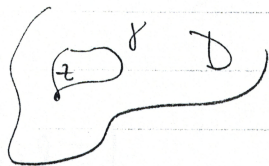


14.04.14г.

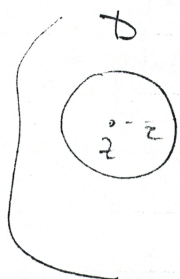
КА - лек

Формула на Поассон. Ф-ция на з-а. з-а Дирикле за кръг

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz, \quad z \in \text{int} \gamma$$



Т-на за средното:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$$

$$0 < r < \text{dist}(z, \partial D)$$

① Ф-на на Поассон за холоморфни в кръг
Ф-ции.

Зад. Т. (Кои за пореданови области
(област, ограничена от пореданова крива))

Ако $D \in$ пореданова област, то

$\forall f$ - холоморфна в D и непр. в $\bar{D}$

$$\int_{\partial D} f = 0 \quad \text{и} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D.$$

Т. Поассон Ако $f \in$ холоморфна в

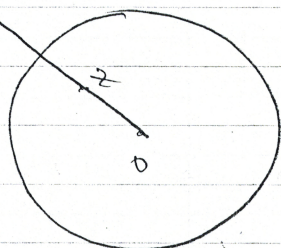
$U = \{ |z| < 1 \}$ и непр. в $\bar{U}$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} f(e^{i\theta}) d\theta, \quad z \in U, \quad z = re^{i\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} f(e^{i\theta}) d\theta \quad \begin{matrix} z = re^{i\varphi} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta \end{matrix}$$

г-во:

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}}$$



Ако $z \in U$ от ϕ -лота на $K_{\text{ош}}$
 $(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$, а от

$T(K_{\text{ош}}) \Rightarrow$

$$(2) \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - \frac{1}{\bar{z}}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{z} f(\zeta) d\zeta}{1 - \zeta \bar{z}}$$

$$(1) - (2) = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \zeta \bar{z}} \right] f(\zeta) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1 - \zeta \bar{z} + \zeta \bar{z} - z \cdot \bar{z}}{(\zeta - z)(1 - \zeta \bar{z})} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) d\zeta$$

$$\zeta = e^{i\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \cdot \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta \quad \text{— доказателство}$$

$$P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - z^2}{1 - 2\cos(\theta - \varphi) + z^2} \quad \begin{matrix} \zeta = e^{i\theta} \\ z = z \cdot e^{i\varphi} \end{matrix}$$

защо на Полоса

за глр. $V \rightarrow K(a, \mathbb{R})$
 $\zeta = \frac{z - a}{R}$

② Решение на задачата на Дирикле
за единичния кръг

Задачата на Дирикле:

Нека $f: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрер.

Да се намери, хармонична в U , ф-ция

$$u: \quad u|_{\partial U} = f. \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ в } U \\ u|_{\partial U} = f \end{cases}$$

Ф-ието е дава с
ф-та на Поасон за хармонични в едрот
функции.

заб. Ако D е едносвързана област и
 u е хармонична в D , то $\exists f$
→ конформна в D : $\operatorname{Re} f = u$ в D .

Ако u е хармонична в U , нека $f \in$
конформна в U и $u = \operatorname{Re} f$.

Тогва от Ф-та на Поасон за
холом. в U ф-ции имаме:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} f(e^{i\theta}) d\theta = \\ \underbrace{f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} f(e^{i\theta}) d\theta}_{\text{...}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

$$\rightarrow u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} u(e^{i\theta}) d\theta, z \in U$$

Ф-ието на заб. на Дирикле.

$$u: u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} f(e^{i\theta}) d\theta$$

е р-ието на заб. на Дирикле.

→
Следствие от формулата на Коши:

предн това: Резиди и теореме от конформни
ф-ции.

Теорема на Вайерштрас

Here $f_n: M \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1,2,\dots$

Д.1 (потокковая сходимость)
 $f_n(z)$ (потокково быстро) $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z)$,

also $\exists A \forall \epsilon > 0, \forall z \in M$
 $\exists v = v(\epsilon, z) : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n > v.$

§ 2.1 (Равномерная сходимость)

К. те ризата $f_n \xrightarrow{M} f$, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists v = v(\varepsilon)$
 ($\Rightarrow$ етоки равносторитно) т.е. $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$,
 $\forall z \in M, \forall n > v$.

Зад. Равн. ск. зависи от множеството

np: $f_u(z) = \frac{1}{4z}$, $M = \{0 < |z| < 1\}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f_n(z) = 0 \quad \forall z \in M$$

Но $f_n \not\rightarrow 0!$, этого аса хватает

$$\varepsilon > 0, \quad \frac{1}{n|z|} < \varepsilon \iff |z| > \frac{1}{n\varepsilon} \quad \left(|z| < \frac{1}{n\varepsilon} \text{ нема } \exists z \in \mathbb{C} \text{ узн.} \right)$$

Да функ. $\varepsilon_0 > 0$ и $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ $M_0 = \{ \varepsilon_0 < |z| < 1 \}$

Ако изберем $V = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon}$, то $\forall n > V$ и $\forall z \in M$.

$$\frac{1}{n|z|} < \frac{1}{\sqrt{|z|}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{|z|} < \varepsilon$$

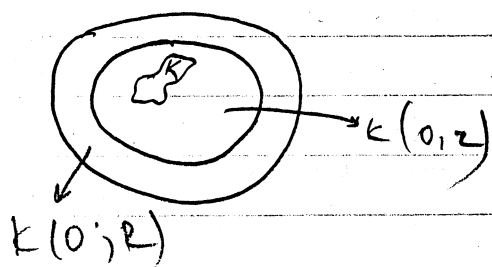
Ex 3: Also $u_n : M \rightarrow \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots$ (p-lyt or ϕ)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится (равномерно в M),
 то $S_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z)$ сходится (равном. с.) в M .
 р-ц-а от парцеллированных сумм. - 4 -

Критерий на Вагнера

Ако $|u_n(z)| \leq \lambda_n$, и $\sum_{z \in M} \lambda_n < +\infty$, то
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \in \text{разн. с. в } M.$ (Еск.)

С.1 Всички определени ред $\in$ редом.
сходен във компактните подмн. на
крот и на сходност.



$$\exists z: z \in K \Rightarrow |z| < r$$

$$|a_n z^n| < |a_n| r^n, \text{ т.е. } \sum |a_n| r^n < +\infty.$$
$$\Rightarrow \sum a_n z^n \text{ е разн. с.}$$

T1: Ако $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, f_n - непр. ф-ции в D и
 $f_n \Rightarrow f$ във компактните
подмн. на D , то f е непр. в D .

T1': Свойство за редове.

T2: Ако $\gamma \in \text{ректиф. крива в } \mathbb{C}$,
 $f_n \in C(\gamma^*)$, $n=1, 2, \dots$
 $f_n \Rightarrow f$.

$$\text{Тогава } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Р-во:

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| |dz| \stackrel{w.v.}{\leq} \varepsilon \cdot l(\gamma)$$

$\underbrace{\quad}_{\varepsilon(\gamma)?}$

За $\forall \varepsilon > 0$, $\exists v = v(\varepsilon) : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \gamma$

T2: (3A $\exists \varepsilon$ oboe)

$$\sum_1^{\infty} \int_{\gamma} u_n(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) dz$$

Т. Вайерштрасс:

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област. $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$ е редица от холоморфни в D ф-ции
и $f_n \Rightarrow f$ равномерно в γ
компактните подмн. на D .

Тогав

(1) f е холоморфна в D ;

(2) $f_n^{(k)}(z) \Rightarrow f^{(k)}(z)$, равномерно в γ компактните подмн. на D .

До-во: (1) f е пер. в D (T1)

Нека $z_0 \in D$ и $\Delta = K(z_0, z) \subset D$.

Нека $\gamma \subset \Delta$ е затв. крива.

От Т. Коши-Гурса:

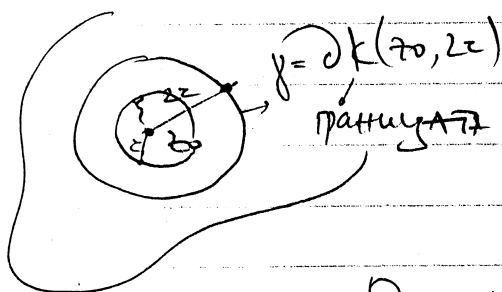
$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0, \forall n.$$

Тогав $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz =$ T2

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$$

От Т на Морери $\Rightarrow f \in \text{holom. в } \Delta \Rightarrow$
 $f \in \text{holom. в } D.$

(2) Достатъчно е да док., че
 $f_n^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}$ във $\forall$ кръг $K(z_0, r) \subset D$
 т.е. $\forall$ компакт $\subset D$ се покрива с краен
 брой кръгове.



Нека $z_0 \in D$ и $r > 0$:

$K(z_0, r) \subset D$

Ще док., че $f_n^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}$ в
 $K(z_0, r)$

От ф-тата на Коши за
 $f_n^{(k)} - f^{(k)}$ имаме $|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| =$
 $= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} d\zeta \right| \leq$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|z-\zeta|^{k+1}} |d\zeta|.$$

Т.е. $\gamma = \partial K(z_0, r) \in \text{компакт}$, то $f_n \Rightarrow f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$,
 $\exists \nu = \nu(\varepsilon)$ т.е. $\forall n > \nu$, $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$, $\forall \zeta \in \gamma$. Следователно
 така $\forall \zeta \in \gamma$ и $\forall z \in K(z_0, r)$
 $\Rightarrow |z - \zeta| \geq |\zeta| - |z| \geq 2r - r = r.$

Заменим
 на окр.

Тогава $|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot 4\pi r =$
 $= \text{const.} \cdot \varepsilon, \forall z \in K(z_0, r), n > \nu.$

$\Rightarrow f_n^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}$ във $K(z_0, r).$

Дп:

1) Т (Бауершварц)

$\forall f \in C([a; b]) \rightarrow \exists \{p_n - \text{полиномы}\}:$
 $p_n \rightrightarrows f \text{ на } [a; b] \quad (p_n \in C^\infty, f \text{ само не } \in C^\infty)$
теор!

2) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, x \in \mathbb{R}, f_n \rightrightarrows 0 \neq f$

$f'_n(x) = \cos nx$ — разходимость $\forall x + 2k\pi$
при $x = 2k\pi, f'_n(2k\pi) = 1, \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0$