

Т. Вагнершрас (за теорема):

Нека $u_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1, 2, \dots$

е р-ца от холоморфни ф-ции и редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ е равномерно с. в. в. компактни подмн. на D .

Тогда:

$$(1) u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \text{ е холоморфна в } D;$$

$$(2) u^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z), \quad k=1, 2, \dots$$

камо редът е равномерно с. в. в. компактни подмн. на D .

Т. Теуор:

Нека $f(z)$ е холоморфна в $K(z_0, R)$.

Тогда за $\forall z \in K(z_0, R)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{където коеф.}$$

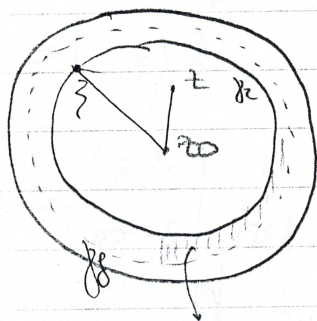
a_n са еднозначно определени с ф-лата:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

$$|z-z_0|=r$$

$0 < r < R$ и редът е равномерно с. в. в. компактни подмн. на $K(z_0, R)$.

До-во:



Нека $z \in K(z_0, R)$ и

$$r < R : |z - z_0| < r$$

да означим $\gamma_r := \{ |z - z_0| = r \}$

границата на малкия кръг

От формулата на Коши имаме, че

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

(Фактът $\frac{1}{\zeta - z}$ се развием около z_0)

Да развием фактора на Коши $\frac{1}{\zeta - z}$

в степенен ред около z_0 .

Имаме, че:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)} \quad \text{дезкр. } \div$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \text{ защото } q = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{R} < 1.$$

$$\text{Тогава } \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)} f(\zeta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \text{ като}$$

редът е равномерно с. в γ б/у γ , защото
е мажоризиран от редица $\frac{M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$,

(Критерий на
Вайерштрас)

$$M = \max_{\gamma} |f|$$

и можем да интегрираме почленно,
б/у γ .

Получаваме:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

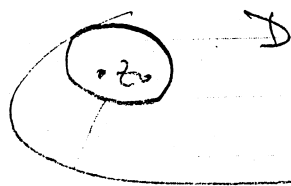
Отт. ф-та на Коши за $f^{(n)}(z_0)$

$$\rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} := a_n, \text{ т.е. н.е. зависи от } z.$$

Сл. 1.1 Ако f е холоморфна ф-ция в област $D \subseteq \mathbb{C}$,

Тогато $\forall z_0 \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, R), \quad 0 < R \leq \text{dist}(z_0, \partial D)$$



максималният
кръг.

Т.Тейлор + Сл. 1.1 (н.е. са верни
(н.е. имат аналог) в $\mathbb{R}$).

Пример:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\sum f^{(n)}(0) \cdot x^n$ е с.к. $\forall x \in \mathbb{R}$, но представя
f само в 0.

Неравенства на Коши за коэффициентите

Нека $f(z)$ е холоморфна в $K(z_0, R)$
и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in K(z_0, R)$.

Тогато $|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$, $\forall n=0,1,2,\dots$

където $0 < \rho < R$
 $M(\rho) = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$.

Доказателство: Имаме че $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$,
 $\gamma_\rho = \{z-z_0 = \rho e^{it}\}$

откъдето $|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} 2\pi \rho = \frac{M(\rho)}{\rho^n}.$$

(погр. по Лемма)

Т. на Луври: Всяка цяла и ограничена функция е константа.

Доказателство: Нека $f(z)$ е цяла ф. и $|f(z)| \leq M$, $z \in \mathbb{C}$.
Разглеждаме около 0.

Имаме $z_0 = 0$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. От неравенствата

на Коши $|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$, $\forall 0 < \rho < +\infty$, откъдето

при $z \rightarrow +\infty$

$$= a_n = 0, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow f(z) \equiv a_0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Основна теорема на алгебрата

Всеки неконстантен полином с комплексни коефициенти има комплексна нула.

д-во: Да допуснем, че $\exists$ неконст. полином $P(z) : P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Тогатва функцията $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ е уязва.

и освен това $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| =$

$$= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

Това означава, че $\exists R_0 > 0 : |f(z)| < 1$
за $|z| > R_0$ (в околност на ∞)

За $|z| \leq R_0$, имаме, че $|f(z)| \leq A$,
защото f е непрекъсната и $|z| \leq R_0$ е компактно.

Тогатва $|f(z)| \leq A+1$ ($:= M$)
 $z \in \mathbb{C}$.

Сга от Т. Лувана $\Rightarrow f(z) \equiv \text{const.}$

$$\Rightarrow P(z) = \text{const} = \bar{0}.$$

(обща) обобщение
ТЕОРЕМА:

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f \in \text{def. в ок-ст на } z_0$
 Следните твърдения са еквивалентни:

(1) f е $\mathbb{C}$ -диференц. в U ;
 (т.е. f е холоморфна в z_0)

(2) $\int_\gamma f = 0$ за всяка затворена крива $\gamma \subset U$.

(3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in U$.

(* холоморфна - малко като измения
 се променя утукото)

$\rightarrow$ (2) - Т. Коши-Гурса;

(3) $\rightarrow$ (1) Т. Морера;

(1) $\Rightarrow$ (3) Т. Тейлор;

(3) $\rightarrow$ (1) Т. за диференциране на
 степенни редове.

Нули на холоморфни функции. Теорема за единственност.

Т(за 1-а за степенни редове):

Ако степенният ред

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{има } R_{\infty} = R > 0 \text{ и}$$

z_0 е точка на събиране на нули на $f(z)$, то $f(z) \equiv 0$ в $K(z_0, R)$ — круга на събиране.

Т(за 1-а за холоморфни функции)

Ако $f(z)$ е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и множеството от нулите ѝ $\{z \in D : f(z) = 0\}$ има точка на събиране в D , то $f(z) \equiv 0, z \in D$.

До-во: Да означим с $A := \{z \in D : z \text{ е точка на събиране на нули на } f\}$,
 $B = D \setminus A$.

Ясно е, че $A \cup B = D$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$

Ако докажем, че A и B са отворени множества, откъдето следва двойствеността на D , ще следва $B = \emptyset \Rightarrow D = A$ — а по непрекъснатост на f $f(z) \equiv 0, z \in D$.

1) A е отворено:

Нека $z_0 \in A$ и $K(z_0, R) \subset D$.

Развиване на теза на Теорема:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, z \in K(z_0, R) \text{ и}$$

от ТЗА !-та на а. условие

$$\Rightarrow f(z) \equiv 0 \text{ в } K(z_0, R), \text{ т.е.}$$

$$K(z_0, R) \subset A \Rightarrow A \text{ е отворено.}$$

1) B е отворено:

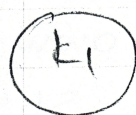
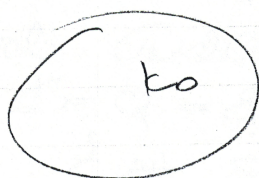
Нека $z_1 \in B$ (= има пробила околност
(B - не са т. на сг.) на z_1 , $b \in$ неговата от
А.)

$\exists \delta > 0 : \forall \{0 < |z - z_1| < \delta\}$ няма
нули на f .

$$\Rightarrow K(z_1, \delta) \subset B \Rightarrow B \text{ е отворено.}$$

Сл.1: Ако $f(z) \not\equiv 0$ е холоморфна в обл. D ,
нулите ѝ са изолирани точки.
(може да ги "изолираме" с кръгове).

Заб.: Условието в Т(за !-а) са съществени
(1) Ако D не е свързано н.н.



$$D = K_0 \cup K_1$$

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \in K_0 \\ 1, & z \in K_1 \end{cases}$$

(когато имаме т. на сг., а $f(z) \not\equiv 0$)

(2) $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ — holomorfná v

$$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Нумер на f с $z_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, но $f \neq 0$

т.к. $0 \notin D$, 0 е гранична
точка.

(Требва ~~функция~~ ∂f е т. на сг.)
а тук не е така.

