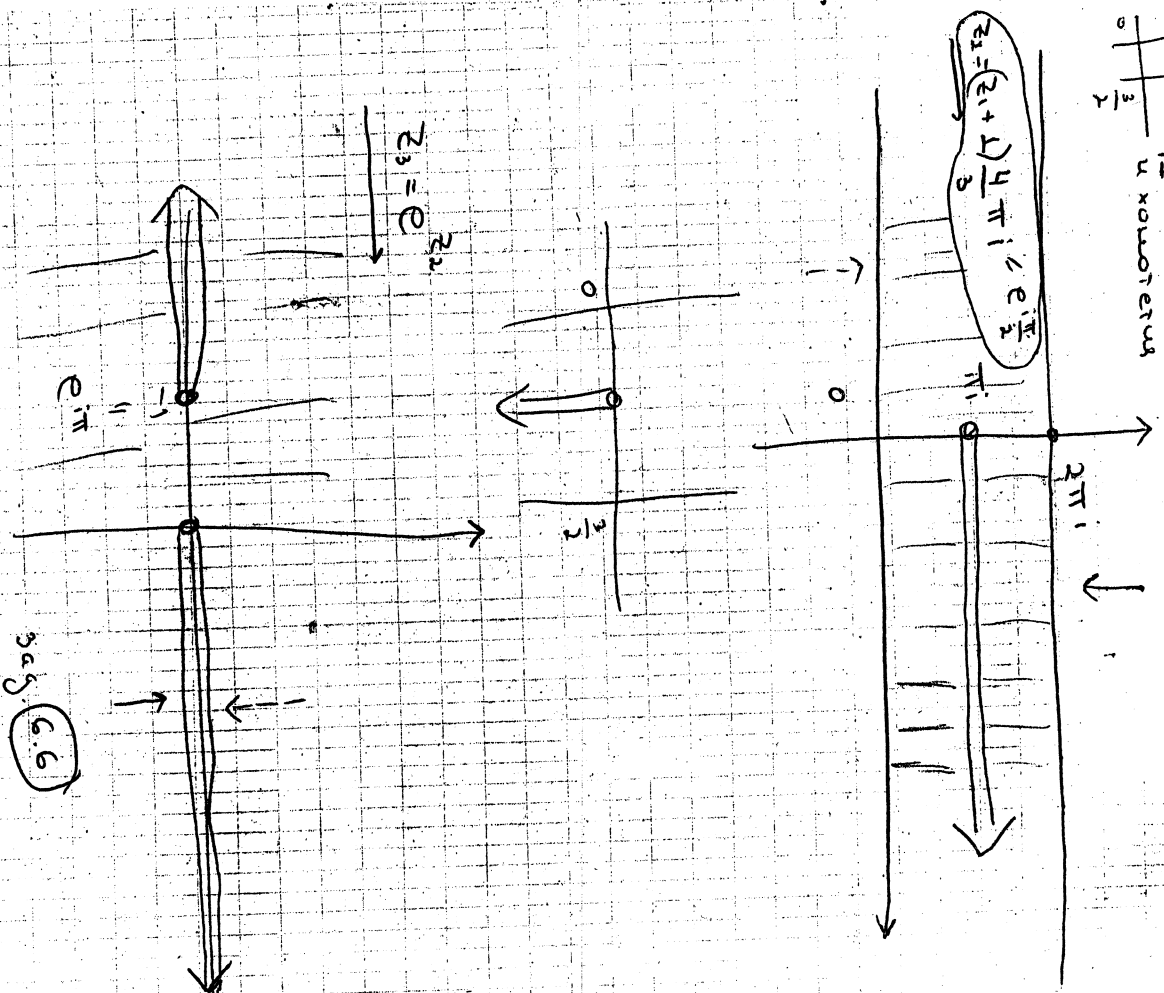


e^z е еднозначна в хордизонти
область, но не във всички
и хордизонти



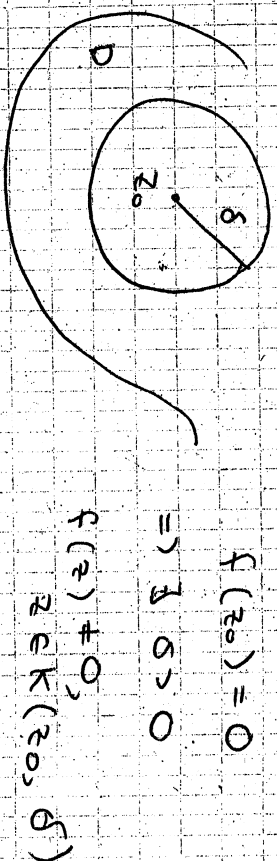
28.04.2014г.

Лекуша

За 1-нос на хомоморфна
ф.х:

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \rightarrow \mathbb{C}$
е хомоморфна ф.х в D . Ако $0 \neq \gamma$
от нулите на f има т.на съвпа-
дане в D , то $f(z) \equiv 0, z \in D$.

Следствие 1: Нулите на
хомоморфните ф.х са изотрени
точки.



(задача) Следствие 2:

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $\delta: D \rightarrow \mathbb{C}$
е хомоморфна $f(z) \equiv 0$.
Ако $\exists z_0 \in D$:

$A_n = 0, 1, \dots, m$
 $f(z) \equiv 0, z \in D, \text{ т.е.}$
 конформное отображение ($\neq 0$)
 на 0 от безкраен ред.

$$f(z) \neq 0, z \in K(z_0, \delta)$$

Пример 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n = 0, 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n\pi} = \frac{1}{n}, \text{ т.е. } n = 1$$

не е убавяща.

$$x = \frac{1}{n}$$

Пример 2

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

при $x = 0 \rightarrow \text{null}$,
 $f^{(n)}(0) = 0, \forall n = 1, 2, \dots, \text{ т.е.}$
 0 е нула от безкраен ред на f , но $f \neq 0$

Th (за унитарност)

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ са конформни функции. Ако D -то

$$\left\{ z \in D: f(z) = g(z) \right\}$$

има неограничено множество в D , то f и g са еднакви в D (т.е. $f \equiv g$).

D -то е област и f за единственост за $f \equiv g$:

Пример $e^z \cdot e^w = e^{z+w}, z, w \in \mathbb{C}$
 (чрез Th за унитарност)

Нека $f(z) = e^z, e^x, g(z) = e^{z+x}$,
 $z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$
 f, g - реални функции

① безпр. н. т. на $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = g(z), z \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ от т. н. за уединеност

$$\Rightarrow f(z) = g(z) \text{ за } \forall z \in \mathbb{C}$$

Нека

$$F(w) = e^z \cdot e^w$$

$$G(w) = e^{z+w}, z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$$

функция

F, G са една функция

$$F(w) = G(w), w \in \mathbb{R} \text{ от } (1)$$

$\Rightarrow$ от т. н. за уединеност

$$\Rightarrow F(w) = G(w), w \in \mathbb{C}, \text{ т.е.}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, z, w \in \mathbb{C}$$

Директно

Директно бази 8 от т

на 0

Нека z_0 се намира в n -крайната 0 на f , ако $G = f(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0)$,

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Нека f е хомоморфна в от-т на z_0 $K(z_0, R)$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ n -крайната нукла на f . Тогава

в околност на $z \in K(z_0, R)$ е в една непрекъснато

$$f(z) = (z - z_0)^m \psi(z), \text{ където } \psi \in \text{хомоморфна и } \neq 0 \text{ в } U$$

Д-во Нека

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_m(z - z_0)^m$$

$a_m \neq 0$

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + \dots, a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$$

е Тезисово разделение на f в $K(z_0, R)$ Тогава $f(z) = (z - z_0)^m$

$$(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots)$$

Тоа камо R е на стр. g

$$a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots \in \mathbb{C} \neq 0$$

могува да из

$$\psi(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots \in \mathbb{C}$$

хомоморфна в $K(z_0, R)$,

$$f(z) = (z - z_0)^m \psi(z) \text{ и } \psi(0) = a_m \neq 0$$

от непрекъснатостта на ψ $\Rightarrow$ в околност $U = K(z_0, R_1)$,

$$R_1 \leq R, \text{ т.е.}$$

$$\psi(z) \neq 0, z \in U$$

∴

$$V(z_0, z, R) = \{0 \leq z < |z - z_0| < R \leq +\infty\}$$

Д-во: Ом формула на Коши-Агасар

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ с. в. } |z - z_0| < R$$

Мак ом нех $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n$

с. в. $\left| \frac{1}{z - z_0} \right| < \frac{1}{r} \Leftrightarrow$

$$|z - z_0| > r$$

Th (ЛОРАН). Нека f е хомоморфна в б. в. $V(z_0, z, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq z < |z - z_0| < R \leq +\infty\}$

Тогда $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in V(z_0, z, R), \text{ в } R \leq +\infty$

$$z \in V(z_0, z, R), \text{ в } R \leq +\infty$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n=0, \pm 1, \dots$$

$$\gamma = \{ |z - z_0| = r, z < r < R \}$$

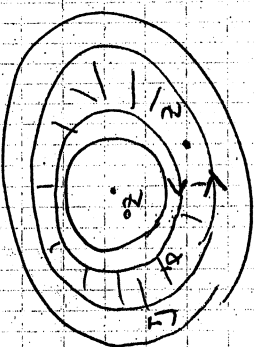
са едновременно ор. и

регет е радиусиерно с. в. γ конвективне погледнаем да на венеуа. V .

Д-во: Нека $z \in V(z_0, z, R)$ и $z < r < R$

са, т.е. $z \in V(z_0, z, R)$

(по-тежък венеу)



(запазу формула на Коши по правуага)

Нека $\gamma_1 = \{ |z - z_0| = R, \gamma \}$

$\gamma_1 = \{ |z - z_0| = R, \gamma \}$

Ом формула на Коши (принцип на Рунге) $V(z_0, z, R)$ имаме, т.е.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$\frac{1}{z - z_0}$ разбувае с. в. с. в. с. в. с. в.

① Kaimo & Th (Tea) noma-
base

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-2} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{R_1} (z-z_0)^n$$

Kaimo $a_n^{R_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$n = 0, 1, \dots$