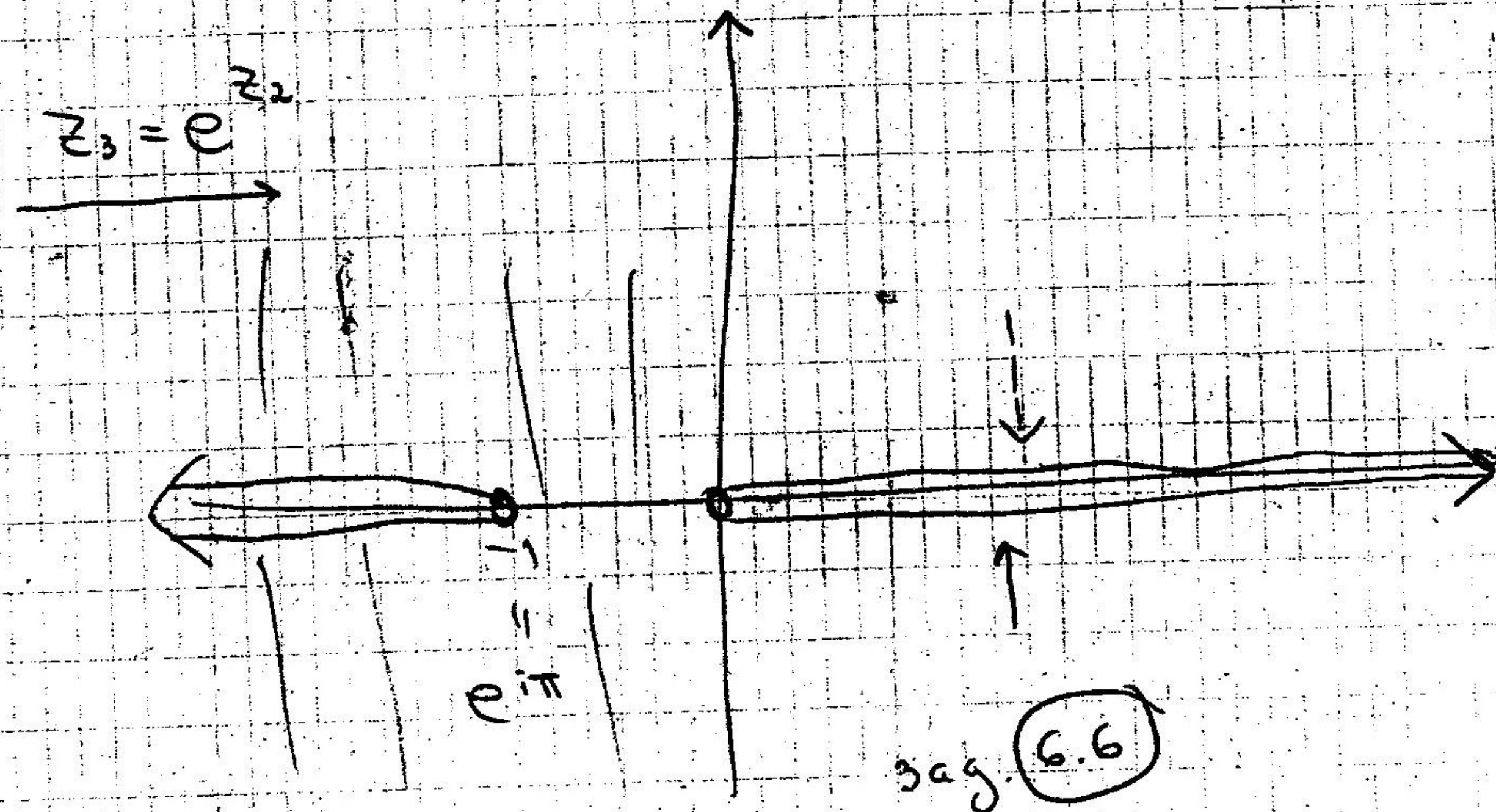
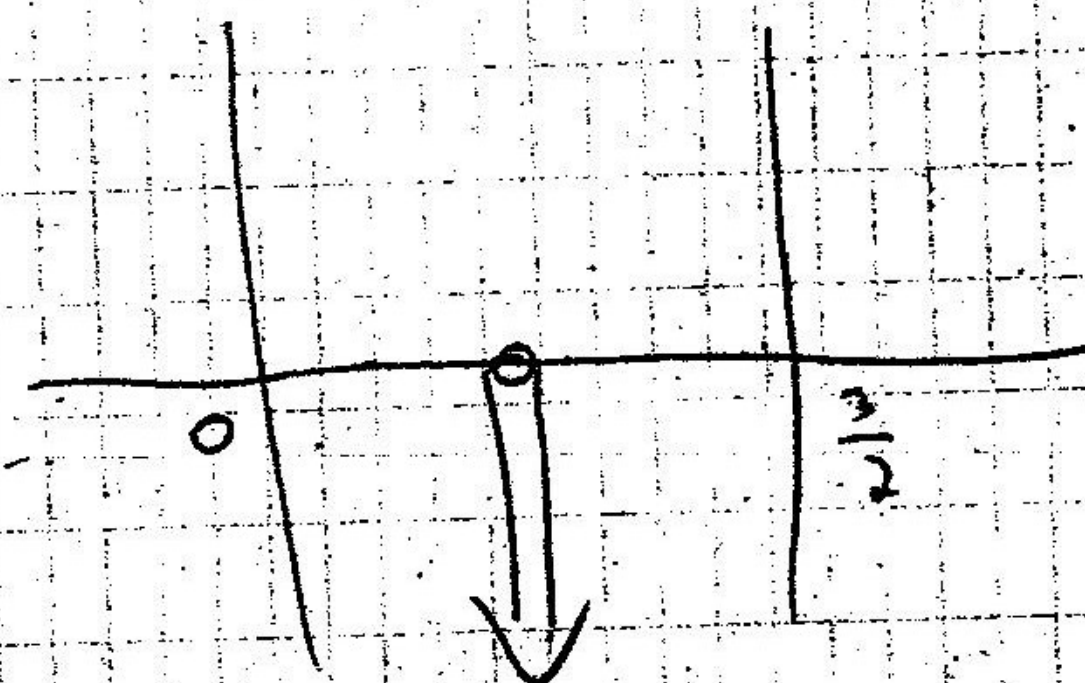
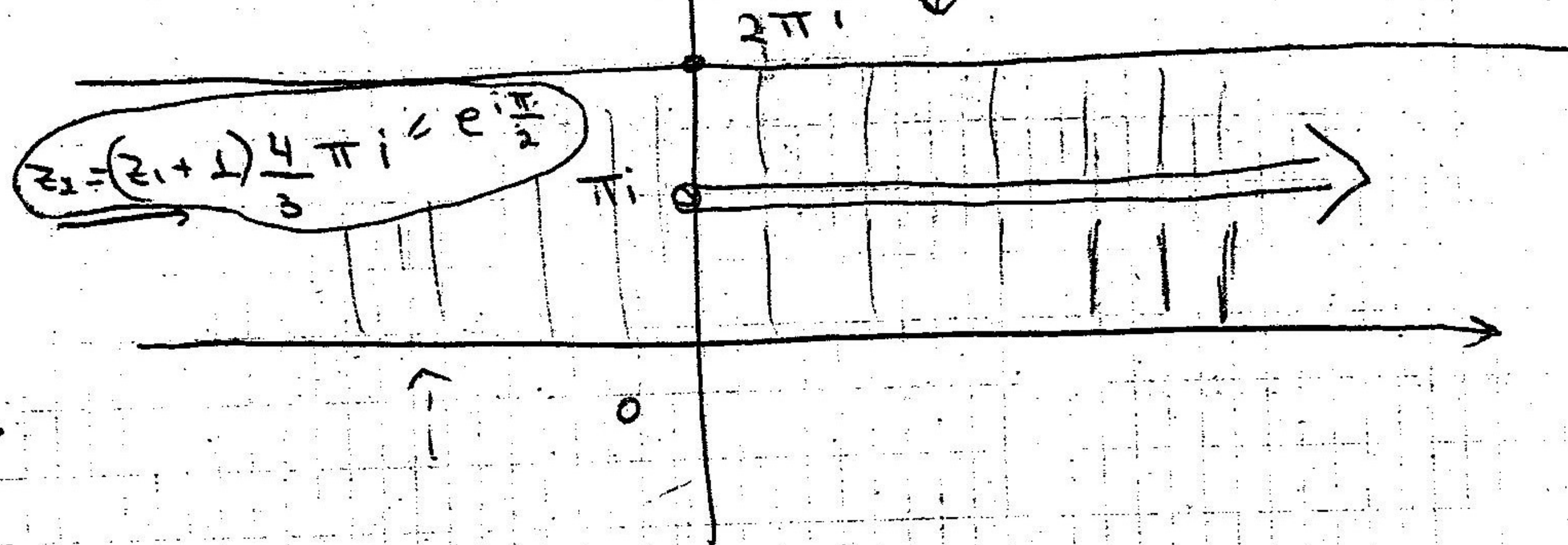


e^z е еднолистна в хоризонтални
линии, но не във вертикални
и хомотетична



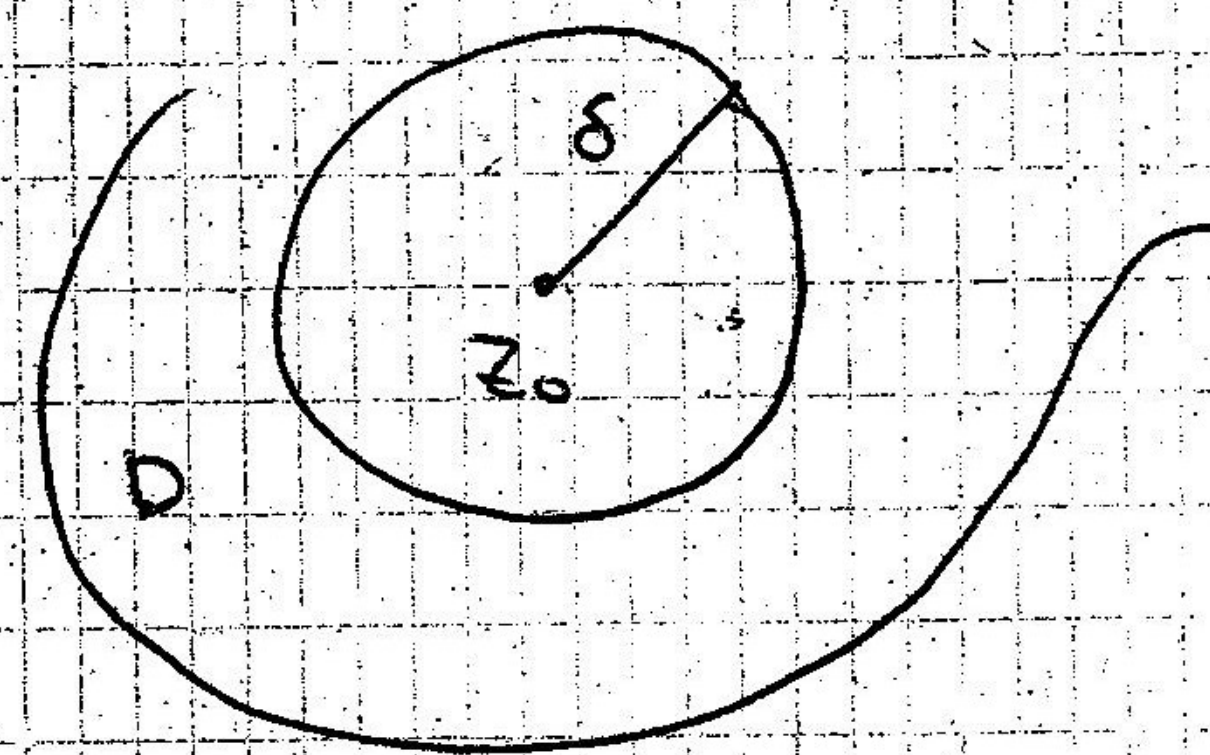
заг. (6.6)

28.04.2014г.
Лекция

Th за !-ност на холоморфна
ф-я:

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \rightarrow \mathbb{C}$
е холоморфна ф-я в D . Ако 0-то
от нулите на f има т.на съвс-
ване в D , то $f(z) \equiv 0, z \in D$.

Следствие 1: Нулите на
холоморфните ф-ции са изолирани
точки.



$f(z_0) = 0$
 $\Rightarrow \exists \delta > 0$
 $f(z) \neq 0,$
 $z \in K(z_0, \delta)$

(задача) Следствие 2:

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \rightarrow \mathbb{C}$
е холоморфна. Ако $\exists z_0 \in D: f^{(n)}(z_0) = 0,$

$\forall n = 0, 1, \dots$, то
 $f(z) \equiv 0, z \in D$, т.е.
 холоморфните ф-ции ($\neq 0$)
 нямат 0 от безкраен ред.
 $f(z) \neq 0, z \in K(z_0, \delta)$

Пример 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, \quad n = 0, 1$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{x} = 1, \text{ т.е. нулата}$$

не е изолирана.

$$x = \frac{1}{n}$$

Пример 2:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

при $x=0 \rightarrow$ ММИ,

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \text{ т.е.}$$

0 е нула от безкраен ред на f , но $f \neq 0$.

Th (за идентичност)

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ са холоморфни ф-ции. Ако 0-то

$$\left\{ z \in D: f(z) = g(z) \right\} \text{ има}$$

точка на събиране в D , то двете функции съвпадат тождествено.

Д-во: Прилагаме Th за единственост за $f-g$:))

Пример: $e^z \cdot e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$
 (чрез Th за идентичност)

Нека $f(z) = e^z \cdot e^x, \quad g(z) = e^{z+x},$
 $z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}$
 f, g - цели ф-ции

① - безгр. мн. т. на съст

$$f(z) = g(z), z \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ От Тн за идентичност

$$\Rightarrow f(z) = g(z) \text{ за } \forall z \in \mathbb{C}$$

Нека $F(w) = e^z \cdot e^w$, $G(w) = e^{z+w}$, $z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$

фиксирано

F, G са цели функции

$$F(w) = G(w), w \in \mathbb{R} \text{ от } ①$$

$\Rightarrow$ От Тн за идентичност

$$\Rightarrow F(w) = G(w), w \in \mathbb{C}, \text{ т.е.}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, z, w \in \mathbb{C}$$

Представ

Представяне в ок-т
на 0

Def z_0 се нарича n -кратна 0 на f , ако $0 = f(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0)$,
 $f^{(n)}(z_0) \neq 0$

Л Нека f е холоморфна в ок-т U на $z_0 \in K(z_0, R)$ и z_0 е n -кратна нула на f . Тогава

в околност на $z \in K(z_0, R)$ е в
шпа представянето

$$f(z) = (z - z_0)^n \psi(z), \text{ където } \psi \text{ е}$$

холоморфна и $\neq 0$ в U

Д-во Нека

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_m(z - z_0)^m$$

$a_m \neq 0$

$f(z) = a_m(z - z_0)^m + \dots$, $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$
е Тейлоровото развитие на f в
 $K(z_0, R)$. Тогава $f(z) = (z - z_0)^m \{$

$$(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots)\}$$

Тъй като R е на ст. ред

$$a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots \in \mathbb{R},$$

то сумата му

$\psi(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots$ е
холоморфна в $K(z_0, R)$,

$$f(z) = (z - z_0)^m \psi(z) \text{ и } \psi(z_0) = a_m \neq 0$$

От непрекъснатостта на ψ
 $\Rightarrow \exists$ околност $U = K(z_0, R_1)$,

$$R_1 \leq R, \text{ т.е.}$$

$$\psi(z) \neq 0, z \in U.$$

:))

Полямо ! Контролно !

Задачи:

① f е холоморфна в $|z| < 1$ ф.,
за която

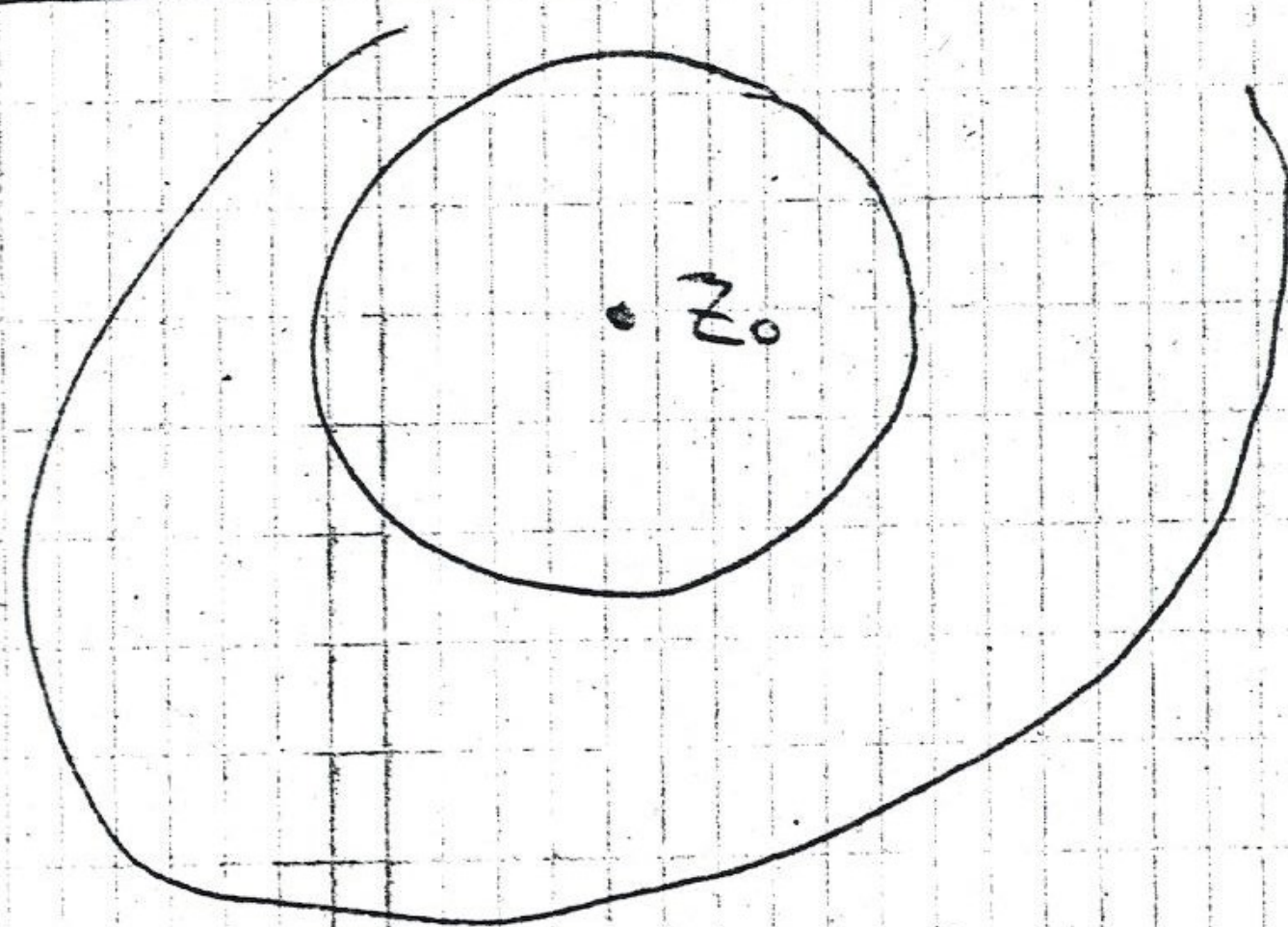
a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$, $n = 2, 3, \dots$

② Да намерим. Нека $G \subseteq \mathbb{C}$ е отворено
о-во и f, g са холоморфни в G .
 $D \subset D$, т.е. G е област ($=$) от
 $f(z), g(z) \equiv 0$ следва, т.е.
или $f(z) \equiv 0$, $z \in G$ или
 $g(z) \equiv 0$, $z \in G$.

пръстен

област на
целост (нима
делители на 0)



хол. в z_0 - Тейлър
когато в
близост има
особена
точка-редовна
на Лоран

Развитие в редове на Лоран

Дер. Ред на Лоран

$$(1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Област на сх.

Th 1: Нека $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

Тогава редът (1) е сх. в о-вото
Тогава областта на сх. на
реда (1) е

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R \text{ и } |z-z_0| > r\}$$

Ако $r \geq R$, то $D = \emptyset$;

Ако $r < R$, то D е венета

$$V(z_0, r, R)$$

център | външен
всгр. | радиус
радиус

$$V(z_0, z, R) = \{0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty\}$$

D-во: От ф-лата на Коши-Адамар

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ е с. в } |z - z_0| < R$$

Пак от нел $\Rightarrow \sum a_n \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n$ е

с. в $\left|\frac{1}{z - z_0}\right| < \frac{1}{r} \Leftrightarrow$

$$|z - z_0| > r$$

Th (ЛОРАН): Нека f е холоморфна във
венуц $V(z_0, z, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r \leq |z - z_0| < R \leq +\infty\}$

Тогава $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, в

$z \in V(z_0, z, R)$, където

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\gamma_r = \{z - z_0 = r, \quad r < r < R\},$$

са еднозначно отр. и

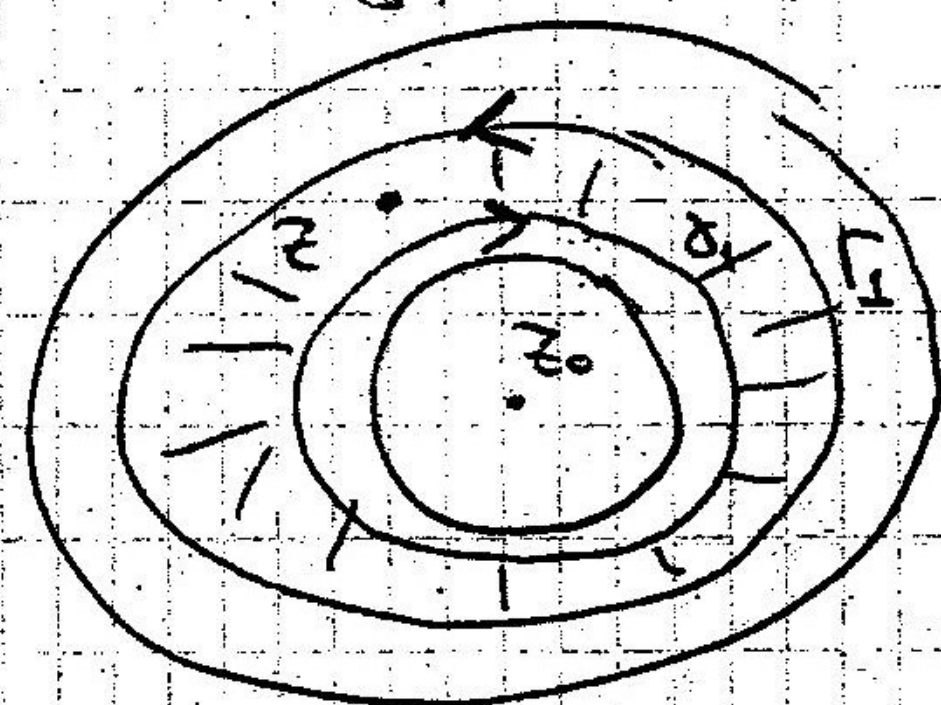
редът е равномерно с. в/у компактните подмножества на венуца V .

D-во: Нека $z \in V(z_0, z, R)$ и

$$r < r_1 < R$$

са т.е $z \in V(z_0, r_1, R_1)$

(по-тънък венуц)



(заради ф-лата на Коши по границата)

Нека $\gamma_1 = \{z - z_0 = r_1\}$,

$$\gamma_1 = \{z - z_0 = R_1\}$$

От формулата на Коши (приложена за $V(z_0, r_1, R_1)$) имаме, че

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$\frac{1}{z - z_0}$ развиване
равн. с. в
сходно

① Както в Тн (Тейлър) разлагане

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{R_1} (z - z_0)^n$$

където $a_n^{R_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$,

$$n = 0, 1, \dots$$