

24.03.2014г.

КА-1ер.

Степенни редове. Формула на Коши-Адамар

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ М-мн. от точките на сходимост;
int M - област на сходимост;

• формула на Коши-Адамар:
Нека $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ Тогава

редът $\sum a_n z^n$ е абсолютно сходящ
за $|z| < R$ и $\in$ разх. за $|z| > R$

До-во: Имаме $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|$, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}$

и от критерия на Коши $\Rightarrow$ редът (1) $\in$
абс. сх. за $\frac{|z|}{R} < 1 \Leftrightarrow |z| < R$ и $\in$

разх. за $\frac{|z|}{R} > 1 \Leftrightarrow |z| > R$.

Сл.1: Областта на сходимост на ред (1)
е кръгът $K(0; R)$.

$K(0, R)$ ще нар. кръг на сходимост
на (1), а R ще нар. радиус
на сходимост.

Сл.2: (Лема на Абел):

Ако редът $\sum a_n z^n$ е сходящ в z_0 , то
той $\in$ абс. сх. в кръга $|z| < |z_0|$.



$$|z| < |z_0| \leq R$$

ϕ -ната на k -а не казва какво се случва по границата.

() е проверка

Сходимость по границата:

пр.: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R=1$ редът е разк. за $|z|=1$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $R=1$ и редът е абс. ск. за $|z|=1$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $R=1$, ск. за $z=1$ и разк. за $z=-1$! тогава,

$\phi(0) \in \text{ск.}$

на степенни

ТЕОРЕМА ЗА ДИФЕРЕНЦИРАНЕ
РЕДОВЕ:

ЛЕМА: | Редовете $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$,

$$f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n z^{n-2}, \dots$$

$$f_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot a_n z^{n-k}, \dots$$

к-раз
последително
диференциране

имам един и същи радиус на сходимост
Д-во: Достатъчно е за показане, че $R_{ск.} f = R_{ск.} f_1$ и след това по индукция

$R = R_{ск.} \text{ на } f$

$R_1 = R_{ск.} \text{ на } f_1$

Редовете f_1 и $zf_1(z \neq 0)$ имат

ЭДНН и союзе Дев.

0-1 ф-конт. На К.А. имаме, че

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n a_n!} \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n!} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = R_1$$

$$(*) \quad a_n z_0, b_n z_0, n=1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \overline{\lim} a_n b_n \leq \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n$$

В частности, ако $\overline{\lim} a_n = \lim a_n$, то

§ равенство, also $\overline{\lim} a_n = \lim a_n$, но $\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n \rightarrow$ также верно;

Т:1 ЗА ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА АЛГЕНТИНИ РЕЛОЖЕ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{c} \quad \text{Re} z = R > 0.$$

Тогда ϕ -эта $f(z) \in \text{голоморфна в } \mathbb{C}$

на сходимость

тогда $f(z) \in \text{голоморфна}$ в круге
 и сходимости $K(0, R)$ и
 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}, z \in K(0, R)$

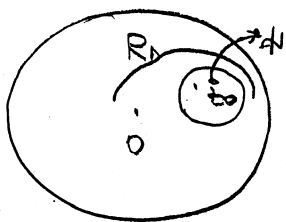
D-Bo:

① 3ag.

① 3ag. $\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = n z_0^{n-1} = (z - z_0) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} z_0^{k-1} \cdot z^{n-k-1}$

②) Если $z_0 \in \underbrace{K(0, R)}_{\infty}$ критична на Σ .
($|z_0| < R$)

Итак $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.



От миналата знаем, че R_{sk} на
е в R (т.е. има същия
 R_{sk} .)

Uname $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z^k - z_0^k)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k z_0^{k-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right] = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n \cdot z_0^{n-1} \right] =$$

$$\textcircled{1} = (z - z_0) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} k z_0^{n-1-k} \cdot z^{n-k-1}$$

Если есть $z \rightarrow z_0 \Rightarrow |z| < R_1 < R$

Тогда $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \varphi'(z_0) \right| \leq \leftarrow$ нужно

$$< |z - z_0| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot |z_0|^{n-1-k} \cdot |z|^{n-k-1} \leq$$

$$\leq |z - z_0| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot R_1^{n-2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= \frac{|z - z_0|}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| R_1^{n-2}$$

$\in \text{с.к.} \rightarrow M = \text{const}$

$$\leq \frac{M}{2} |z - z_0|$$

Значит (лемма) рядов $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot z^{n-2} \in$

абсол. с.к. $|z| < R$.

$$\rightarrow f'(z_0) = \varphi'(z_0)$$

Аналогично следует, что

$$\exists f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot z^{n-2} \quad \text{и т.д.}$$

$$\exists f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}$$

$$z \in K(0, R)$$

Обозначим тогда $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$ (лемма $n=k$)

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$



Теорема за единственост на степенни редове

Т.1 Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е степенен ред
с $R_{\text{ск}} = R > 0$.

Ако $0 \in \tau$ на събиране на нули
на $f(z)$, то $f(z) \equiv 0, z \in k(0; R)$.

т.е. $a_n = 0, n = 0, 1, \dots$

До-во. Да доп., че $f(z) \neq 0, z \in k(0; R)$. Тогава

$\exists s \geq 1$, така, че $a_0 = a_1 = \dots = a_{s-1} = 0, a_s \neq 0$
и $f(z) = a_s z^s + a_{s+1} z^{s+1} + \dots =$

$= z^s (a_s + a_{s+1} z + \dots) = z^s \cdot \varphi(z)$, което е

$\varphi(z) = a_s + a_{s+1} z + \dots$ има същия $R_{\text{ск}} = R$.

$[\varphi(z) \in \text{коломорфна в } k(0; R)]$

От Т.2 диф. $\Rightarrow \varphi(z) \in \text{коломорфна в } k(0; R)$

и значи $\in \text{непрерывна в } k(0; R)$.

$a_s \neq 0, \varphi(0) = a_s \neq 0$, по непрерывност.

$\exists \delta > 0$, т.че $\varphi(z) \neq 0, |z| < \delta$ (законност)

Но тогава $f(z) = z^s \cdot \varphi(z) \neq 0$ за

$\forall z: 0 < |z| < \delta$, което означава, че

0 не е т. на сг. на нули на f .

$\Rightarrow \text{ж.}$

Сл.1 (теорема за идентичност)
Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

са степенни редове с $R_{\text{ск}} = R > 0$.

Ако $0 \in \tau$ на сг. на множеството

$\{z \in k(0; R): f(z) = g(z)\}$, то

$f(z) \equiv g(z)$ в целия кръг $z \in k(0; R)$,

т.е. $a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \dots$

0-во: Прилагаме Тез единствеността за
функцията $f(z) - g(z) = \psi(z)$.

Гранична теорема на АБЕЛ (без 0-во)

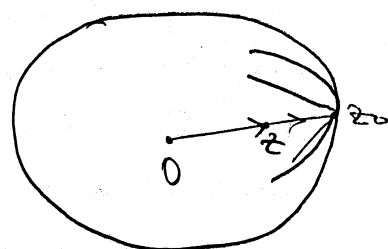
Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е степенен ред
с $R_{\text{сх}} = R > 0$.

и нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = S$ за т. $z_0 : |z_0| = R$
(от границата)

Тогав $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in [0, z_0]}} f(z) = S$.

! $\rightarrow$

теоремата
използва за
сумиране на тригонометрични
редове.



не трябва
да клони
по отр.

Функциите e^z , $\sin z$, $\cos z$

е имаме само 2 елементарни
функции e^z и e^{-z} .

I. e^z

$$\text{Д.1 } e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$R_{\text{сх}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ $\Rightarrow e^z \in \text{голоморфна в } \mathbb{C}$,
- 6 - т.е. $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

$$(e^z)' = e^z, \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{от } T_3 + \text{диф.})$$

свойства: 1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

Лема: Ако $f \in \text{голоморфна}$ в област D и $f'(z) = 0, z \in D$.

Тогато $f(z) = \text{const.}$

$$\rightarrow (f = u + i \cdot v, f' = 0 \Leftrightarrow u_x = u_y = v_x = v_y = 0)$$

Да разгледаме ф. $f(z) = e^z \cdot e^{a-z}$. Тък $\in$ уна ф. и $f'(z) = e^z \cdot e^{a-z} - e^z \cdot e^{a-z} = 0$
 $z \in \mathbb{C}$.

Лема $\Rightarrow f(z) = \text{const} = f(0) = e^a, z \in \mathbb{C}$, т.е.
 $e^z \cdot e^{a-z} = e^a, \forall a, z \in \mathbb{C}$.

Положиме $z = z_1, a = z_1 + z_2$ и получаваме
 $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

2) $e^z \neq 0$, защото $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} 3) z = i \cdot y, \quad e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= \cos y + i \cdot \sin y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \cdot \sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i \cdot \sin y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{aligned} \quad (\text{Оукер})$$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1} \quad \leftarrow \text{Ейлерово}$$

4) $z = x + i \cdot y, \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \cdot \sin y)$
-7-

$$|e^z| = e^x, \text{ арг } e^z = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

5) e^z — периодична ф-ция с основным периодом $2\pi i$.

Доказ:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} e^{z+2k\pi i} &= e^{x+i(y+2k\pi)} = e^x \cdot e^{i(y+2k\pi)} = \\ &= e^x (\cos(y+2k\pi) + i \sin(y+2k\pi)) = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned}$$

② Если ω — период на e^z , т.е. $e^{z+\omega} = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

В частности при $z=0$ $e^\omega = 1$. Если $\omega = u + i.v$ тогда $e^\omega = 1 \Leftrightarrow e^u \cdot e^{i.v} = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^u (\cos v + i \sin v) &= 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^u \cos v = 1 \\ e^u \sin v = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin v = 0 \Rightarrow v = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow e^u \cos(n \cdot \pi) = 1$$

$$\Leftrightarrow e^u \cdot (-1)^n = 1$$

$$\Rightarrow n = 2k \quad \text{и} \quad u = 0.$$

$$\Rightarrow v = 2k\pi \Rightarrow \omega = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

~~~~~>



25.03.

Г-нуето  $e^z = c$ ,  $c \in \mathbb{C} \setminus 0$ Нека  $c = z \cdot e^{i\varphi}$ ,  $z = |c|$ ,  $\arg z = \varphi$ и  $z = x + iy$ . Тогава

$$e^z = c \Rightarrow e^x \cdot e^{iy} = z \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow |e^x| = z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \ln z \\ y = \varphi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln z \\ y = \varphi + 2k\pi \end{cases}$$

$$z = \ln z + i(\varphi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

пр.:  $e^z = 1$ 

$$z = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Изображението  $w = e^z$ 1) Тъй като  $(e^z)' = e^z \neq 0, z \in \mathbb{C}$ ,изобр.  $w = e^z$  е конформно  $\forall z \in \mathbb{C}$ .4)  $w = e^z$  не е еднозначно:  $e^{z+i2k\pi} = e^z, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}$ .

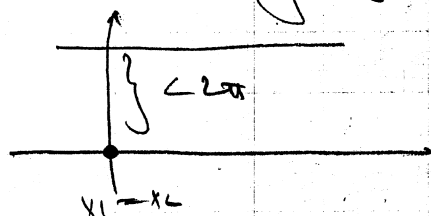
3) Области на еднозначност.

(f е еднозначна в D, ако  $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ )  
т.е. интервал.Нека  $z_1 \neq z_2$  и  $e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow e^{x_1+iy_1} = e^{x_2+iy_2}$ 

$$\Rightarrow e^{x_1} \cdot e^{iy_1} = e^{x_2} \cdot e^{iy_2}$$

$$\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \text{ и } y_1 - y_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

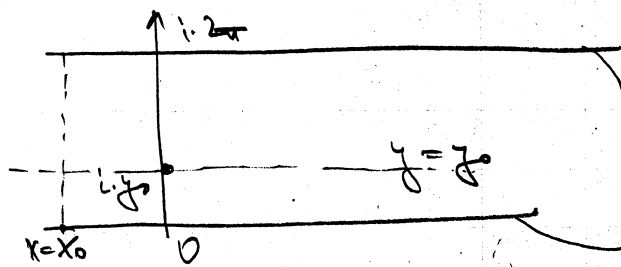
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ и } y_1 - y_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



+ горизонтална ивица

$$S_{a,b} = \{z: a < \operatorname{Im} z < b, b-a < 2\pi\}$$

4) Взимане ивицата  $S_{0,2\pi} = \{z: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$   
↓  $e^z$   
?

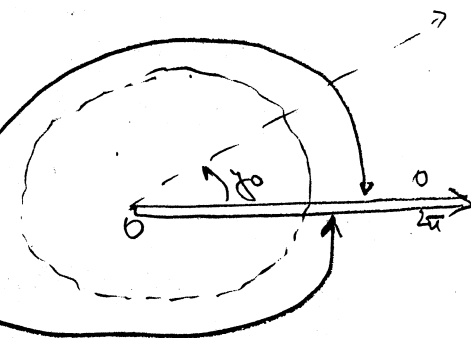


$$\{y=y_0\} \xrightarrow{w=e^z} w = e^x \cdot e^{iy_0}$$

$z = x + iy_0$

имат 1 и  $\infty$  аргумент, а модуль от 0 до  $\infty$ .

$$w = e^z$$

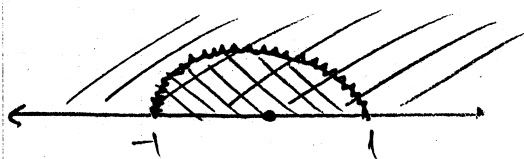
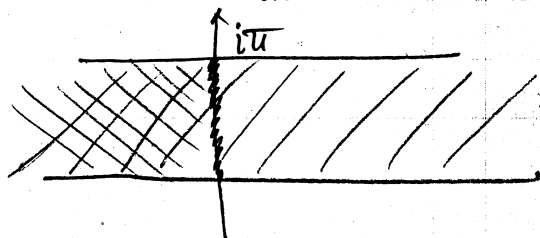


$$\{x=x_0\} \xrightarrow{w=e^z} e^{x_0} \cdot e^{it} \rightarrow \text{окрестность без } t=x_0.$$

$0 < y < 2\pi$

$\rightarrow S_{0,2\pi} \xrightarrow{e^z} \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$

о симметрии:



$e^z$  управляет тупебу тону.

$$\sin z, \cos z$$

$$\text{Def } \cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$\text{Re} z = \pi$   $\approx \sin z, \cos z$   $\approx$   $\text{гену } \phi$ - $\text{гену}$ .

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

} 0  $\forall z \in \mathbb{C}$

об.ба:

1)  $\sin z, \cos z$  — периодичны — с пп. период  $2\pi$ .

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \cos(z + 2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} + e^{-i(z+2k\pi)}}{2} = \\ &= \frac{e^{iz+12k\pi} + e^{-iz+12k\pi}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \end{aligned}$$

2) Если  $\omega$  — период на  $\cos z$ , т.е.

$$\cos(z + \omega) = \cos z, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\text{Пу } z=0 \Rightarrow \cos \omega = 1 \Leftrightarrow e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2$$

$$\Leftrightarrow (e^{i\omega})^2 - 2e^{i\omega} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{i\omega} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{i\omega} = 1 \Rightarrow \omega = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3) Найдите (самое  $\omega$  — периодический)  $\sin z, \cos z$ .

$$\textcircled{1} \sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}$$

$$\Leftrightarrow e^{i2z} = 1 \Leftrightarrow 2z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(т.е. наименьший период)

$$\textcircled{2} \cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i(\pi - z)}$$

$$\Leftrightarrow e^{i(z - \pi + z)} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{i(2z - \pi)} = 1$$

$$\Rightarrow 2z - \pi = 2k\pi$$

$$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

~~~~~>

б) У-ието $\cos z = c$ ($\sin z = c$), $c \in \mathbb{C}$
има безброј. мн. функции.

$$\begin{aligned}\cos z = c &\Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2c \quad | \cdot e^{iz} \\ &\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2c \cdot e^{iz} + 1 = 0 \\ (e^{iz})_{1,2} &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 1}}{1} \neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{iz} &= A \Rightarrow i \cdot z = \ln |A| + i(\arg A + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow z = \arg A + 2k\pi - i \ln A, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(= можните на $\sin z$ и $\cos z$ не се одзастапени).

К.Р. 1) дадена $\in \mathbb{C}$. Да се провери дали е корен;
2) да се воспостави функција;

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{1(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - 1}{e^{iz} + 1}.$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \cdot \frac{e^{iz} + 1}{e^{iz} - 1}$$

$\operatorname{tg} z \in \text{корен. в } \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$
 $\cot z \in \text{корен. в } \mathbb{C} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

функција на Хукерски $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} \right) \quad \rightarrow \text{профи на кривото.}$$

функцията $\log z$

Д.1 Всякое решение на y -то

$$e^w = z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus 0$$

Наричане
Ако $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$$\log z = \ln z + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\log z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

np.: $\log 1 = i2c\pi, \forall c \in \mathbb{Z}$.

$$\log(-1) = i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\log \left(\frac{1}{-1} \right) = i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

$$\log(-i) = i \left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$$

Св-Ба на $\log z$:

1) $e^{\log z} = z.$

4) $\log e^z = z + i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

3) $\log z_1 \cdot z_2 = \log z_1 + \log z_2$ " " като съвпадение на множества

4) $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$ $\therefore u = \dots \dots \dots$

Ap.: $\log 1^2 = \log 1 + \log 1$

$$\log(-1)^2 = \log(-1) + \log(-1)$$

$$\rightarrow \log 1 + \log 1 = \log(-1) + \log(-1)$$

$$? \rightarrow 2 \log 1 = 2 \log (-1)$$

$$\log N = \log fN!$$

$$\times \int i 2 \pi = i (2\ell + 1) \pi$$

D: | Нека $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е област и
 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$.

т.е. f е еднозначен клон на $\log z$
 в D , ако f е непр. ф. в D и
 $e^{f(z)} = z, z \in D$.

T1: | Нека $f_0: D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е
 един еднозначен клон на $\log z$ в D .
 Тогава $\forall$ еднозн. клонове на $\log z$
 в D са $f_0(z) + i \cdot 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D-во: 1) Ясно е, че $f_0 + i \cdot 2k\pi$ е еднозн.
клон на $\log z$ в $D, \forall k \in \mathbb{Z}$.

2) Нека $f_1: D \rightarrow \mathbb{C}$ е еднозн. клон
 на $\log z$ в D .

Уваме, че $e^{f_1(z)} = z = e^{f_0(z)}, z \in D$
 $\Rightarrow e^{f_1(z) - f_0(z)} = 1, z \in D$

$\Rightarrow f_1(z) - f_0(z) = i \cdot 2k(z)\pi, k(z) \in \mathbb{Z}, z \in D$.

$\Rightarrow k(z) = \frac{f_1(z) - f_0(z)}{2i\pi}$. Т.к. $k(z)$ е непр. в D

и D е област (свързано н.м.), то $k(D)$
св.м. $\in$ св. н.м.

Но $k(D) \subset \mathbb{Z}$. Това е възможно, само
 ако $k(D) = \{0\}$,

т.е. $k(z) \equiv 0, \forall z \in D \Rightarrow f_1(z) = f_0(z) + i \cdot 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

T2: | Ако $f: D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е еднозн. клон
 на $\log z$ в D , то f е голоморфна ф. в D
 и $f'(z) = \frac{1}{z}, z \in D$.

без D-во.

1) Ако $\alpha \in \mathbb{N}$, $z^n = e^{n \cdot \log z} = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ пъти}}$

2) Ако $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$, $\alpha = -n$

$$z^{-n} = \underbrace{\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z}}_{n \text{ пъти}}$$

3) Ако $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$

$p, q \in \mathbb{Z}$, $[q > 0, (p, q) = 1]$
всичко просто

$e^{i \frac{2p}{q} \pi t}$ → приема q на стъпки степенности.
 $z^{\frac{p}{q}}$ е q -значна

4) $\alpha \notin \mathbb{Q}$

Да доп. че $\exists k_1, k_2$: $e^{i 2k_1 \pi t} = e^{i 2k_2 \pi t}$

$\Rightarrow e^{i 2(k_1 - k_2) \pi t} = 1 \Leftrightarrow i 2(k_1 - k_2) \pi t = i 2k \pi$

$\Rightarrow \alpha = \frac{k}{k_1 - k_2} \in \mathbb{Q}$ — ѝ.

$\Rightarrow e^{i 2 \alpha \pi t}$ приема безброй мн. пъти
 $\Rightarrow z^\alpha$ е безброй-значна

