

13.05.2014г.

LA - лек.

Примери:

1) z_0 е прост нултус на f

$$\text{Res}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

$f = \frac{\psi}{\varphi}$ $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0$
 $\varphi'(z_0) \neq 0$

$$\text{Res}(z_0) = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}$$

2) z_0 е m -кратен нултус, $m \geq 2$.

$$\text{Res}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left[(z - z_0)^m \cdot f(z) \right]^{(m-1)} \Big|_{z=z_0}$$

2) $f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z(z+1)^2}$

окобени точки: $-1, 0$.

-1 е двукратен нултус, 0 е прост нултус.

$$\text{Res}\left(\frac{z^2 + z + 1}{z(z+1)^2}; 0\right) = \frac{z^2 + z + 1}{(z+1)^2} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res}(f, -1) = \left((z+1)^2 \cdot \frac{z^2 + z + 1}{z(z+1)^2} \right) \Big|_{z=-1}$$

$$= \frac{(2z+1) \cdot z - (z^2 + z + 1)}{z^2} \Big|_{z=-1} = \frac{2z^2 + z - z^2 - z - 1}{z^2} \Big|_{z=-1} = \frac{z^2 + 1}{z^2} \Big|_{z=-1} = 0$$

б ∞ : $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 = \frac{1+z+z^2}{z^2}$

$$\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} + 1\right)^2 = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z}$$

$$= \frac{z^3 + z^2 + z}{z^2 + 2z + 1} \in \text{холоморфна в } \infty.$$

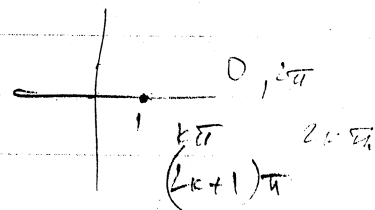
$$\Rightarrow f \in \text{холоморфна в } \infty.$$

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

$$f(\infty) = 0$$

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_1 = -\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 1.$$

$$3) f(z) = \frac{\sin z}{z^2(1 - \cos z)}$$



особ. точки:

$z=0$ — трикратен полюс,

$z=2k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \dots$ — простые полюсы.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Правую часть не используем!

$$\operatorname{Res}(f, 0) = ?$$

$$f(z) = \frac{z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right)}{z^2 \cdot z^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right)} = \frac{1}{z^3} \cdot g(z).$$

$g(z)$ — голоморфна в 0

$$\text{Нека } g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

този коеф. ни трябва.

$$\text{Тогава } f(z) = \frac{1}{z^3} g(z) = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \dots$$

$$a_2 = ?$$

$$\text{Числ. } 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right)$$

$$z^0: 1 = \frac{a_0}{2} \Rightarrow a_0 = 2$$

$$z^2: -\frac{1}{3!} = -\frac{a_0}{4!} + \frac{a_2}{2}$$

$$z^1: 0 = \frac{a_1}{2} \Rightarrow a_1 = 0$$

$$= a_2 = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) \cdot 2 = -\frac{1}{6}$$

○ $\text{Res}(z^n) = \frac{2}{4z^2 - 2} ; \text{Res}(\infty) = ?$
 ∞ карбоа $\in ?$

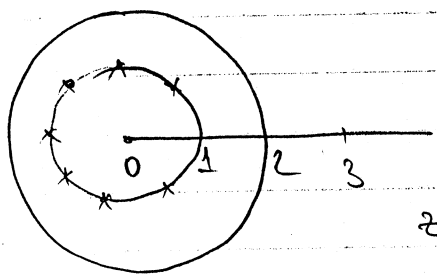
Ако $f \in \text{holomorphic}$ в $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$,
 то $\sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0$.

Да се пресметнете:

○ $\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(z-3)(z^n-1)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(z_k) =$

$= -2\pi i (\text{Res}(3) + \text{Res}(\infty)) = \dots =$

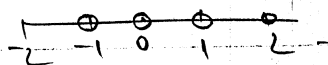
$= \frac{2\pi i}{1-3^n}$



$z_k = e^{i \frac{2\pi k}{n}}$

Разлагане на $\cotg \pi z$ в рз от елементарни
 ф-ции

○ Тв: $\pi \cotg \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right)$
 за $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.



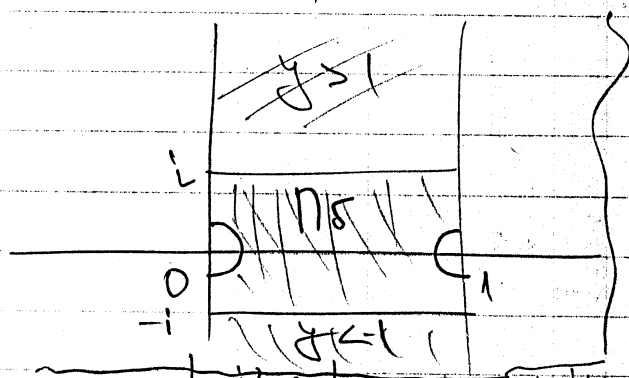
Доказателство:

Нека $\delta > 0$: $K(n, \delta) \cap K(m, \delta) = \emptyset, n, m \in \mathbb{Z}$
 и $D_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} K(n, \delta)$

Тогато $|\cotg \pi z|$ е ограничена в D_δ .

○ Доказателство:

Тогда как $\cotg \pi z$ — периодична с периодом 1, то $\cotg \pi(z+1) = \cotg \pi z$, по Дюаме. $\in$ да дока. ограниченность в $D\delta \cap \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. Имеем, что



$$|\cotg \pi z| = \frac{|\cos \pi z|}{|\sin \pi z|} = \frac{|e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}|}{|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}|} =$$

$$= \frac{|e^{i2\pi z} + 1|}{|e^{-i2\pi z} - 1|} \leq$$

$$\leq \frac{|e^{i2\pi z}| + 1}{|e^{-i2\pi z} - 1|} = \frac{e^{-2\pi y} + 1}{|e^{-2\pi y} - 1|}$$

1) $y > 1$ $|\cotg \pi z| \leq \frac{e^{-2\pi y} + 1}{1 - e^{-2\pi y}} <$

$$< \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} < 2$$

2) $y < -1$ $|\cotg \pi z| \leq \frac{e^{-2\pi y} + 1}{e^{-2\pi y} - 1} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} <$

$$< \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} < 2$$

3) $-1 \leq y \leq 1$, $z \in D\delta \cap \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. — компакт 4

$\Rightarrow |\cotg \pi z| \leq M_1(\delta)$, $z \in \pi\delta$.

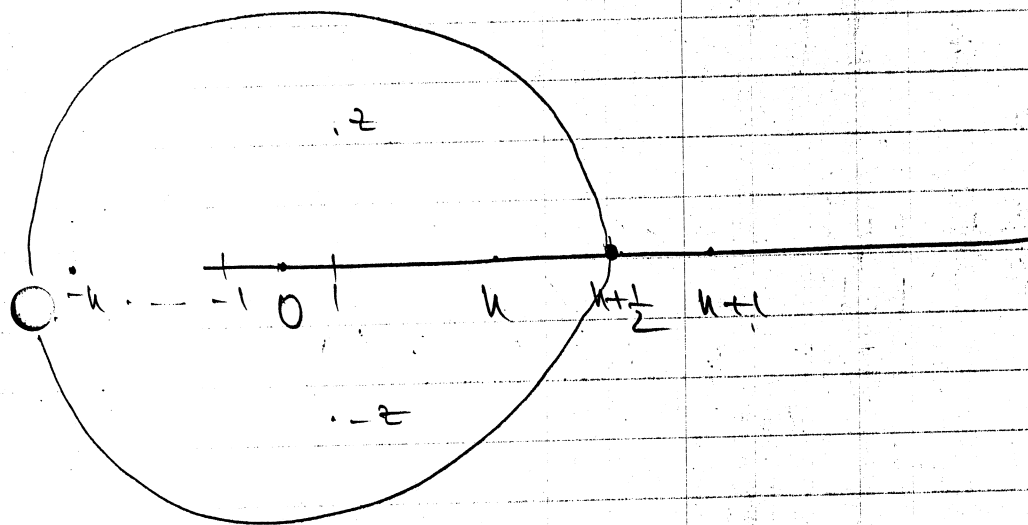
$\Rightarrow |\cotg \pi z| \leq \max\{M_1(\delta), 2\}$. $\Rightarrow$ е отгр. в $D\delta$.

Ктои твбзделенно:

Разом.

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 - z^2} dz$$

$$|z| = n + \frac{1}{2}$$



1) Мы не считаем n -ю π за результат.

$$\Rightarrow I_n = \sum_{k=-n}^n \text{Res}(k) + \text{Res}(z) + \text{Res}(-z)$$

$$\text{Res}(k) = \left. \frac{\pi \cot \pi z}{(z^2 - z^2)'} \right|_{z=k} = \frac{1}{k^2 - z^2}$$

$$\text{Res}(z) = \left. \frac{\pi \cot \pi z}{(z^2 - z^2)'} \right|_{z=z} = \frac{\pi \cot \pi z}{2z}$$

$$\text{Res}(-z) = \left. \frac{\pi \cot \pi z}{(z^2 - z^2)'} \right|_{z=-z} = \frac{\pi \cot(-\pi z)}{-2z} = \frac{\pi \cot \pi z}{2z}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{\pi \cot \pi z}{2z} + \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k^2 - z^2} =$$

$$= \frac{\pi \cot \pi z}{2z} - \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - z^2}$$

2) Оценка на $|I_n|$.
от лемата (при $\delta = \frac{1}{3}$)

$$|\cot \pi z| \leq M \quad |z| = n + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$|I_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\pi |\cot \pi z|}{|z^2 - z^2|} |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\pi \cdot |\cot \pi z|}{|z|^2 - |z|^2} |dz|,$$

$$\leq \frac{\pi}{2\pi} \frac{M}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - |z|^2} \cdot \underbrace{2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)}_{\text{дължината на окр.}} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\text{От (1) и (4)} \quad 0 = \frac{\pi \cot \pi z}{z} - \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 - z^2}$$

$$\Rightarrow \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Редът е равномерно с. в. в компактни множества на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

○ Логаритмичен индикатор

Д.1 Нека $f \in \text{хоморфа}$ и $\neq 0$ в
околност на z_0 .

(Док. че може да се определи еднозн. клон
на $\log f$).

Логаритмичната производна на f в z_0 е

тър. значение.

$$○ Lf := \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \frac{d(\log f(z))}{dz} \Big|_{z=z_0}$$

$\log f$ е един еднозначен клон
на $\log f$.

(до) Да се док. че ако $D \in \mathbb{C}$ е открито обл. и
 $f \in \text{хом. в } D$ и $\neq 0$ в D , то в D
може да се определи еднозначен
клон на $\log f$.

○ Лема 1:

$$L(fg) = L(f) + L(g)$$

$$L\left(\frac{f}{g}\right) = L(f) - L(g)$$

Лема 2: $\downarrow$ Прости Нулите и полюсите на f са
прости полюси на $\frac{f'}{f}$.

При това, ако a е n -кратна нула на f ,
то $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = n$.

○ ако b е p -кратен полюс на f , то
 $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, b\right) = -p$.

1-во: 1) Нека a е n -кратна нула на f .
Това важи за ок-ст на a

$$f(z) = (z-a)^n \cdot \varphi(z), \quad \varphi \in \text{холон.} \quad u \neq 0 \quad \text{важи ок-ст.}$$

$$\begin{aligned} \text{Имаме} \quad \frac{f'}{f} &= \frac{n(z-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \\ &= \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \Rightarrow a \in \text{прост полюс} \\ &\quad \text{холоморфна ва.} \end{aligned}$$

$$\text{на } \frac{f'}{f} \quad \text{и } \text{Res}(a) = n.$$

② Ако $b \in \mathbb{C}$ е p -кратен полюс, то
 $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-b)^p}, \quad \psi(z) \in \text{холон.} \quad u \neq 0$
важи ок-ст на b .

$$\begin{aligned} \text{Имаме} \quad \frac{f'}{f} &= \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - p \cdot \frac{(z-b)^{p-1}}{(z-b)^p} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{p}{z-b} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{холон. в } b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b \in \text{прост полюс на } \frac{f'}{f} \quad \text{и } \text{Res}(b) = -p.$$

20.05.2014г.

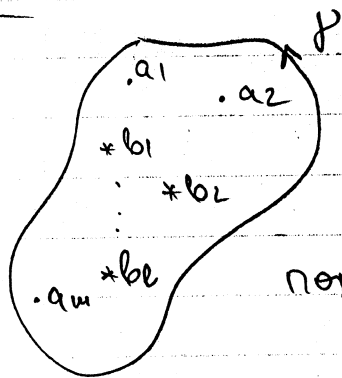
Логаритмичен индикатор.
Принцип за аргумента

Т за логаритмичния индикатор:

Нека γ е затворена жорданова крива,
 $f \in \text{холон.}$ в областта на γ и $\text{int } \gamma$.
с изкл. на краен бр. полюси в $\text{int } \gamma$.
и f няма нули вън γ . ($f(z) \neq 0, z \notin \gamma$)
Това важи $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f,$

- Където N_f е броят на нулите,
 P_f = бр. на полюсите на f
 в $\text{int } \gamma$, броеви с кратностите им.

До-во:



Нека нулите на f в $\text{int } \gamma$
 са $a_1, a_2, \dots, a_m$ съответ. с
 кратности $n_1, n_2, \dots, n_m$
 и нека $b_1, b_2, \dots, b_l$ са
 полюсите на f в $\text{int } \gamma$ с кратности
 съответ. $p_1, p_2, \dots, p_l$.

○ Тези резултати и Lemma 2 имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(a_k) + \sum_{k=1}^l \text{Res}(b_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^n n_k - \sum_{k=1}^l p_k = N_f - P_f.$$

○ Сл. 1 Ако $f \in \text{holom}$ в ок-ст на γ и $\text{int } \gamma$
 и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$,
 то $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f$.

(гип) Док. ост. Теза алгебратез през Сл. 1.

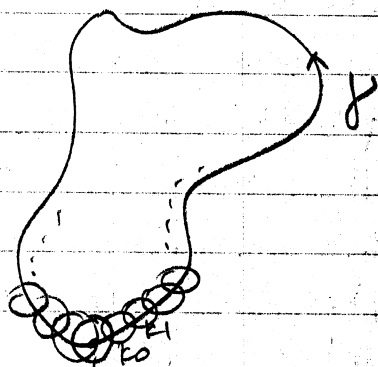
(гип) Условиетата; Нека f е хол. в ок-ст на γ и
 $\text{int } \gamma$ с изкл. на краен бр полюси в $\text{int } \gamma$,
 $f(z) \neq 0, z \in \gamma$.

$g(z)$ е хол. в ок-ст на γ и $\text{int } \gamma$.
 Тогава $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot g(z) dz = \sum_{k=1}^m n_k g(a_k) - \sum_{k=1}^l p_k g(b_k),$

○ Където $\{a_k\}_1^m$ са нулите на f заедно с кратността им,
 $\{b_k\}_1^l$ - полюсите на f .

Геометрично тълкуване на логаритмич- ните интегрални

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}.$$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d \log f(z) =$$

$$= \frac{\log f(b) - \log f(a)}{2\pi i} =$$

можем да определим еднозначно аргумента $\arg z$

$$\arg z = \underbrace{\arg z + 2k\pi}_{\arg z}$$

$$\arg z = \arg_0 z + 2k\pi \Rightarrow \arg_0 z = \arg z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$= \frac{\log |f(b)| - \log |f(a)|}{2\pi i} + \frac{i(\arg(f(b)) - \arg(f(a)))}{2\pi i}$$

$$\gamma(a) - \gamma(b) = \frac{\arg f(b) - \arg f(a)}{2\pi} = \frac{\Delta \arg f}{2\pi}.$$

Принцип за аргумента:

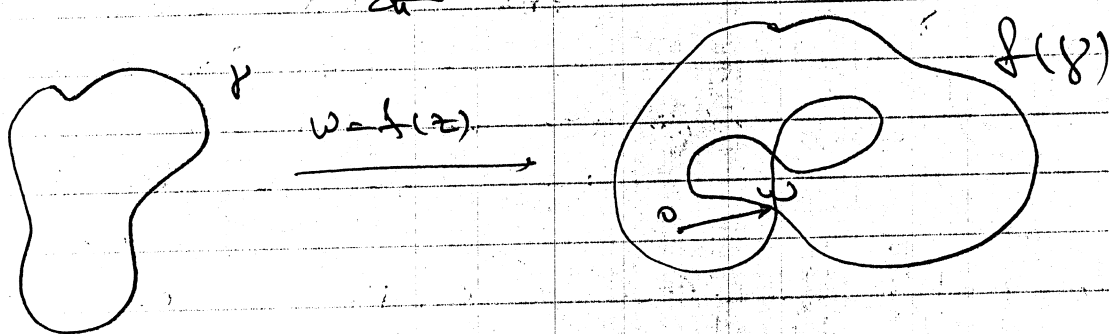
Нека γ е затв. жорданова крива, f е
хомоморфна в ок-та на $\gamma \cup \text{int } \gamma$ с изкл. на
краен бр. полюси

$$\text{Тогава } N_f - P_f = \frac{\Delta \arg f(z)}{2\pi},$$

$\Delta \arg f(z)$ е увеличението на $\arg f(z)$, когато z опише веднъж γ .

Сл. 2.1. Ако f е конформна, в ок-сия на f и $int \gamma$ и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$, то

$$Nf = \frac{\Delta \gamma \arg f(z)}{2\pi}$$



Теорема на Жули

Нека f е затв. хорд. крива f и g са конформни в ок-сия на f и $int \gamma$ и $\forall \gamma \in \gamma$ $|g(z)| < |f(z)|, \forall z \in \gamma$.

Тогав $f+g$ ($f-g$) има токова крива в $int \gamma$, което има $f(z)$.

Сл. 2.2: 1) От $|g(z)| < |f(z)|, \forall z \in \gamma$

имаме $|f+g| \geq |f| - |g| > 0, \forall z \in \gamma$
 $= f(z) + g(z) \neq 0$ за $z \in \gamma$.

и можем да приложим горните Т.

Тогав $N_{f+g} = \frac{\Delta \gamma \arg(f+g)}{2\pi}, N_f = \frac{\Delta \gamma \arg f}{2\pi}$

Имаме, че $f+g = f \cdot \left(1 + \frac{g}{f}\right)$ и