

29.04.2014г.

КА - лек

(Т. Лоран) Нека f е холоморфна във венеца

$$V(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty\}$$

Тогава $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in V(z_0, r, R),$

където a_n са еднозначно определени и

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

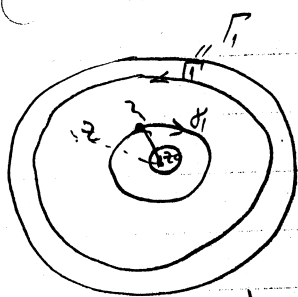
$\gamma = \{z - z_0 = \rho, \quad r < \rho < R\}$. Резултат

е равномерно сх. във компактните подмн. на венеца.

Д-во: Нека $z \in V(z_0, r, R)$ и $r < r_1 < R < R$ с т.з. $r_1 < |z - z_0| < R_1$.

Нека $\Gamma_1 = \{z - z_0 = R_1\}$, $\gamma_1 = \{z - z_0 = r_1\}$

От формулата на Коши имаме:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cup \bar{\gamma}_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

① както при Д-вото на Т. Теорема следва

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad -\frac{1}{z-z} &= \frac{1}{z-z} = \frac{1}{z-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z-z_0}} = \\
 &= \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^n, \text{ так как } q = \left| \frac{z-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{r}{|z-z_0|} < 1 \\
 &\quad + z \in D_1.
 \end{aligned}$$

Т.е. $f \in \text{огр. болы } D_1$ (тогда f — непрерыв. болы D_1), то

$$-\frac{f(z)}{z-z} = \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^n$$

и ако $M = \max |f(z)|$, то

$$\left| \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \left(\frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^n \right| \leq \frac{M}{r} q^n.$$

От критерия на $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^n$ $\neq$ равном. с.х. болы D_1 .

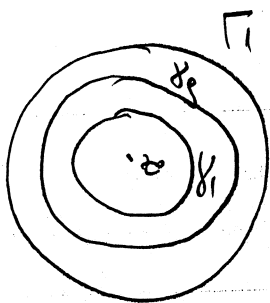
и можем да интегрируем по контуру.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z} dz &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^n} dz = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z) \cdot (z-z_0)^{n-1} dz \right) \frac{1}{(z-z_0)^n}
 \end{aligned}$$

(такие выражения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^n}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z) (z-z_0)^{n-1} dz.$$



От теоремата на Коши
за сложен контур,
приложена е областта
заградена от Γ и γ_2 и от
 γ_1 и γ_2 има:

$$a_n^{z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \quad n=0,1,2,\dots$$

$$a_{-n}^{z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z) \cdot (z-z_0)^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(z) (z-z_0)^{n-1} dz.$$

$n=1,2,\dots$

Не зависи от избора на z_1 .

Така $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, \quad z \in V(z_0, r)$

(това доказваме досега)

Като $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \in$ равномерно с.к. в
компактните подмн. на $\{ |z-z_0| < R \}$

и $\in$ холо. ф-ция $f^+(z)$ в този кр.
А редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0} \right)^n \in$ равном. с.к. в

комп. подмн. на $\{ |z-z_0| > \varepsilon \}$ и $\in$ холо. морфн.

ф-ция $f^-(z)$ т.н.

Поради това $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \in$
 равном. ск. в $\bigcup$ компактните подмн.
 на срезето, а то $\in$ тозто ветвя $V(z_0, r, R)$

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

$f^+(z)$ е харм. в $|z-z_0| < r$
 $f^-(z)$ е харм. в $|z-z_0| > r$.

Това представяне е! с тозто до
 компактната.

Единственост на разлагането:

Нека $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \in$ разложение на f
 в ред на Лоран в $V(z_0, r, R)$

Нека $\gamma \in (r, R)$.
 Разг. $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$ м.фикс. $\mathbb{Z}$.
 хармонична в ок-ст на γ

Т.к. редът на Лоран $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ е
 равном. ск. в $\bigcup$ γ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \right) \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z-z_0)^{n-k-1} dz = b_k, \text{ защото} \\ &\quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z-z_0)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n-k-1 = -1 \\ 0, & n-k-1 \neq -1 \end{cases} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad n \neq k \end{aligned}$$

$b_n = a_n, \forall n.$

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z), z \in V(z_0, r, R)$$

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{хотом. в } |z - z_0| < R$$

и се нар. правилна част

$$f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{е хотом. в } |z - z_0| > r$$

и се нар. павна част

(характеристична ф.)

на f в развитието на Лоран.