

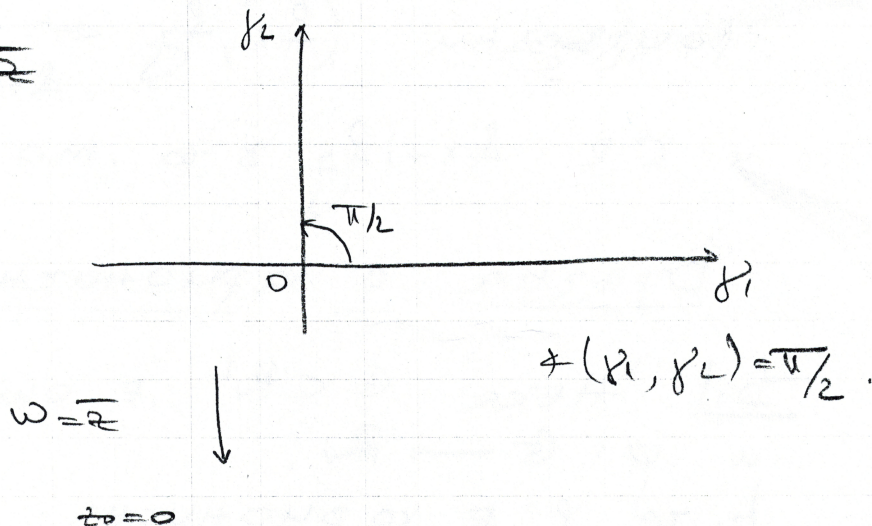
17.03.2014г.

КА - лек.

Т: Ако $f(z)$ е холоморфна в z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0 .

Коментар.

пр.1) $f(z) = \bar{z}$

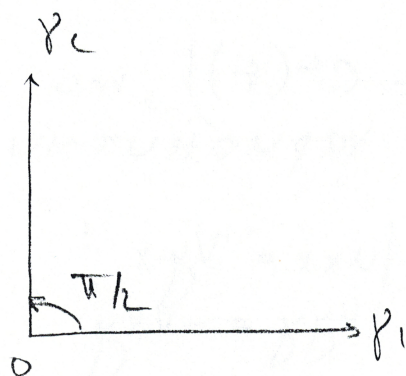


$\arg(\Gamma_1, \Gamma_2) = -\pi/2$

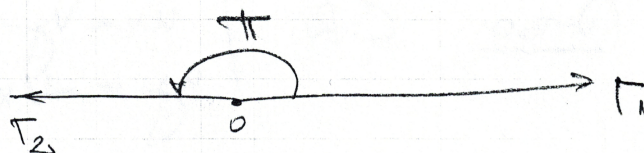
пр.2) $f(z) = z^2 \rightarrow$ цвяла функция

не е
конформно
в 0, т.е.

$f'(z) = 2z = 0$, за
 $z = 0$.



$\arg(r, \theta) = \pi/2$



$\arg(\Gamma_1, \Gamma_2) = \pi$

Тв: 1 (дост. условие)

Ако f има непрекъснати частни
производни ($f_x, f_y \Leftrightarrow \exists u_x, u_y, v_x, v_y$,
 $\lambda = u + i \cdot v$)
и с.р.: $\lambda x + i f_y = 0$, то $\lambda \in \mathbb{C}$ -диф. в Ω .

Връзка с хармоничните функции

Д: 1 Нека $G \subset \mathbb{R}^2$ е отворено мн.
и $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$.

К, че $\varphi \in$ хармонична в G , ако
те има непр. частни производни до
2-ри ред., т.е. $\varphi \in C^2(G)$.

и $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ в G .
оператор на Лаплас $\Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$.

! (зад.) Покажете, че $\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$
($\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}$)

Тв: 1 Ако $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ е холоморфна в

отв. мн. G . (и $f \in C^2(G)$), то
 $u := \operatorname{Re} f$ и $v := \operatorname{Im} f$ са хармонични
в G .

Д-во: с.р. $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$
 $\Rightarrow \Delta u = v_{yx} - v_{xy} = 0$

аналогично следва $\Delta v = 0$.

? Ако U е хармонично в G , съществува ли холоморфна в G ф. $f: K \cap U = U$?

Не за $\forall$ области, това е вярно.

Конформности в ∞ .

Д1: Нека $w = f(z)$ е д.в. в околности на ∞ (т.е. $\{z \mid |z| > R\} \cup \infty$)

т.е. $f(z)$ е холоморфна (изображението $w = f(z)$ конформно в ∞ , ако ф. $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ е холоморфна в 0 (конформно в 0))

Д2: Нека $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и $f(z_0) = \infty$.

1) $z_0 \neq \infty$. (холоморфност не можем да проверим)

т.е. $w = f(z)$ е конформно в z_0 , ако $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ е конформно в z_0 .

2) $z_0 = \infty$: $w = f(z)$ е конформно в z_0 , ако $h(z) = \frac{1}{f(1/z)}$ е конформно в z_0 . (или в 0)

Дробно-линейната ф-ция (трансформация) = ДЛТ

$$\text{Д:} \quad w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$\Delta = ad - bc \neq 0$$

детерминанта на ДЛТ.

I $c=0$, т.о.о. $d \neq 0$

$w = T(z) = az + b \rightarrow$ нар. цяла линейна функция (трансформация)

$T: \mathbb{C} \xrightarrow{1:1} \mathbb{C}$, $T(\infty) = \infty$

Ако $a = r \cdot e^{i\varphi}$, то $T(z) = az + b$ е суперпозиция

на: $z_1 = rz$ - хомотетия
 $z_2 = e^{i\varphi} \cdot z_1$ - врътене (на φ)

аргумента на числото

$w = z_2 + b$ - транслация

това са осн. трансформации в $\mathbb{C}$ (вж. равен.

$\Rightarrow$ цялата линейна трансформация е конформно изобр в $\mathbb{C}$ (и в $\mathbb{R}$) и запазва ориентациите и правите

II Нека $c \neq 0$.

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c \cdot (cz + d)}$$

$\rightarrow \Delta T$ е суперпозиция на

$$z_1 = cz + d \rightarrow \text{уЛТ};$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1}$$

$\rightarrow$ инверсия

$$w = \frac{-\frac{1}{c} \cdot z_2 + \frac{a}{c}}{1} \rightarrow \text{уЛТ.}$$

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \rightarrow c\omega z + d\omega = az + b$$

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}, \quad T^{-1}(\omega) = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}$$

$$(-1)(-a) - bc = ad - bc \neq 0.$$

$$\Rightarrow T: \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \xrightarrow{1:1} \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

не дефинирано на 0

1.1
 $\downarrow$
 вярно
 ето защо
 съответствие

Ако дефинираме $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$,

то $T: \mathbb{C} \xrightarrow{1:1} \mathbb{C}$.

Тв.1 $\Delta\Gamma$ образуват група относително операцията съпозозиция.

Ако T_1, T_2 са $\Delta\Gamma$, то

$T_1 \cdot T_2 = T_1(T_2)$ е $\Delta\Gamma$ с $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det A = \|A\| = \Delta \neq 0.$$

$GL(2, \mathbb{C})$ - малка матрична група

$$A \rightarrow T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

не е инективно, защото ако разл. $A, \lambda A (\lambda \neq 0) \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$.

Тв.2: $\Delta\Gamma$ са конформни изобр. в $\mathbb{C}$.

Доказ. 1) Ако $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$, тобг редицето
 $=$ платос на трансформацията.

следва от това, че

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

2) ако $z = \infty$. Укаже, че $g(z) = T(1/z) =$

$$= \frac{a/z + b}{c/z + d} = \frac{bz + a}{dz + c}.$$

$$g'(0) = \frac{b(dz+c) - d(bz+d)}{(dz+c)^2} \Big|_{z=0} = \frac{bc-ad}{c^2} = \frac{-1}{c^2} \neq 0.$$

3) останалото резултат

Тв 3.1 Δ ЛТ $z \mapsto z$ в Φ окръжностите

Д-во: $w = T(z) = \frac{a}{c} + \frac{-1}{c(cz+d)}$ < без го
пот.

универсализация на $z_1 = cz+d$
 $z_2 = \frac{1}{z}$

$$w = \frac{-1}{c} \frac{z+a}{c}$$

у ЛТ
у ЛТ
у ЛТ

Трябва само това да проверим, в
избр. окр. в окр.

1) Декартовото у-ние на окр. в канонич.
св. вид.

$$A(x^2 + y^2) + B_1 x + B_2 y + C = 0, \quad A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\rightarrow A|z|^2 + \frac{B_1}{2}(z+\bar{z}) - \frac{iB_2}{2}(z-\bar{z}) + C = 0$$

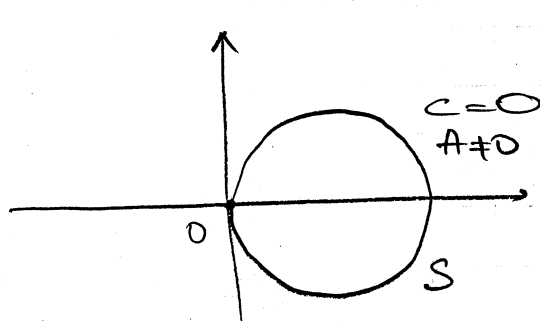
$$A|z|^2 + \underbrace{\frac{B_1 - iB_2}{2}}_B z + \underbrace{\frac{B_1 + iB_2}{2}}_{\bar{B}} \bar{z} + C = 0$$

$$\S: A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad B \in \mathbb{C}.$$

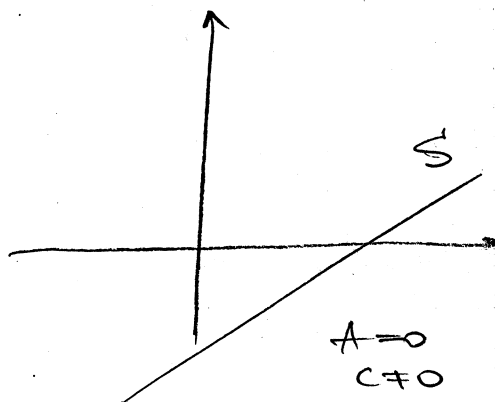
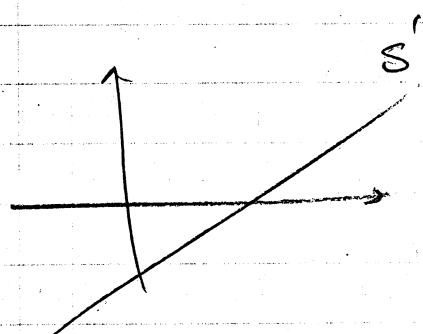
$$S \xrightarrow{\omega = \frac{1}{z}} S': \frac{A}{|\omega|^2} + \frac{B}{\omega} + \frac{\bar{B}}{\bar{\omega}} + C = 0$$

$$\Leftrightarrow C \cdot |\omega|^2 + \bar{B}\omega + B\bar{\omega} + A = 0 \quad \text{окр.}$$

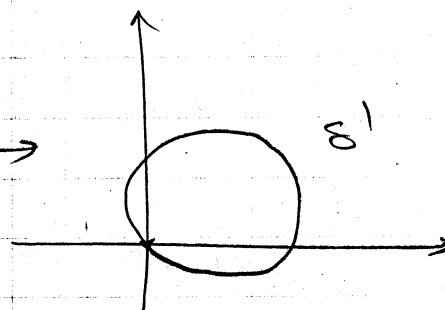
и доказано.



$$\omega = \frac{1}{z}$$



$$\omega = \frac{1}{z}$$



окр. @ $z \neq 0$
на самом

Просто-линейная функция и
двойного отношения на
4 точки в $\mathbb{C}$.

Д. 1.) Просто отношение на 3 точки z_1, z_2, z_3
 $\in \mathbb{C}$

$$(z_1, z_2, z_3) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

2) Двойное отношение на 4 точки в $\mathbb{C}$
 $(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} =$

$$= \frac{(z_3 - z_1) \cdot (z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2) \cdot (z_4 - z_1)}$$

в $\mathbb{C}$ правим графика преход.

Напр. $z_4 = \infty$

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) = \lim_{t_4 \rightarrow \infty} (z_1, z_2, z_3, t_4) = \\ = (z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Ако $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, то $\forall$ -те двойни
отношения са: $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda},$

$$1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Д.1 Двойна точка (неподвижна точка)

на $\Delta \Lambda T$ z_0 : $T(z_0) = z_0$.

(т.е. точка, $\odot$ остава на мястото
си, напр. ∞)

Т.2.1 $\Delta \Lambda T$ има най-много 2 неподвижни
точки.

Д-во: $T(z) = z$

← (добавяте т. с p -тус)



$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

НЕ РОВЕНО ОТ 2 КОРЕНА

Т.2.1 $\rightarrow$ Нека $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ и
 $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \in \mathbb{C}$

Тотва $\exists ! \Delta \Lambda T$ $w = T(z)$, т.е.

$w_k = T(z_k)$, $k=1, 2, 3$ и ма се

задава:

$$T: (w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$$

До-во: 1) За 1-ви:

Ако $T_1(z_k) = w_k$ и $T_2(z_k) = w_k$, $k=1, 2, 3$;

то $T_1 \circ T_2^{-1} = T \in \Delta \Lambda T$.

и $T(w_k) = T_1 \circ T_2^{-1}(w_k) = T_1(z_k) = w_k$, $k=1, 2, 3$.

т.е. има 3 неподв. т.

Тв 1: $T \equiv I$. ($I = \text{идентитет}$)

2) $(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k_1} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{k_2}$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} = k \cdot \frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}$$

което $\in \Delta \Lambda T$.

$$z_k \rightarrow w_k$$

($\neq$ е важна подредба, важно е, на
① място е w_1 , на съответното е z_1 .)

Тв 3: $\Delta \Lambda T$ е единствената трансформи-
ция, която запазва двойното
отношение на $\forall$ 4 точки. ($\Leftrightarrow$)

До-во: 1) $\Rightarrow$. Нека $T \in \Delta \Lambda T$. и $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$,

а $w_k = T(z_k)$, $k=1, 2, 3, 4$.

Умаме (Тв 2) $T: (w_1, w_2, w, w_4) = (z_1, z_2, z, z_4)$

$$\Rightarrow z = z_3 = T(z_3) = w_3 \Rightarrow (w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

т.е. $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

4) Обратно, нека $T(z)$ е ф.м., която
запазва двойното ошн. на $\neq$ 4 мот.

$$\frac{z_1, z_2, z, z_3}{\rightarrow (T(z_1), T(z_2), T(z), T(z_3)) = (z_1, z_2, z, z_3) \rightarrow \Delta 17}$$

