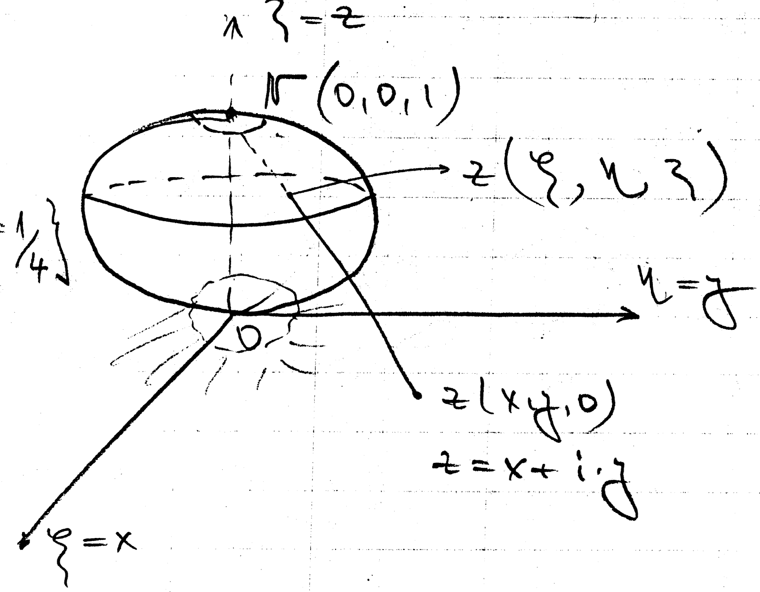
10.03.2014г.

КА - лекция

$S^2 = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4\}$



$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\pi : S^2 \longleftrightarrow \overline{\mathbb{C}} : Z \longrightarrow NZ \cap \mathbb{C} = z$$

$$N \longleftrightarrow \infty$$

π е взаимно-едн. съответствие, непрекъснато

π^{-1} - непрекъснато

π е <u>хомеоморфизъм</u> на S^2 в/у $\overline{\mathbb{C}}$.

→ шапката на N се изобразява във външността на кръг с ц-р O.

$\Downarrow$

<u>D:) Околност</u> на ∞ нар. външността на $\forall$ кръг $|z| < R$, т.е. това $\{|z| > R\} \cup \infty$.

<u>Топология в $\overline{\mathbb{C}}$</u>

- всички понятия и твърдения за топологията в $\mathbb{C}$ остават валидни и за топологията в $\overline{\mathbb{C}}$, като премахнем условието „ограниченост".

Т на Болцано-Ва. в $\overline{\mathbb{C}}$:

От $\forall$ редица $\{z_n \in \overline{\mathbb{C}}\}$ може да се избере сходяща подредица.

$\Leftrightarrow$ $\forall$ редица $\{z_n \in \overline{\mathbb{C}}\}$ има точка на сгъстяване.

$F \subset \overline{\mathbb{C}}$ е компакт $\Leftrightarrow$ F е затворено мн.

$\Leftrightarrow$ от $\forall$ р-ца $\{z_n \in \overline{\mathbb{C}}\}$ може да се избере сходяща подредица $\{z_{n_k}\}_{\in \overline{\mathbb{C}}}$, $z_{n_k} \to z_0$, $z_0 \in F$.

$\Leftrightarrow$ от $\forall$ отворено покритие на F може да се избере крайно подпокритие.

$\overline{\mathbb{C}}$ е компакт.

Функции на комплексна променлива. Непрекъснатост. Комплексна диференцируемост.

Нека $M \subseteq \mathbb{C}$

$f: M \to \mathbb{C}$

$f(z) = \arg z$ → това е безкрайнозначна ф-ция.

$f(z) = \sqrt{z} := \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z}{2}}$ → съпоставяме само 2 ст-сти → 2значна ф-ция.

Ще разглеждаме само конкретни многозначни ф-ции (напр. log) и ще ги разглеждаме до еднозначни в някои области.

D:) $f: M \to \mathbb{C}$

К.че f е еднолистна в M, ако

$\neq$ точки имат $\neq$ образи, т.е.

ако $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$.

Нека $f: M \to \mathbb{C}$, $z = x + i.y$.

$u(x,y) := \operatorname{Re} f(z)$ $v(x,y) := \operatorname{Im} f(z)$.

Тогава $f(z) = u(x,y) + i.v(x,y) := f(x,y)$

Каква е връзката м/у св-вата на $f(z)$ и $u(x,y)$, $v(x,y)$?

Пр.: 1) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+i.y)^2 = z^2$.

2) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy = f(z, \bar{z})$

$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$

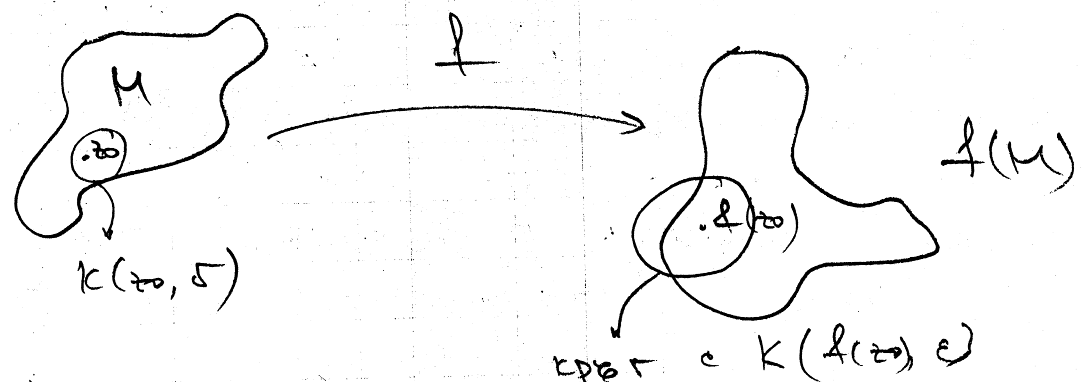
$y = \frac{z-\bar{z}}{2}$

Ще разглеждаме в курса само ф. от вида 1), усл. е ф. да има производна

Непрекъснатост:

$f: M \to \mathbb{C}$, $z_0 \in M$.

D:) f е непр. в z_0, ако за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, z_0)$: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ за $\forall z \in M$, $|z - z_0| < \delta$.



Какъвто и кръг от $f(M)$ вземем, можем да намерим кръга от M...

$$f(K(z_0,\delta) \cap M) \subset K(f(z_0), \varepsilon)$$

Следствие: $\boxed{\text{Тв:}}$ ($\overset{\text{екв.}}{\Longleftrightarrow}$) ако $z_0 \overset{\in M}{\,}$ е т. на сг.,

то f е непрекъсната в z_0

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = f(z_0)$

Тв: $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ е непр. в $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i \cdot y_0$.

$\Leftrightarrow u(x,y)$ и $v(x,y)$ са непр. в (x_0, y_0).

D: $f: M \to \mathbb{C}$ е <u>равномерно непр.</u> в M, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ (всеко <u>не</u> зависи от z_0) : $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, $\forall z_1, z_2 \in M$, за които $|z_1 - z_2| < \delta$.

T1: Нека $f: M \to \mathbb{C}$ е непр. ф. Тогава:

(1) Ако M е компакт, то и $f(M)$ е компакт.

(2) Ако M е свързано мн., то и $f(M)$ е свързано мн.

Т2: Св-ва на непр. ф. в/у компакт:
Нека $f: M \to \mathbb{C}$ е непр. и $K \subset \mathbb{C}$ е компакт. Тогава:
(1) f е равномерно непр..
(2) $\exists$ т. $z_1, z_2 \in K$: $|f(z_1)| = \max_K |f(z)|$
: $|f(z_2)| = \min_K |f(z)|$

Комплексна диференцируемост

Нека f е деф. в ок-ст на z_0.
Озн. околността с U (т.е. кръгче с ц-р z_0)

D: К.че f е компл. диф. ($\mathbb{C}$-диференцируема) в точката z_0, ако $\exists$ границата:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0).$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$z - z_0 = \Delta z = h$
$f(z) - f(z_0) = \Delta f$.

Ако $\alpha(\Delta(z)) := \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0)$, то

$\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$ и

$$\Delta f = f'(z_0) . \Delta z + \Delta z . \alpha(\Delta z)$$

$\Rightarrow$ достигаме до

Т3: f е $\mathbb{C}$-диф. в $z_0 \iff \exists$ конст. $A \in \mathbb{C}$ и ф-я $\alpha(\Delta z)$, $\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$, така че

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + \Delta z + \alpha(\Delta z), \; t \in U$$

$$f'(z_0) := A.$$

(близко до точката можем да заменим ф-ията с лин. ф-ция)

аналог на ~~до~~ производната.

Тв: Ако f е $\mathbb{C}$-диф в z_0, то f е непрек. в z_0.

Обратното НЕ е вярно

Примери: 1) $f(z) = \bar{z}$ е непр. в $\mathbb{C}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = \begin{cases} 1, & \Delta z \in \mathbb{R} \\ -1, & \Delta z \in i\mathbb{R} \text{ (чисто имагинерно)} \end{cases}$$

Ясно е, че не е диференцируема в никоя точка $z \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = f(x, y) = x - iy$$

$$u(x, y) = x \in C^\infty$$

$$v(x, y) = -y \in C^\infty$$

Уравнения на Коши-Риман:

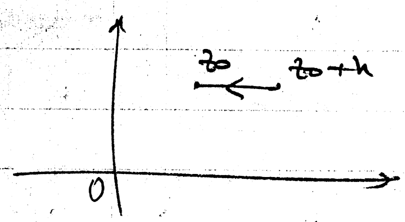
Нека f е $\mathbb{C}$-диф. в $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i y_0$,

т.е. $\exists \; f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$

(както и да клони h към 0)

(с $\mathbb{R}$ или $i\mathbb{R}$ стойности)

1) $h \to 0$, $h \in \mathbb{R}$

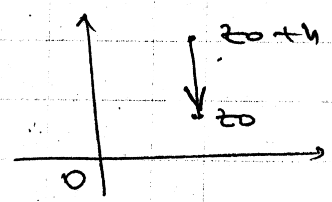


права $\parallel$ на Ox.

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$ → частната производна по X.

2) $h \to 0$, $h \in i\mathbb{R}$, т.е. $h = i \cdot h_1$, $h_1 \to 0$, $h_1 \in \mathbb{R}$



$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h = i \cdot h_1}} \frac{f(x_0, y_0+h_1) - f(x_0, y_0)}{i \cdot h_1} =$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

извод от 1) и 2): Ако f е $\mathbb{C}$-диф. в $z_0 = (x_0, y_0)$, то тя има частни производни по x и y.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

! $f_x := \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$. $f_{\bar z} := \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}$

! К-Р: $\boxed{f_x + i \cdot f_y = 0 \text{ в } z_0}$ у-ние на Коши-Риман

$f(z) = \bar z = x - i \cdot y$ $f_x = 1$ $f_y = -i$

$f_x + i \cdot f_y = 1 + i \cdot (-i) = 2 \neq 0$.

Нека $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$

Тогава $f_x = u_x + i\cdot v_x$, $f_y = u_y + i\cdot v_y$.

то $C.R: f_x + i\cdot f_y = 0 \Leftrightarrow u_x + i\cdot v_x + i(u_y + i\cdot v_y) = 0$

$\Leftrightarrow u_x + i\cdot v_x + i(u_y + i v_y) = 0$

$\Leftrightarrow u_x - v_y + i\cdot(u_y + v_x) = 0$

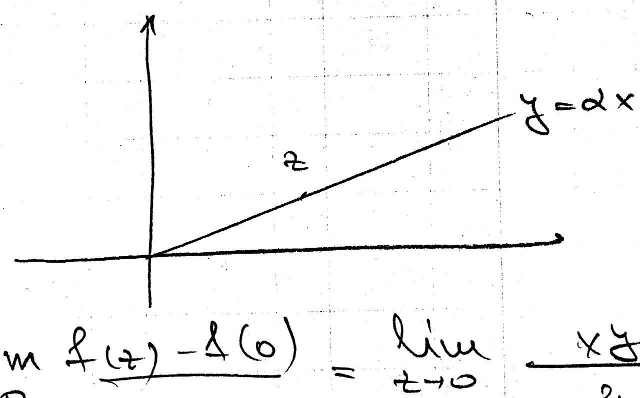
$\Leftrightarrow C.R \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$ условия на Коши - Риман

Условието на К-Р не е достатъчно условие за $\mathbb{C}$-диференцируемост

Пример: $z = x + i\cdot y$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy(x + i\cdot y)}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$f_x(0) = 0 = f_y(0) \Rightarrow f$ удовлетворява Коши - Риман. в $z = 0$.



$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ y = \alpha x}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{\substack{z \to 0 \\ y = \alpha x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = \alpha x}} \frac{\alpha x^2}{x^2 + \alpha^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha x^2}{(\alpha^2 + 1)x^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$$

това зависи от α! $\Rightarrow f$ не е $\mathbb{C}$-диф. в 0.

Д:1 Реална диференцируемост

$f: M \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диф. в $z_0 = (x_0, y_0)$, ако $u(x,y) = \mathrm{Re} f(z)$ и $v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$ са диференцируеми в (x_0, y_0), т.е.

(какво означава реалнозначна ф. на 2 пром. да е диф.)

$$\Delta u = u_x \cdot \Delta x + u_y \cdot \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

$$\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} 0.$$

$$\Delta v = v_x \cdot \Delta x + v_y \cdot \Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

$$\alpha_2(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} 0.$$

Еквивалентен запис на $\mathbb{R}$-диф. (като разпишем)

предвид $\Delta f = \Delta u + i \cdot \Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$.

$$\Rightarrow \Delta f = a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

$$\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

$$f_x = a, \quad f_y = b.$$

$f \in \mathbb{R}$-диф. в $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i y_0 \Leftrightarrow$
$$\Delta f = f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z, \quad \alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0.$$

11.03. Нека f е деф. в ок-ст U на z_0.

f е $\mathbb{C}$-диф. в z_0, ако

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} := f'(z_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z, \quad z \in U.$$
$$\alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0.$$

$\underset{u+i.v}{\overset{\shortparallel}{f}}$ е $\mathbb{R}$-диф. в z_0, ако u и v са диференцируеми.

$$\Updownarrow$$

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \beta(\Delta z)\Delta z, \quad z \in U.$$
$$\beta(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

Усл. на Коши-Риман

C.R. $\quad f_x + i.f_y = 0 \iff \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$

T:) f е $\mathbb{C}$-диф. в $z_0 \iff f$ е $\mathbb{R}$-диф. в z_0 и $f_x(z_0) + i.f_y(z_0) = 0$.

Д-во: $\Rightarrow$:) Нека f е $\mathbb{C}$-диф. в z_0, т.е.

$$\Delta f = f'(z_0).\Delta z + \alpha(\Delta z).\Delta z.$$ Тогава предвид $\Delta z = \Delta x + i.\Delta y$ имаме

$$\Delta f = \underbrace{f'(z_0)}_{f_x}.\Delta x + \underbrace{i.f'(z_0)}_{f_y}.\Delta y + \alpha(\Delta z).\Delta z$$

$$f_x(z_0) + i.f_y(z_0) = f'(z_0) + i(if'(z_0)) = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$$

$\Rightarrow f$ е $\mathbb{R}$-диф. в z_0 и удовл. C.R.

$\Leftarrow$:) Нека f е $\mathbb{R}$-диф. и удовл. C.R., т.е. в ок. на z_0

$$\Delta f = f_x.\Delta x + f_y.\Delta y + \beta(\Delta z).\Delta z \text{ и}$$
$$f_x(z_0) + i.f_y(z_0) = 0.$$

Тогава

$$\Delta f = f_x \cdot \Delta x + i \cdot f_x \cdot \Delta y + \beta(\Delta z) \cdot \Delta z =$$
$$= f_x(\Delta x + i \cdot \Delta y) + \beta(\Delta z)\Delta z =$$
$$= f_x \cdot \Delta z + \beta(\Delta z) \cdot \Delta z$$

$\Rightarrow f$ е $\mathbb{C}$-диф. в z_0

и $f'(z_0) = f_x(z_0) = -i f_x(z_0)$ (??? ?)

Д.) f е <u>холоморфна</u> в z_0, ако f е $\mathbb{C}$-диф. в ок-ст на z_0.

$f: D \to \mathbb{C}$, D - отворено,

f е холоморфна в D, ако f е холоморфна във $\forall$ т. на D.

f е цяла ф-ия, ако f е холоморфна в $\mathbb{C}$.

<u>Формален подход към $\mathbb{C}$-диф.</u>

Нека f е $\mathbb{R}$-диф. в $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$

$$\Delta f = f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y + o(\Delta z)$$

Заместваме
$$\Delta x = \frac{\Delta z + \Delta \bar{z}}{2}$$
$$\Delta y = \frac{\Delta z - \Delta \bar{z}}{2i}$$

Тогава
$$\Delta f = \frac{1}{2} f_x \cdot (\Delta z + \Delta \bar{z}) + \frac{1}{2i} f_y \cdot (\Delta z - \Delta \bar{z}) + o(\Delta z)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}(f_x - i f_y)}_{f_z} \Delta z + \underbrace{\frac{1}{2}(f_x + i f_y)}_{f_{\bar{z}}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

Д.) $f_z = \frac{1}{2} \cdot (f_x - i \cdot f_y)$

$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i \cdot f_y)$

Виждаме, че

$$C.R. \iff f_{\bar z} = 0$$

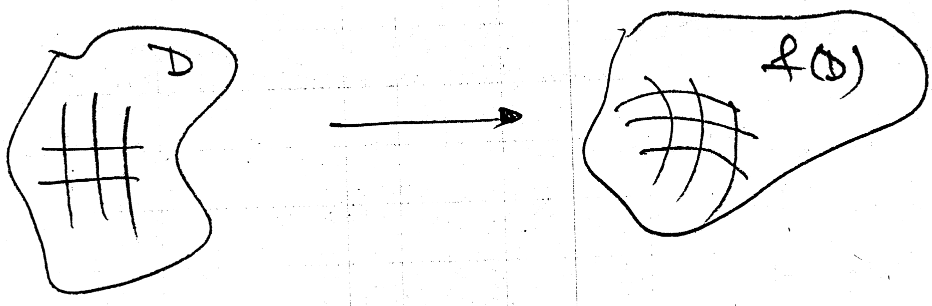
т.е. f - холом. в z_0, ($f(x,y) = f\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)$

да не зависи от $\bar z$!)

$f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$ → графиката е в $\mathbb{R}^4$.

$$f : \underset{(z)}{D} \longrightarrow \underset{(w)}{\mathbb{C}}$$

$$w = f(z)$$



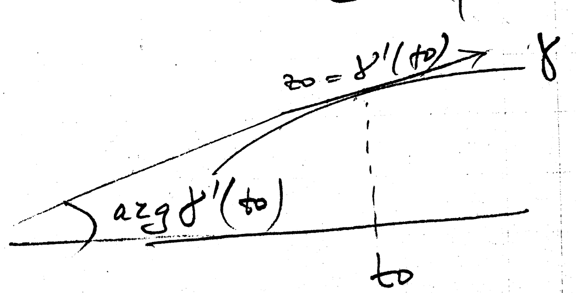
Конформни изображения

— Запазват формите

D:) Кривата $\gamma: z = \gamma(t): [a,b] \to \mathbb{C}$

е гладка, ако ∃ непрекъсната производна $\gamma'(t) \neq 0$ за $\forall t \in [a,b]$

Има допирателна във ∀ точка.

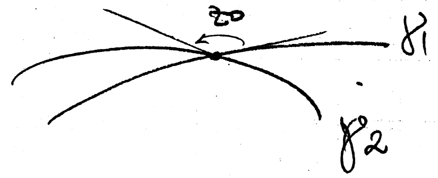


Във ∀ т. $z_0 = \gamma(t_0)$ ∃ допирателна към γ с допирателен в-р $\gamma'(t_0)$

и той сключва с Ox^+ ъгъл $= \arg \gamma'(t_0)$

D:) Ъгъл м/у гладки криви

Нека $\gamma_1: z=\gamma_1(t)$, $t\in[a;b]$
и $\gamma_2: z=\gamma_2(\tau)$, $\tau\in[c;d]$
са гладки криви през $z_0=\gamma_1(t_0)=\gamma_2(\tau_0)$



Ъгъл м/у γ_1 и γ_2 в т. z_0 ($\angle(\gamma_1,\gamma_2)_{z_0}$) наричаме ъгъла м/у допирателните в т. z_0 към γ_1,γ_2.
Това е ъгълът, на който трябва да завъртим доп. към γ_1, за да съвпадне с доп. към γ_2.
Ъгълът м/у γ_1 и γ_2 в z_0

$$\angle(\gamma_1,\gamma_2)_{z_0} = \arg\gamma_2'(\tau_0) - \arg\gamma_1'(t_0).$$

D:) Нека f е непр. диференцируема в z_0. К., че изображението $w=f(z)$ е конформно в z_0, ако то запазва ъглите м/у гладките криви през z_0 по големина и ориентация.

T:) Ако f е холоморфна в т. z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то изображението $w=f(z)$ е конформно в z_0.

Д-во: Нека $\gamma: z=\gamma(t): [a;b]\to\mathbb{C}$ произволна гладка кр.
е гл. кр. през $z_0=\gamma(t_0)$. Тогава $\Gamma=f(\gamma)$ е също гладка крива през $w_0=f(z_0)$, защото (*) $\Gamma'(t)=[f(\gamma(t))]'=$

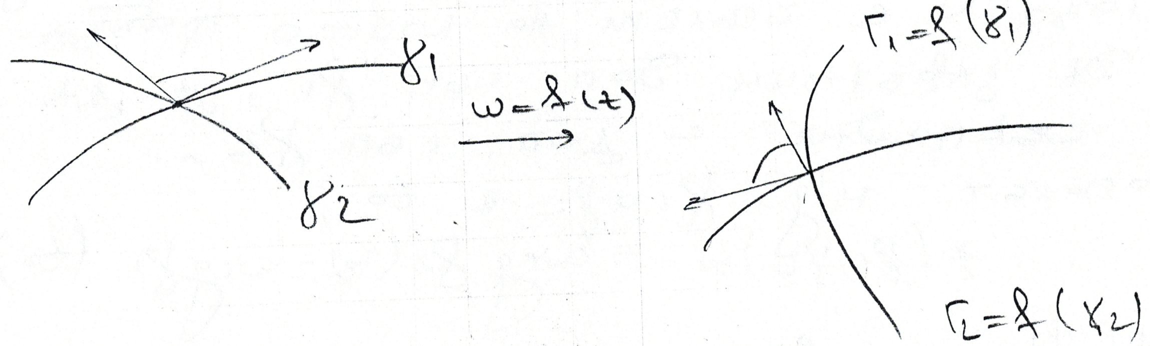
$= f'(\gamma(t)).\gamma'(t) = f'(z).\gamma'(t) \neq 0$. в ок-ст на z_0.

(тук предполагаме непрекъснатост на $f'(z)$ в ок-ст на z_0)

Допирателната към γ в t_0 сключва с Ox^+ $\measuredangle = \arg \gamma'(t_0)$, а допират. към Γ в w_0 — " — " — $\measuredangle = \arg \Gamma'(t_0)$.

Имаме, че $\arg \Gamma'(t_0) \overset{(*)}{=} \arg \gamma'(t_0) + \arg f'(z_0)$.

$\Leftrightarrow \arg \Gamma'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) = \arg f'(z_0)$! НЕ зависи от γ !



(* При завъртането $\measuredangle$-те и остават едни и същи)