

26.05.2014г.

КА - лек.

Т.1 Руне

Нека $f \in \text{Затв. нпрод. кр.}$,

f, g са ф., които в ок-та на f и $\text{int} f$
и $|g(z)| < |f(z)|, z \in f$.

Тогав $f+g$ ($f-g$) има толкова нули
в $\text{int} f$, колкото има f .

Дуе 1-во на осн. т-ма на алгебра
(с оценка за нулите)

Нека $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = f(z) + g(z)$,
където $f(z) = z^n$ и $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

$$\text{Имаме, че } |g(z)| \leq |a_1| |z|^{n-1} + |a_2| |z|^{n-2} + \dots + |a_n| \leq \\ \leq a (|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \dots + 1) = a \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1},$$

където $a = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$. Тогав за $z: |z| = 1 + \alpha$

$$\text{между } |g(z)| \leq a \cdot \frac{|z|^n - 1}{\alpha} = |z|^n - 1 < |z|^n = |f(z)|$$

От Т. Руне $\Rightarrow f(z) + g(z) = P_n(z)$ има толкова
нули в $|z| < 1 + \alpha$ колкото има $f(z) = z^n$.
↳ тогаво и.

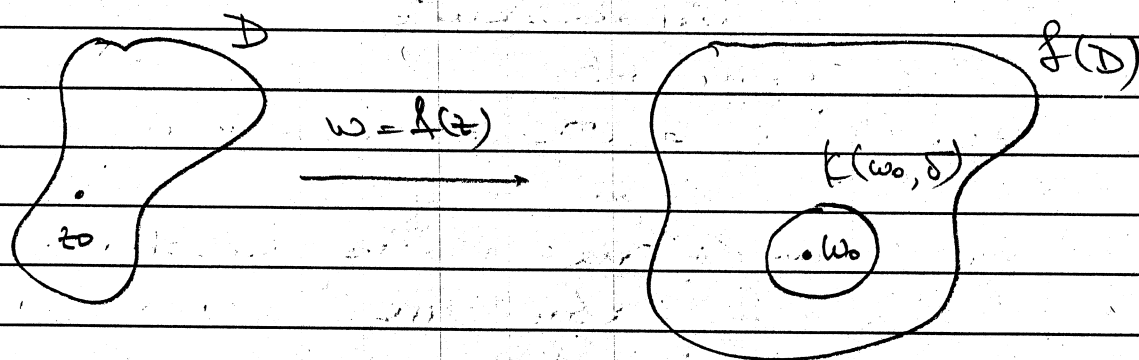
Пр. Да се намери разположението на
нулите на $P(z) = z^4 + 6z + 3$.
Нека $f(z) = z^4$

$$g(z) = 6z + 3. \text{ За } |z| = 2 \text{ имаме}$$

$$|g(z)| \leq 6|z| + 3 = 15 < 2^4 = 16 = |z|^4 = |f(z)|$$

Т. Руне $\Rightarrow f(z) + g(z) = P(z)$ има толкова нули

2) Избегая



Нека $w_0 \in \text{пробл. т. от образа}$
 $w_0 \in f(D)$

$z_0 \in D$ е т.ч. $f(z_0) = w_0$.

Т.к. нулите на конформ. ф. са изолирани,
 то $\exists$ ок-ти $K(z_0, \epsilon) \subset D$ н z_0

Така че $\exists \epsilon > 0$ $\forall z \in K(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}, f(z) - w_0 \neq 0$
 (и по принцип)

Нека $\gamma = \partial K(z_0, \epsilon)$ и
 $\delta = \min_{\gamma} |f(z) - w_0| > 0$.

Ще док. че $K(w_0, \delta) \subset f(D)$.

Действително, нека $w_1 \in K(w_0, \delta)$.

Имаме, че

$$|w_0 - w_1| < \delta \leq |f(z) - w_0|, \quad \forall z \in \gamma.$$

Т. рече следва, че f -униета

$$(w_0 - w_1) + (f(z) - w_0) = f(z) - w_1 \text{ има}$$

толькова нуля в $K(z_0, \epsilon) = \text{int } \gamma$,

когато има $f(z) - w_0$, т.е. по не

1 нуля, $\Rightarrow \exists z_1 \in K(z_0, \epsilon) : f(z_1) = w_1$

$\Rightarrow K(w_0, \delta) \subset f(D)$.

Зад. В $\mathbb{R}$ принципът не е валиден.

пр.: $f(x) = x^2 \quad (-1, 1) \rightarrow [0, 1)$

Сл:1 (Критерий за локална еднозначност)

Д:1 f е локално еднозначна в D , ако
за $\forall z \in D$, $\exists \delta(z, z) \subset D$: f е
еднозначна в $\delta(z, z)$, и.е.

$\Rightarrow$ за $\forall z_1 \neq z_2 \in \delta(z, \delta) \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$
(инективна)

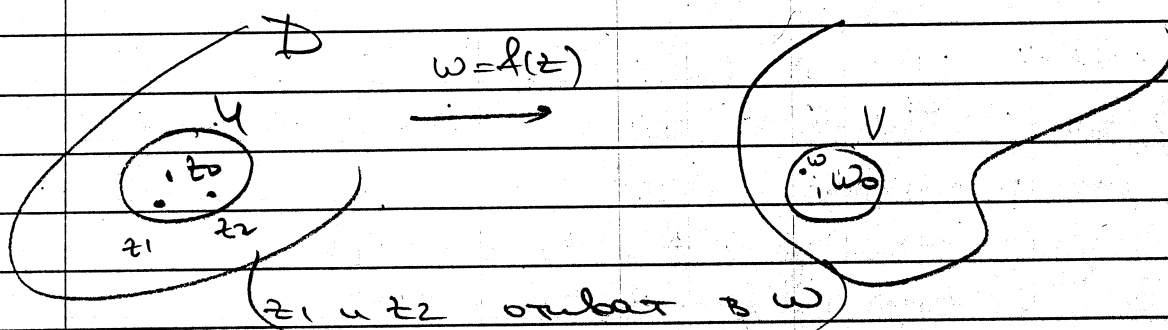
Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област и f е котом. в D .
 f е локално еднозначна в $D \Leftrightarrow f'(z) \neq 0$,
 $z \in D$.

До-во: 1) $\Rightarrow$: Нека f е лок. еднозначна в D
и да доп., че $f'(z_0) = 0$, за некое $z_0 \in D$.
Нека $w_0 = f(z_0)$

Тогавта z_0 $\neq$ проста нула
на $f(z) - w_0$.

От T_1

$f(z)$



$\Rightarrow$ за $\forall w \in V \setminus \{w_0\}$ има поне 2 точки
 $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in U \setminus \{z_0\}$ такива, че
 $f(z_1) = f(z_2) = w$.

$\Rightarrow f$ не е еднозначна
 $\Rightarrow X$ е допускането

2) $\Leftarrow$: $f'(z) = 0 \Rightarrow \forall z_0 \neq$ проста нула
на $f(z) - w_0, w_0 = f(z_0)$

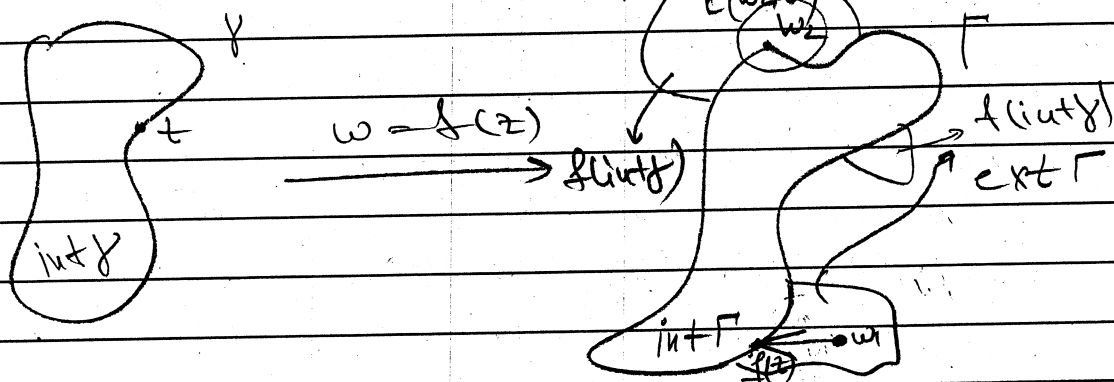
$\Gamma f(z) - w_0 = 1$, м.е. $\exists! z_0 : f(z_0) = w_0$.

Това доказателство, обаче, не е векторизирано:

м.е. $\text{int } \Gamma \subset f(\text{int } \gamma)$

2) Другава са доказателство

$f(\text{int } \gamma) \subset \text{int } \Gamma$.



Да доп. се не е възможно, т.е. $f(\text{int } \gamma) \not\subset \text{int } \Gamma$

2.1) Нека $\exists w_1 \in \text{ext } \Gamma, w_1 \in f(\text{int } \gamma)$

Това да $\Delta \arg(f(z) - w_1) = 0$

$\Rightarrow w_1 \notin f(\text{int } \gamma) \Rightarrow \text{X}$.

2.2) $\exists w_2 \in \Gamma, w_2 \in f(\text{int } \gamma)$. Т.к. $f(\text{int } \gamma) \in$ отворено множество, то $\exists$ ок-ост на w_2 ,

м.е. $\exists K(w_2, \delta) \subset f(\text{int } \gamma)$

Това да $\exists w_1 \in K(w_2, \delta), w_1 \in \text{ext } \Gamma$

$w_1 \in f(\text{int } \gamma)$,

което, както виждаме не е възможно (от 1))