~ Ваня Хаджитски

~~Ване~~

ТК – 4 контролни (20 min) през 20 дни (3 седм.) × 10т. = 40т

1 контролно (90 min) × 25т. = 25т.

седмицата преди контролно ще ни казва какво ще има

примерни задачи ще ни дава

контролното (90 min) ще има и теория, а на останалите – не

краен изпит × 35т = 35т. (основно теория) 2 въпроса в 2 дни + задачка към всеки въпрос

100т.

на следващата ще ни разпитва по написаното

50т. – 3

1) Защо Тейлъровият ред на $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ е сходящ само в $(-1, 1)$?

$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$f_1(x) = 1 - x + x^2 - \dots, \quad -1 < x < 1$

$R_{cx.} = dist(0, -1)$

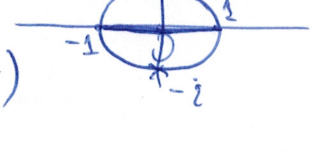
$f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f_2(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots, \quad -1 < x < 1$

$x \to z \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots, \quad |z| < 1$

$z = \pm i$ – особени точки

$R_{cx.} = 1 = dist(0, i) = dist(0, -i)$



2) Една задача от теория на числата

Може ли $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ да се раздели на краен брой аритметични прогресии с различни разлики?

Да допуснем, че $\mathbb{N} = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$

$S_k = \{a_k, a_k + d_k, \ldots\}$, $k = 1 \div n$

$S_k \cap S_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$

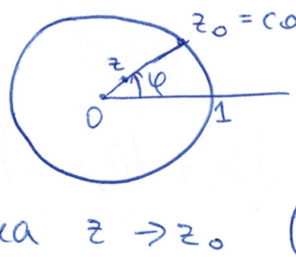
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{j \in S_1} z^j + \sum_{j \in S_2} z^j + \ldots + \sum_{j \in S_n} z^j$$

геометрична прогресия

$\left(z^{a_k}, q = z^{d_k}\right)$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \ldots + \frac{z^{a_n}}{1-z^{d_n}}$$ без ограничение (б.о.)

$d_1 = \max(d_1, d_2, \ldots, d_n)$



$z_0 = \cos\frac{2\pi a_1}{d_1} + i \sin\frac{2\pi a_1}{d_1}$

$|z| = 1$

$z = \cos\varphi + i.\sin\varphi$

Нека $z \to z_0$ $(z = \tau . z_0,\ 0 < \tau < 1,\ \tau \to 1)$

Тогава

$$\frac{1}{1-z_0} \overset{!}{=} \underbrace{\ominus}_{\infty} + \ldots + \frac{z_0^{a_k}}{1-z_0^{d_k}} + \ldots$$

$z_0^{d_k} \neq 1$, $k \neq 1$, защото $d_1 > d_k$, $k \neq 1$ $\lightning$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

Литература:

1. Татяна Аргирова - Теория на аналитичните функции
2. В. Шабат, т. I, - Введение в Комплексный анализ (руски)
3. Комплексен анализ - ръководство, Петър Абаджиев, Ваня Хаджиски

Комплексни числа

$$x^3 = 15x + 4$$

$$4 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{121}}$$

Дефиниция: $\mathbb{C} = \{(a,b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

1. $(a,b) = (c,d) \iff a = c,\ b = d$
2. $(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$
3. $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

Твърдение: $\mathbb{C}, +, \cdot$ - поле с единица относно $+ (0,0)$, относно $\cdot (1,0)$, обратен елемент на (a,b) $\xrightarrow{+} (-a,-b)$, $\xrightarrow{\cdot} \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

$\mathbb{C}_R := \{(a,0),\ a \in \mathbb{R}\}$ - поле

$\mathbb{C}_R \longleftrightarrow \mathbb{R} \implies (a,0) := a$

$(a,0) \Leftrightarrow a$

$i := (0,1)$, $i.i = -1 = i^2$

$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0)$

$z = a + ib$; $(a+bi)$ - алгебричен вид на комплексните числа

$\mathbb{C}$ не наследяват наредбата в $\mathbb{R}$!

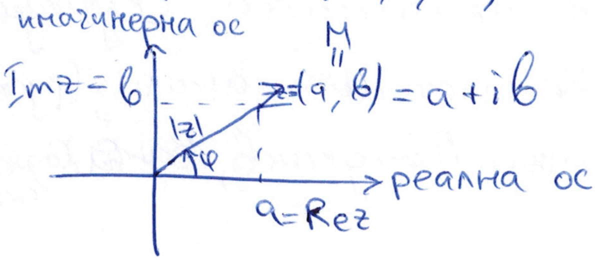
$\leq, >, \geq, <$ в $\mathbb{C}$ нямат смисъл!

Пример: 1) Ако $i > 0$, то $i.i > i.0 \Rightarrow -1 > 0$!

2) Ако $i < 0$, то $i.i > i.0 \Rightarrow -1 > 0$!

Геометрична интерпретация на $\mathbb{C}$

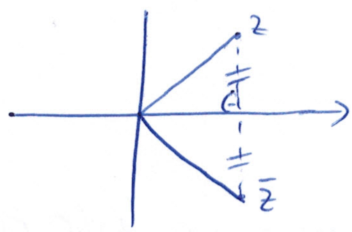
$\mathbb{C} = \{ z = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R} \}$



<u>Означения:</u> $z = a + ib$

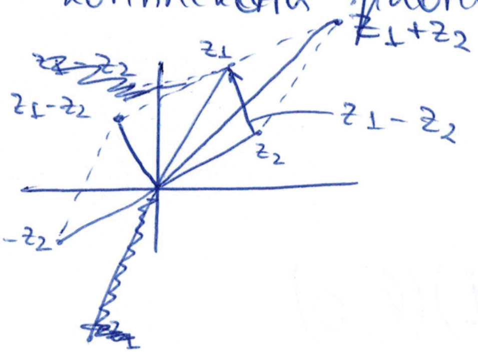
$a = \mathrm{Re}\, z\ ,\ b = \mathrm{Im}\, z$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \bar{z} = a - ib$



$\boxed{z \equiv M \equiv \overrightarrow{OM}}$

$\mathbb{C}$ – комплексна равнина



$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z \iff \mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

$z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z \iff \mathrm{Im}\, z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

$\overline{\bar{z}} = z$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

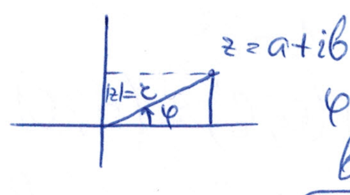
$\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

Неравенство на триъгълника

$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Тригонометричен вид на комплексните числа



φ – ъгълът между вектора z и Ox^+ $:= \arg z$

$a = r \cdot \cos\varphi$

$b = r \cdot \sin\varphi$

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

Ако φ е аргумент на z, то $\varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ също е аргумент на z.

$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$

$|e^{i\varphi}| = 1$

$e^{i\varphi} . e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$

$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)}$

$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$

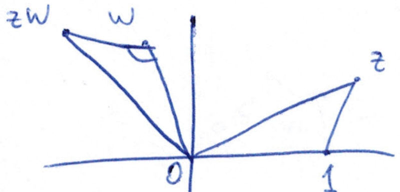
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin \varphi$ - формула на Моавър

$z = r e^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$

$z = w \iff r = \rho$ и $\theta = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$z . w \Rightarrow r.\rho e^{i(\varphi+\theta)}$

$|z.w| = |z|.|w|$ и $\arg zw = \arg z + \arg w$!



$\Delta(0,1,z) \sim \Delta(0,w,zw)$

Уравнението $z^n = c$, $c \in \mathbb{C}$

$c = \rho e^{i\theta}$, $z = r.e^{i\varphi}$

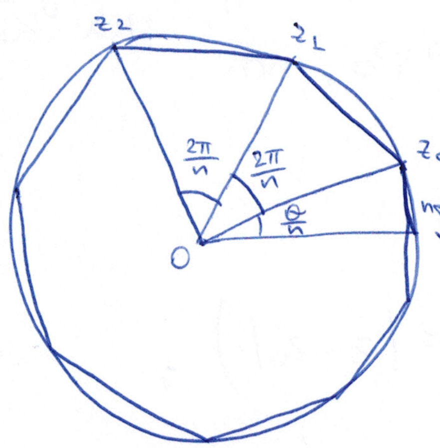
$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \iff r^n = \rho$ и $n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

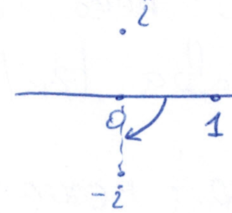
формула на Моавър

Главен аргумент

$\arg_0 z \in [-\pi, \pi]$



$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ - правилен n-ъгълник, вписан в окръжност с център 0 и $R = \sqrt[n]{|c|}$

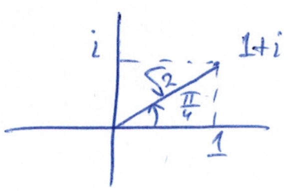


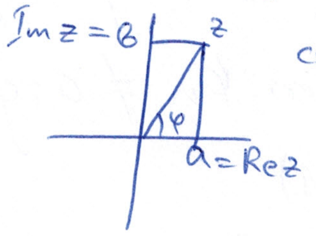
$\arg_0 1 = 0$

$\arg_0 i = \frac{\pi}{2}$

$\arg_0(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$





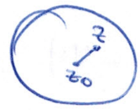
$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$

$\sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$

Редици и редове от комплексни числа

Дефиниция: Околност на $z_0 \in \mathbb{C}$

$$K(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$$



Дефинициите за редица, подредица, точки на сгъстяване са както в $\mathbb{R}$.

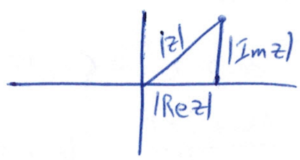
Дефиниция: $\{z_n \in \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ $\left(\lim_{n\to\infty} z_n = z_0\right)$

ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu = \nu(\varepsilon)$, така че $|z - z_0| < \varepsilon$, $n > \nu$ $\left(\Leftrightarrow z_n \in K(z_0, \varepsilon),\ n > \nu\right)$

Критерий на Коши

$\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^{\infty}$ е сходяща $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon)$, така че $|z_m - z_n| < \varepsilon$, $\forall m, n > 0$.

Твърдение 1: $z_n \to z_0 \Leftrightarrow Re\, z_n \to Re\, a$, $Im\, z_n \to Im\, z_0$



Твърдение 2: Ако $z_n = |z_n| e^{i\varphi_n}$ (φ_n - фиксиран аргумент на z_n) и $|z_n| \to \rho$ и ~~$\varphi_n \to \rho e^{i\varphi_0} := z_0$~~ $\varphi_n \to \varphi_0$, то

$z_n \to \rho e^{i\varphi_0} := z_0$.

Обратно: Нека $z_n \to z_0$, $z_n = |z_n| . e^{i\varphi_n}$

Тогава $|z_n| \to |z_0|$ $\left(\big||z_n| - |z_0|\big| \le |z - z_0|\right)$,

но $\{\varphi_n\}$ може да е разходяща, или ако е сходяща може $\lim \varphi_n \neq \arg z_0$.

Пример: 1)