

24.02.2014г.

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ

ТЕКУЩ КОНТРОЛ

4 КОНТР.

(20')

$\times 10\tau = 40\tau$

1 КОНТР.

(30')

$\times 25\tau = 25\tau + \text{ТЕОРИЯ}$

КРАЕН ИЗПИТ

$\times 35\tau = 35\tau$

100τ

50τ. ЗА ОЦЕНКА (3)

КРАЕН ИЗПИТ : ТЕОРИЯ - 2 ВОПРОСА;

Примери:

1) Защо $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ е сходящо само в $(-1; 1)$?

$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$
безкр. диференц.

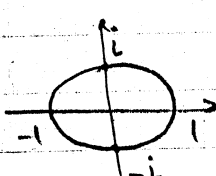
$f_1(x) = 1 - x + x^2 - \dots, -1 < x < 1$

$R_x = \text{dist}(0, -1)$ разулс на ек.

$f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f_2(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots, -1 < x < 1$

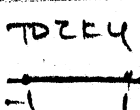
$x \rightarrow z$
 $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots, |z| < 1$



$R_x = 1 = \text{dist}(0, i) = \text{dist}(0, -i)$

$z = \pm i$ - особени точки

Ако преект. Ашет кръг в $\mathbb{R}$, получаване



2) Една задача от ТЧ:

Може ли $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ да се раздели на краен брой (непремитающ се) аритметични прогресии с различни разлики.

! чети и нечетни!

Да допуснем, че $N = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ т.е. $\in$ възможна

$$S_k = \{a_k, a_k + d_k, \dots\} \quad k = 1 \div n$$

$$S_k \cap S_e = \emptyset \quad k \neq e$$

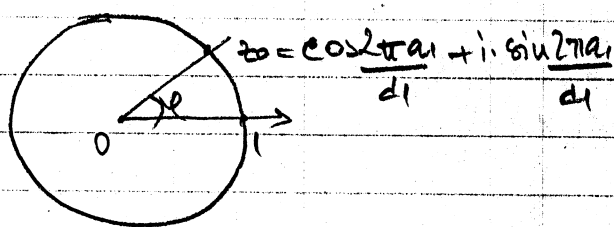
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{j \in S_1} z^j + \sum_{j \in S_2} z^j + \dots + \sum_{j \in S_n} z^j \quad \rightarrow \text{краен бр.}$$

геометрична прогресия ($z^{a_k}, q = z^{d_k}$)

$$\frac{1}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \dots + \frac{z^{a_n}}{1-z^{d_n}}$$

д.о. $d_1 = \max(d_1, d_2, \dots, d_n)$

граничен преход:



$$|z| = 1$$

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\varphi = \angle(\vec{z}; \vec{Ox})$$

Нека $z \rightarrow z_0$ ($z = \gamma z_0, 0 < \gamma < 1, \gamma \rightarrow 1$)

Тогави $\frac{1}{1-z_0} = \frac{1}{1-z_0} + \dots + \frac{z_0^{a_k}}{1-z_0^{d_k}} + \dots$

↓

∞

$$z_0 \neq 1, k \neq 1$$

$$\text{линт } z_0 = \cos \frac{2\pi a_1}{d_1} + i \sin \frac{2\pi a_1}{d_1}$$

$\rightarrow \dot{x}$, т.е. отпаво има крайна граница,
отдосно ∞ + крайна пр.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \rightarrow \text{разлагане на по-прости} \\ \text{рац. ф-ции}$$

литература: 1. Т. Арпирова - теория на аналитични
те ф-ции.

2. Компл. анализ - ръководство
(Хаджийско)
 $\downarrow$
електронен вариант.

Комплексни числа

$$x^3 = 15x + 4$$

Кардано: $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$

$$\text{D.1 } \mathbb{C} = \{ (a, b), a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$1. (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

$$2. (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$3. (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

затова е
във везето
това уни.

Тв.1 $\mathbb{C}, +, \cdot$ е поле.

e единица отн. + $(0, 0)$
отн. $\cdot$ $(1, 0)$

○ Обратен ел. на (a, b) отн. + $(-a, -b)$
отн. $\cdot$ $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$

$$\mathbb{C}_R = \{ (a, 0), a \in \mathbb{R} \} \quad - \text{подле}$$

$\mathbb{C}_R$ е изоморфно на $\mathbb{R}$

$$\mathbb{C}_R \cong \mathbb{R}$$

$$(a, 0) \mapsto a \quad \Rightarrow (a, 0) := a$$

$$i = (0, 1), \quad i \cdot i = -1 = i^2$$

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$$

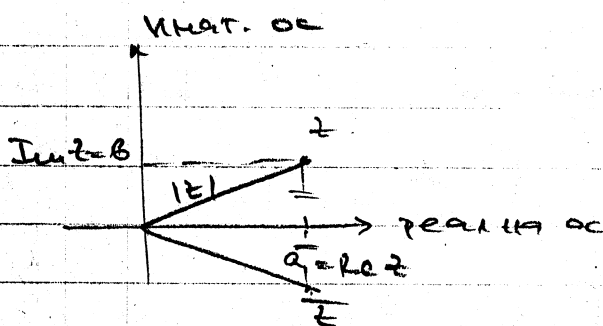
$$\rightarrow z = a + i \cdot b \quad (a + bi) \rightarrow \text{алгебричен елемент на комп. числа}$$

$\mathbb{C}$ не наследува поредбата в $\mathbb{R}$.
 $\leq, \geq, >, <$ в $\mathbb{C}$ не са с смисъл!

пр.: 1) Ако $i > 0$, то $i \cdot i > i \cdot 0 = -1 > 0$!
 2) Ако $i < 0$, то $i \cdot i > i \cdot 0 = -1 > 0$!

Геом. интерпр.:

$$\mathbb{C} = \{ z = (a, b), a, b \in \mathbb{R} \}$$



$$\text{озн.: } z = a + i \cdot b \quad \bar{z} = a - i \cdot b$$

$$a = \text{Re } z$$

$$b = \text{Im } z$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z + \bar{z} = 2 \text{Re } z \Leftrightarrow \text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$z \equiv \mu \equiv \overrightarrow{OM}$$

$$z - \bar{z} = 2i \text{Im } z \Leftrightarrow \text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

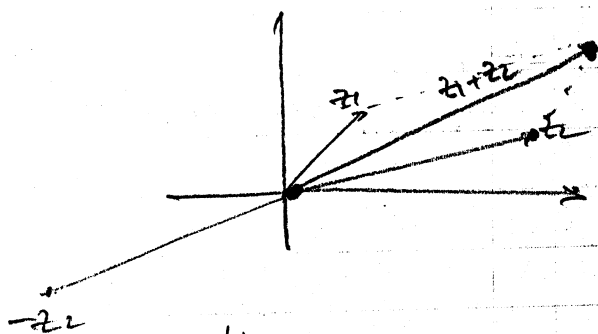
$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

○ $\mathbb{C}$ — комплексна равнина: $\mathbb{C}$

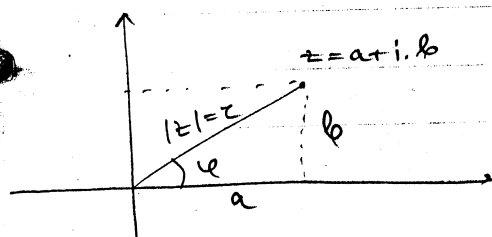


Нер. на Δ -ка (разг. $0, z_2, z_1+z_2$)

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Тригонометричен вид:



$$\varphi = \angle(\vec{z}, \vec{Ox}) = \arg z \quad \text{— аргумент}$$

$$a = r \cdot \cos \varphi$$

$$b = r \cdot \sin \varphi$$

$$z = z(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

○ Ако φ е аргумент на z , то $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ също е аргумент на z .

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi}$$

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\varphi+\alpha)}$$

$$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\varphi-\alpha)}$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$$

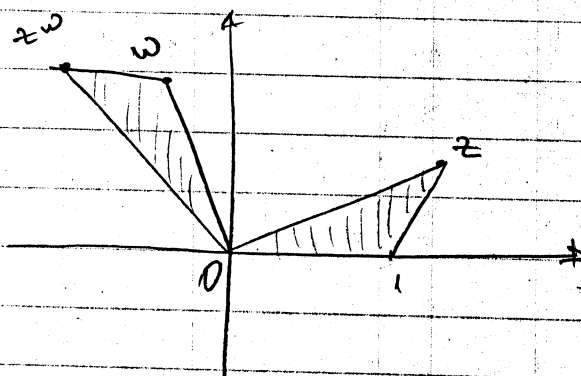
$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi \quad \text{— ф-ла на Ойлер}$$

Пр.: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $w = \rho \cdot e^{i\theta}$

$z = w \Leftrightarrow r = \rho$ и $\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z \cdot w = r \cdot \rho \cdot e^{i(\theta + \varphi)}$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ и $\arg z w = \arg z + \arg w$!
 мн. от числа мн. от числа.



$\Delta(0, 1, z) \sim \Delta(0, w, zw)$

Главен аргумент: $\arg_0 z \in (-\pi; \pi]$

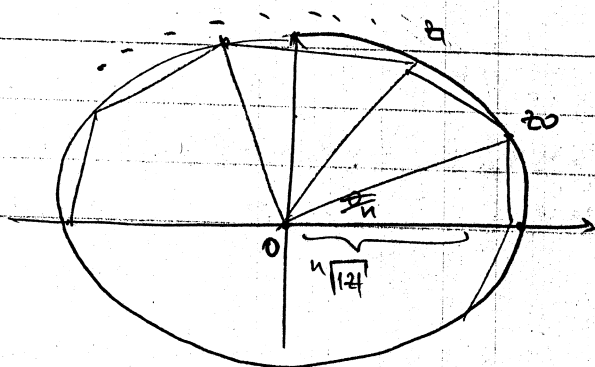
Уравнението $z^n = c$, $c \in \mathbb{C}$

$c = \rho \cdot e^{i\theta}$, $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$\Rightarrow z^n \cdot e^{in\varphi} = \rho \cdot e^{i\theta} \Leftrightarrow z^n = \rho$
 и $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Ф-ла на Моавръ.

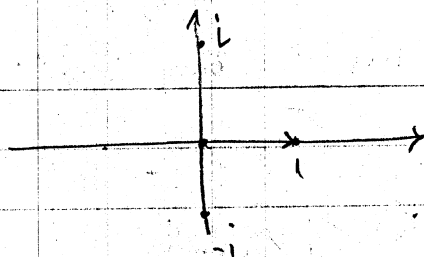


$z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \Rightarrow$ правилен n -ъгълник,
 вписан в окр. с ц. 0 и $R = \sqrt[n]{\rho}$

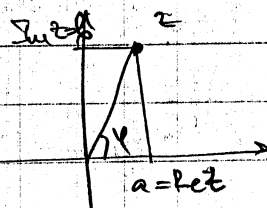
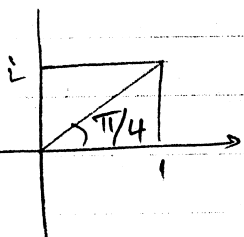
Def. $\arg 1 = ? = 0$

$\arg i = \pi/2$

$\arg(-i) = -\pi/2$



$1+i = ? = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$



$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$

$\sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$

РЕДИЦИ И РЕДОВЕ ОТ КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА

Def. 1 Окръжност на $z_0 \in \mathbb{C}$ нар. всеки кръг
 $K(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| < r \}$



Def. За редица, подредица, точка на събиране, основни свойства са както в $\mathbb{R}$.

Def. 1 $\{ z_n \in \mathbb{C} \}_{n=1}^{\infty}$ $z_n \rightarrow z_0$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$),

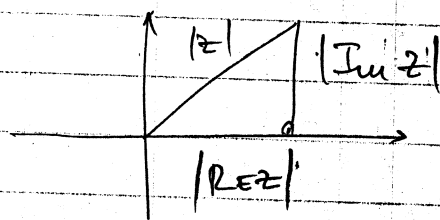
ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) : |z_n - z_0| < \varepsilon, n > \nu$

($\Rightarrow z_n \in K(z_0, \varepsilon)$ при $n > \nu$)

Критерий на Коши

$\{ z_n \}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) :$
 $|z_m - z_n| < \varepsilon, \forall m, n > \nu$

ТБ.1 $z_n \rightarrow z_0$, то $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z_0$
 $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z_0$



ТБ.2: Ако $z_n = |z_n| \cdot e^{i\varphi_n}$ ($\varphi_n \in$ фиксирати аргумент на z_n)
 и $|z_n| \rightarrow \rho$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$,
 то $z_n \rightarrow \rho \cdot e^{i\varphi_0} = z_0$.

Обратно: Иста $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$, $z_n = |z_n| \cdot e^{i\varphi_n}$, $\varphi_n = \arg z_n$
 Тогда $|z_n| \rightarrow |z_0|$ ($||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$);

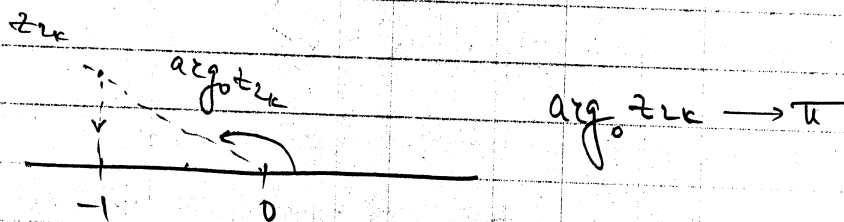
то $\{\varphi_n\}$ може да е разходяща, или
 ако е сходяща може лимит $\neq \arg z_0$.

Но да ли $\{\varphi_n\}$ е с.к.? Да ли, ако е с.к. $\varphi_n \rightarrow \arg z_0$?

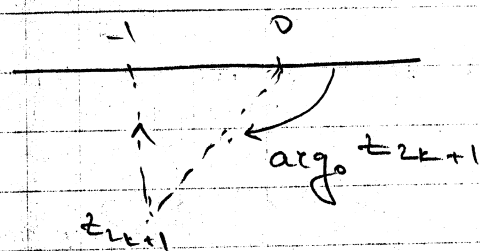
Пр.1) Пазн. $z_n = -1 + i \cdot \frac{(-1)^n}{n}$

z_n е с.к. и $z_n \rightarrow -1$

ако $n = 2k \rightarrow z_k = -1 + i \cdot \frac{1}{2k}$



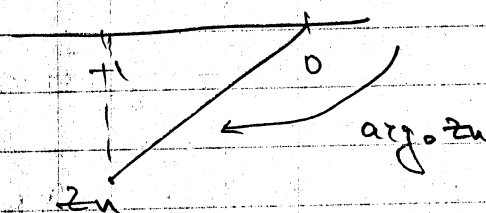
ако $n = 2k+1$
 $z_{k+1} = -1 - i \cdot \frac{1}{2k+1}$



$$\arg z_{k+1} \rightarrow -\pi$$

$\{ \arg z_n \} \in \mathbb{R}$ и, защото показваме, че има 2 подреди, които са сума.

Пр. 2) $z_n = -1 - i \cdot \frac{1}{n}$



$$z_n \rightarrow -1$$

$$\arg z_n \rightarrow -\pi \neq \pi = \arg(-1)$$

$$(\arg z \in (-\pi, \pi])$$

Но в случая е следното поведение:

Тв: Нека $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$ и $\varphi_0 \in \text{фиксиран аргум.}$
 на z_0 (т.е. с минимален и максимален арг.)

Тогава ако изберем аргумент
 $\arg z_n \in (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi], n = 1, 2, \dots$

То $\arg z_n \rightarrow \varphi_0$.

Д-во: в ръководството.

Как да изберем φ в примерите, така че резултатът да е сума с π ?

Д: Т. на ет.

Т. $z_0 \in \text{точка на събиране на } \{z_n\},$
 ако $\forall \varepsilon > 0, \exists K(z_0, \varepsilon) = \{ |z - z_0| < \varepsilon \}$ и

безбройно много z_n (т.е. $z_n \rightarrow z_0$)

Тв: z_0 е т. на сг. на $\{z_n\}_1^\infty \iff$

$\exists$ подредица $\{z_{n_k}\}_k: z_{n_k} \rightarrow z_0$.

Т: Болцано - Вейерштрас

Всяка ограничена редица има
сходяща подредица
($\Rightarrow$ има точка на събиране)

Редове от комплексни числа

$\{z_n\}_1^\infty$ $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$, $\sum_{n=1}^\infty z_n$ - ред

В: $\sum_1^\infty z_n \in \text{ск.}$, ако $\{s_n\}_1^\infty$, $s_n = \sum_{k=1}^n z_k \in$
сходяща.

редът от парциалните суми

Критерий на Коши:

Редът $\sum_1^\infty z_n \in \text{ск.} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon)$

т.е. $|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu$

$\Rightarrow$ Ако $\sum_1^\infty z_n \in \text{ск.}$, то $z_n \rightarrow 0$.

В: $\sum z_n$ е абс. ск., ако $\sum_1^\infty |z_n| < +\infty$.

Ако $\sum z_n \in \text{абс. ск.}$, то то $\in \text{ск.}$

Критерий на Коши за сходимост:

○ Нема $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \text{абс. с.к.}$ при $l < 1$ и ∞ разходен при $l > 1$.

○ Топология в $\mathbb{R}$
 $\mathcal{U} \in \tau$ разл. + видове множества: отворени, затворени, компактни и свързани ит.

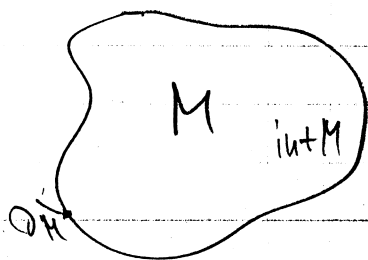
X, τ — свързаност от подн. на X

-
- 1) $X, \emptyset \in \tau$
 - 2) Ако $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A$,
 то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.
 - 3) Ако $U_k \in \tau, k=1, \dots, n$ — краен бр.,
 то $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau$

τ — се въвеки топология в X ,
 (X, τ) е нар. топологично пр-во.
 Множествата, $\mathcal{C}$ формират τ , т.е. $U \in \tau$,
 е нар. отворени множества.

○ Def | Нема $M \subseteq \mathbb{R}$. Т. $z_0 \in \mathbb{R}$ се нарича:

1. вътрешна т. на M , ако $\exists K(z_0, \varepsilon) \subset M (z_0 \in M!)$;
2. външна т. на M , ако $\exists \varepsilon (z_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus M$;
3. гранична т. на M , ако $\forall \varepsilon > 0$ има точки от M и от $\mathbb{R} \setminus M$.



ин. $\text{int} M = \{ \text{вътр. точки на } M \}$

$\text{ext} M = \{ \text{външ. точки на } M \}$

$\partial M = \{ \text{гранични т. на } M \}$

Тоест $\mathbb{C} = \text{int} M \cup \text{ext} M \cup \partial M$.

Д: | Пробита околност на τ .

○ околност

$$K'(z_0, \varepsilon) = \{ 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$$

(крота без z_0)

○ z_0

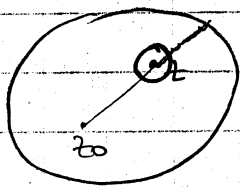
Д: | K , че τ . $z_0 \in \tau$ на сг. на M , ако
всѐ $\neq$ пробита ок-ст. на z_0 има точка на M .
 ($\rightarrow$ вѐв $\neq$ пробита ок-ст. на z_0 има $\delta \in \{ \text{бр. н.н.}$

точка
на M

Точките ○ не са точки на сг. се нар.
изолирани точки.

(Пр. $1, 1, 1, 1, \dots, 1$ ред. $\rightarrow$ 1 τ на сг.
 $1 \in$ изолация τ .)

Примери: 1) $M = K(z_0, \varepsilon)$



$M \cup \{ \text{точки на сг. на } M \} = \overline{M}$
 $\downarrow$
затворена обвивка на M

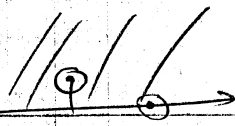
затвореността $\text{int} M = M = K(z_0, \varepsilon)$
 $\text{ext} M = \{ z : |z - z_0| > \varepsilon \}$

$$\partial M = \{ |z - z_0| = \varepsilon \} = \text{сг.}(z_0, \varepsilon)$$

$$\overline{M} = \{ |z - z_0| \leq \varepsilon \}$$

всѐка вътр. $\tau \in \tau$ на сг. $\neq$ τ от границата сг. на сг.

2) $M = \{ \operatorname{Im} z \geq 0 \}$



• вогнуты ли?

$\operatorname{int} M = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$

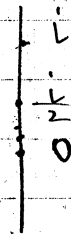
$\operatorname{ext} M = \{ \operatorname{Im} z < 0 \}$

$\partial M = \{ \operatorname{Im} z = 0 \}$

$\overline{M} = M = \{ \operatorname{Im} z \geq 0 \}$

3) $M = \{ i, \frac{i}{2}, \dots, \frac{i}{n}, \dots \}$

$\operatorname{int} M = \emptyset$



! вогнут. и. - точка + линия ос-ст
да вогнуте!

$\operatorname{ext} M = \mathbb{C} \setminus M$

$\partial M = M \cup \{0\}$

$\overline{M} = M \cup \{0\} = \partial M$

4) $M = \{ z \in \mathbb{C} : z = x+iy, x, y \in \mathbb{Q} \}$

$\operatorname{int} M = \emptyset$

$\operatorname{ext} M = \emptyset$

$\partial M = \overline{M} = \mathbb{C}$

ТЗ: $\overline{M} = M \cup \partial M = \operatorname{int} M \cup \partial M$

Д: Отворено ии.

$M \subseteq \mathbb{C}$ е нар. отворено, ако всичките

• му точки са вътрешни, т.е. $M \subseteq \operatorname{int} M$
($\Rightarrow M$ е отворено $\Leftrightarrow M \subseteq \operatorname{int} M$)

- Пр.:
- 1) $\mathbb{C}$ - отворено мн.
 - 2) $\emptyset$ - отворено
 - 3) $K(z_0, \varepsilon) = \{ |z - z_0| < \varepsilon \}$ - отворено
 - 4) $M = \{ \operatorname{Im} z \geq 0 \}$ - не е отворено

11/6/

5) Произв. околност $\rightarrow$ е отворено
 $K'(z_0, \varepsilon) = \{ 0 < |z - z_0| < \varepsilon \} \rightarrow$

Тв.: 1) Ако $U_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ са отворени множества
 $(\alpha \in A)$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено мн.

2) Ако $U_k, k=1, 2, \dots, n$ са краен бр.
отворени мн., то $\bigcap_{k=1}^n U_k$ е отворено мн.

Пр. към 2) $K(0, \frac{1}{k})$ - отворено мн. $\forall k \in \mathbb{N}$

Но $\bigcap_{k=1}^{\infty} K(0, \frac{1}{k}) = \{0\}$ не е отворено.

Д.: $M \subseteq \mathbb{C}$ се нар. затворено мн., ако

$\mathbb{C} \setminus M$ е отворено мн.

Тв.: M е затворено $\Leftrightarrow M$ съдържа
всичките си точки на събиране,
т.е. $\overline{M} \subseteq M$.
 $\leftarrow (M \text{ е затв.} \Leftrightarrow M = \overline{M})$

Тв.: Една точка z_0 е т. на сл. на $M \subseteq \mathbb{C}$
 $\Leftrightarrow \exists$ редица $\{z_n \in M, z_n \rightarrow z_0\}$.

○ Тв: M — з.т.в. $M \subseteq \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{от } \begin{cases} z_n \in M \\ z_n \rightarrow z_0 \\ z_0 \in M \end{cases}$

Примери:

1) $\emptyset$ — затворено

2) $\emptyset$ — затворено

3) $K(z_0, \varepsilon) = \{ |z - z_0| \leq \varepsilon \}$

○

затворено.

4) $\{ \operatorname{Im} z = z_0 \}$

//////
○

затворено

т.е. $z_0 \in \mathbb{C}$ — произволно, $\operatorname{Im} z_0 \in \mathbb{R}$ — произволно

5) $\{ 0 < |z - z_0| \leq 1 \}$

○

$z_0 \in \mathbb{C}$ — затворено;

$z_0 \in \mathbb{C}$ — отворено;

○ Тв: 1) Ако $V_k, k=1, \dots, n$ са затворени мн., то $\bigcup_{k=1}^n V_k$ е затворено.

2) Ако $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}, \alpha \in A$ са затворени мн., то

$\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ е затворено мн.

Пр. към 1): $V_n = \{ \operatorname{Re} z \geq 1/n \}$

↑
//
1/n
//

$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \{ \operatorname{Re} z > 0 \}$

отворено.

Компакт в $\mathbb{C}$

Д: $M \subset \mathbb{C}$ — компакт, ако M е ограничено и затворено.

Пример: 1) $M = K(z_0, \varepsilon)$ ограничено, но отворено
 $\neg \underline{M} \in \text{компакт.}$

2) $M = \{ \operatorname{Re} z \geq 0 \}$ — $\underline{M} \in \text{компакт}$, т.к.
 M е отк.

3) $\mathbb{C}$ $\underline{M} \in \text{компакт}$, т.к. M е отк.

4) $\emptyset$ — компакт

5) $\overline{K(z_0, \varepsilon)} \in \text{компакт.}$