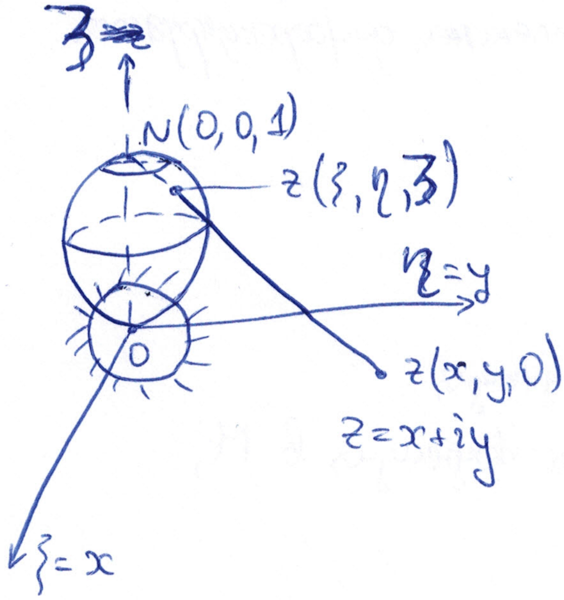
10.III.2014г. Комплексен анализ – лекция



$$S^2=\{\xi^2+\eta^2+(\zeta-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}\}$$

$$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

$$\Pi: S^2 \Leftrightarrow \overline{\mathbb{C}} : z \to N\vec{z}\cap\mathbb{C}=$$

$$N \Leftrightarrow \infty$$

Π – взаимно-еднозначно, непрекъс

Π^{-1} – непрекъснато

т.е. Π е хомоморфизъм на S^2 в/у $\mathbb{C}$

Дефиниция: Околност на ∞ наричаме външността на всеки кръг $|z|<R$, т.е. това $\{|z|>R\}\cup\infty$

Топология в $\overline{\mathbb{C}}$

Всички понятия и твърдения за топологията в $\mathbb{C}$, остават валидни и за топологията в $\mathbb{C}$, като пренаебрегнем условието „ограниченост".

Теорема (Болцано-Вайерщрас в $\overline{\mathbb{C}}$) От всяка редица $\{z_n\in\overline{\mathbb{C}}\}$ може да се избере сходяща подредица $\Leftrightarrow$ всяка редица $\{z_n\in\overline{\mathbb{C}}\}$ има точка на сгъстяване.

$F\subset\overline{\mathbb{C}}$ – компакт $\Leftrightarrow$ F е затворено множество.

$\Leftrightarrow$ От всяка редица $\{z_n\in\overline{\mathbb{C}}\}$ може да се избере сходяща подредица $\{z_{n_k}\in\overline{\mathbb{C}}\}$, $z_{n_k}\to z_0$, $z_0\in F$.

$\Leftrightarrow$ От всяко отворено покритие на F може да се избере крайно подпокритие.

$\overline{\mathbb{C}}$ е компакт.

Функции на комплексната променлива. Непрекъснатост. Комплексна диференцируемост.

Нека $M \subseteq \mathbb{C}$

$f : M \longrightarrow \mathbb{C}$

$f(z) = \arg z$ - безкратнозначна

$f(z) = \sqrt{z} := \sqrt{|z|}\,.\,e^{i\frac{\arg z}{2}}$ – двузначна функция

Дефиниция: $f : M \to \mathbb{C}$ е еднолистна функция в M, ако $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$

Нека $f : M \to \mathbb{C}$, $z = x + iy$

$u(x,y) := \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) := \operatorname{Im} f(z)$

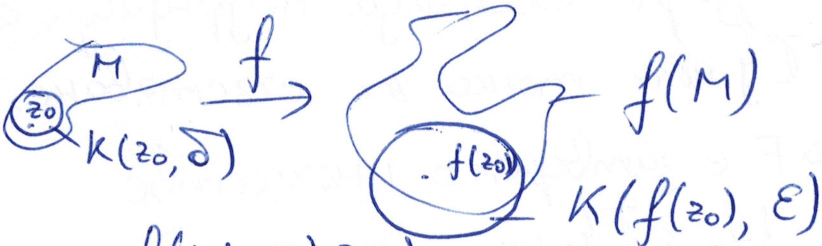
Тогава $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) := f(x,y)$

Примери: 1) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 = z^2$

2) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy \underset{\substack{x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2}}}{=} f(z, \bar{z})$ $\qquad x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad y = \frac{z-\bar{z}}{2}$

Непрекъснатост: $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in M$.

Дефиниция: f е непрекъсната в z_0, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0)$, така че $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, $\forall z \in M$, за което $|z - z_0| < \delta$.



$f(K(z_0,\delta) \cap M) \in K(f(z_0), \varepsilon)$

Твърдение: ~~Дефиниция:~~ Ако z_0 е точка на сгъстяване, то f е непрекъсната в $z_0 \iff \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = f(z_0)$.

Твърдение: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е непрекъсната в $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0 \iff u(x,y)$ и $v(x,y)$ са непрекъснати в (x_0, y_0).

Дефиниция: $f: M \to \mathbb{C}$ равномерно-непрекъсната в M, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, така че $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, $\forall z_1, z_2 \in M$, за които $|z_1 - z_2| < \delta$.

Теорема 1: Нека $f: M \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция.

Тогава:

(1) Ако M е компакт, то и $f(M)$ е компакт;

(2) Ако M е свързано множество, то и $f(M)$ е свързано множество;

Теорема 2: Нека $f: K \to \mathbb{C}$ е непрекъсната и $K \subset \mathbb{C}$ е компакт то:

(1) f е равномерно непрекъсната;

(2) $\exists z_1, z_2 \in K$, т.ч. $|f(z_1)| = \underset{K}{\text{НГС}} |f(z)|$

$$|f(z_2)| = \underset{K}{\text{НМС}} |f(z)|$$

Комплексна диференцируемост

Нека f е дефинирана в околност U на z_0.

Дефиниция: f е комплексно диференцируема ($\mathbb{C}$-диференцируема) в z_0, ако $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta z \to z_0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$z - z_0 = \Delta z = h$$

$$f(z) - f(z_0) = \Delta f$$

Ако $\alpha(\Delta\{z\}) := \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0)$, то $\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$ и $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \Delta z \cdot \alpha(\Delta\{z\})$

Твърдение: f е $\mathbb{C}$-диференцируема в $z_0 \iff \exists A \in \mathbb{C}$ и функция $\alpha(\Delta z)$, $\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$ така, че

$$\Delta f = A \Delta z + \Delta z \cdot \alpha(\Delta z), \ z \in U$$

$$f'(z_0) := A.$$

Твърдение: Ако f е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0, то f е непрекъсната в z_0.

Обратното не е вярно.

Пример: $f(z)=\bar{z}$ е непрекъсната в $\mathbb{C}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\begin{cases}1, & \Delta z\in\mathbb{R}\\ -1, & \Delta z\in i\mathbb{R}\end{cases}$$

$\Rightarrow f(z)=\bar{z}$ не е $\mathbb{C}$-диференцируема за някое $z\in\mathbb{C}$

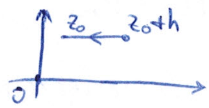
$$f(z)=f(x,y)=x-iy$$
$$u(x,y)=x\in C^\infty$$
$$v(x,y)=-y\in C^\infty$$

Уравнение на Коши-Риман.

Нека f е $\mathbb{C}$-диференцируема в $z_0=(x_0,y_0)=x_0+iy_0$ т.е.

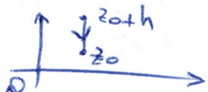
$$\exists\, f'(z_0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}!}}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \quad (\text{! както да клони } h \text{ към } 0)$$

1) $h\to 0,\ h\in\mathbb{R}$



$$f'(z_0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

2) $h\to 0,\ h\in i\mathbb{R}$, т.е. $h=ih_1,\ h_1\to 0,\ h_1\in\mathbb{R}$



$$f'(z_0)=\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h=ih_1}}\frac{f(x_0,y_0+h_1)-f(x_0,y_0)}{ih_1}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Следователно, ако f е $\mathbb{C}$-диференцируема в $z_0=(x_0,y_0)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$f_x:=\frac{\partial f}{\partial x},\quad f_{xx}:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f_z=\frac{\partial f}{\partial z},\quad f_{\bar z}:=\frac{\partial f}{\partial \bar z}$$

C.R. $\boxed{f_x+if_y=0 \text{ в } z_0}$ — уравнение на Коши-Риман

$f(z)=\bar z=x-iy,\quad f_x=1,\ f_y=-i$

$f_x+if_y=1+i(-i)=2\neq 0$

Нека $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Тогава $f_x=u_x+iv_x$, $f_y=u_y+iv_y$, то C.R. : $f_x+if_y=0$

$\Leftrightarrow u_x+iv_x+i(u_y+iv_y)=0 \Leftrightarrow u_x-v_y+i(u_y+v_y)=0$

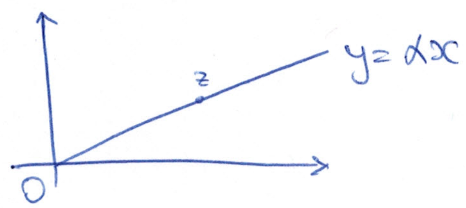
$\Leftrightarrow$ C.R. $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$

Условието на C.R. не е достатъчно условие за $\mathbb{C}$-диф

<u>Пример</u>: $f(z)=\begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

$z=x+iy$

$f_x(0)=0=f_y(0) \Rightarrow f$ удовлетворява C.R. в $z=0$



$$\lim_{\substack{z\to 0\\ y=\alpha x}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{\substack{z\to 0\\ y=\alpha x}} \frac{xy}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to 0\\ y=\alpha x}} \frac{\alpha x^2}{x^2+\alpha^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \cancel{x^2}}{(\alpha^2+1)\cancel{x^2}} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$$ – зависи от α!

Следователно: f не е $\mathbb{C}$-диференцируема в 0.

<u>Дефиниция</u>: $f: M \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диференцируема в т. $z_0=(x_0,y_0)$, ако $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ и $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ са диференцируеми в (x_0,y_0)

т.е. $\Delta u = u_x \cdot \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

$\alpha_1(\Delta x,\Delta y) \xrightarrow[\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}]{} 0$

$\Delta v = v_x \cdot \Delta x + v_y \Delta y + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$\alpha_2(\Delta x,\Delta y) \xrightarrow[\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}]{} 0$

Оттук, предвид $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ достигаме до:

$\Delta f = a\Delta x + b\Delta y + \alpha(\Delta z)\Delta z$, $\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0$

$f_x := a$, $f_y := b$. f е $\mathbb{R}$-диф. в $z_0 = x_0+iy_0$

$\Updownarrow$

$\Delta f = f_x\Delta x + f_y\Delta y + \alpha(\Delta z)\Delta z$, $\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0$