

09.06.2014г.

КА - лек.

Приложение на Т. Вайерштрас

Разлагане на $\sin \pi z$ в безкрайно $\prod$

$f(z) = \sin \pi z$ е холм. в $\mathbb{C}$, $f(z) = 0$
 $z = n, n \in \mathbb{Z}$
 Г-прости нули;

Т.е. $\sum_1 \frac{1}{n^2} < +\infty$ (е с.к.), мо

$$f(z) = z \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot e^{\frac{z}{n}} =$$

$$= z \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Лема: (без доказ.)

Нека $f_n(z) \in \text{редуца}$ от холм. в обл. D ,
 $f_n(z) \neq 0, z \in D$. $n=1, 2, \dots$ ф-ции.
 и $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно с.к. в U

компактните подмн. на D (не холм. в D)

Тогав $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1 \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}$, като редът е

равном. с.к. в компактните подмн. на D
 Умие, че $(\sin \pi z)' = \pi \cdot \cos \pi z =$

$$= \frac{1}{z} + \sum_1 \frac{z}{1 - z^2 - n^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

От дж. страна $\sin \pi z = z \cdot e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \frac{g'(z) \cdot e^{g(z)}}{e^{g(z)}} + \sum_1 \frac{\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)'}{1 - \frac{z^2}{n^2}}$$

леята

$$\Rightarrow \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \Rightarrow g'(z) = 0$$

$$\Rightarrow g = \text{const} = c_1.$$

$$c_1 = e^{c_1}$$

$$\sin \pi z = z \cdot c_1 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \pi z}{\pi z} =$$

$$= c_1 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \pi = c_1$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\textcircled{2} \sin \pi z = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \dots$$

(окоро тугаа)

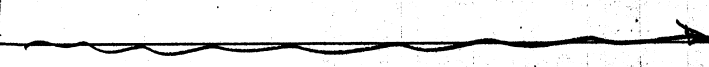
коэф. при z^3 сг:

$$\textcircled{1} \quad \pi \cdot \left(-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{n^2} - \dots\right)$$

$$\textcircled{2} \quad -\frac{\pi^3}{6}$$

$$= -\frac{\pi^3}{6} = \pi \left(-1 - \frac{1}{2^2} - \dots\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Мероморфни ф-ции. Т-на на Митат-Кефлер.

Д: Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област. Ф. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ е мероморфна в D , ако ~~единствените~~ и особени точки на f в D са полтош.
 (пример: 1) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P, Q - полиноми;
 2) $\cot g \pi z$ полтошките са $z_n = n$,
 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 и ф. Q е частото на z $z \in n$ ф.

Лема: Ако f е мероморфна (в $\mathbb{C}$), то $\exists$ ~~уем~~ ф-ции g и h : $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.

До-во: Нека $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ са полтошките на f .

$\exists$ уемла ф. $h(z)$ (Т. Вайерштрас) с ~~уем~~ полтош $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогава
 $g(z) = f(z) \cdot h(z)$ е ~~уем~~ $h(z)$ в $\mathbb{C}$ т.е.
 е уемла ф. и $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$.

Задача: Нека $\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^{\infty}$ и $g_n(z) =$

$$= P\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \frac{a_n^n}{(z-z_n)^n} + \frac{a_{n-1}^{n-1}}{(z-z_n)^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{z-z_n}$$

да се намери мероморфна ф. f с полтош полтош $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и главни части в развоието и развоието около z_n , $n=1, 2, \dots$ съответно $g_n(z)$, $n=1, 2, \dots$

① $\{z_k\}_1^\infty \in$ крайна ϕ -цят.

$$f_0(z) = \sum_1^m g_k(z) \quad - \text{мероморфна}$$

$$1 \leq s \leq m : z_s : f_0(z) = g_s + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^m g_k(z)$$

Ако $f \neq$ мероморфна ϕ , с исчисления
св-ва, то $\{z_k\}_1^\infty$ е крайна f - $h_0 =$
 $= h$ - цят ϕ -цят

$$\rightarrow f(z) = h(z) + \sum_1^m g_k(z), h(z).$$

② Ако $\{z_k\}_1^\infty \in$ безкраен ϕ -цят.
яко $\in \mathbb{C}$ $z_k \rightarrow \infty$.

Всички $\sum_1^\infty g_k(z)$ могат да $\neq$ изчисля.

Пример: $z_k = k, g_k(z) = \frac{1}{z-k}$.

Т.1) Митхил-Лефлер

Ако $\{z_k\}_1^\infty, z_k \rightarrow \infty$ и $g_k(z) =$

$$= P\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = \frac{a_n^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \dots + \frac{a_1^{(k)}}{z-z_k}$$

Тогва f мероморфна ϕ . f с постои
тако $\{z_k\}_1^\infty$ и съответни таблични части
в корановите и изчисля
относно $z_k - g_k, k=1, 2, \dots$

0-во: 1) $z_n \neq 0, n=1, 2, \dots$

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$$

ϕ -функция $g_n(z) \in \text{holom}$ в $|z| < |z_n|$
 Если $g_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$ и $z \neq 0$ тогда
 $z=0 \Rightarrow |z| < |z_n|$

$\exists$ полином $P_n(z)$ ($\deg P_n = m_n$),

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k, \text{ т.е. } (*) |g_n(z) - P_n(z)| \leq \frac{1}{z^n}$$

$$\left(\frac{1}{z^n} \right)^n = \frac{1}{z^{n^2}}$$

$$|z| \leq |z_n|, \forall n=1, 2, \dots$$

Мы введем ϕ -функцию f в
 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z))$

Если $R > 0$ и $v = v(R): |z_n| > 2R, \forall n > v$.

Тогда $\exists \forall z: |z| \leq R$ имеем, что

$$\frac{|z|}{|z_n|} \leq \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| < \frac{|z_n|}{2}$$

$\Rightarrow \exists \forall n > v$ и $\forall z: |z| \leq R$ выполняется (*).

$$\Rightarrow \sum_{n=v+1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)) = f_R(z) \in \text{равномерно с.к.}$$

$\forall |z| \leq R$ и функция $f_R(z) \in$
 holom в $|z| < R$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)) = \sum_{n=1}^v (g_n(z) - P_n(z)) + f_R(z)$$

$\neq$ holom в $\{|z| < R\} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_v\}$.

Т.к. $R > 0$ $\forall$ произвольно выбрано, то

функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)) \neq \text{holom}$ в

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Потребва да покажем, че $\{z_n\}$ е потточка на f със съответни главни части g_n .
 Да фиксираме $z_s, R > 0, R > |z_s|, V = V(R)$

$$\text{Имаме, че: } f(z) = g_s + \left\{ -P_s + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^V (g_k(z) - P_k(z)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=V+1}^{\infty} (g_k(z) - P_k(z)) \right\}$$

Изяма особеност в z_s .
 $P_R(z)$

$\Rightarrow$ (католи. в z_s)

g_s има особеност в z_s .

$\Rightarrow z_s \in$ потточка на f със съответна главна част g_s .

2) Ако $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, z_1, \dots, z_n \rightarrow \infty$

$$g_0(z) = \frac{(коэф)}{z^m} + \dots + \frac{(коэф)}{z} \\ = h(z) = g_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z))$$

Сл. 1.1. | Нека $f(z) \in$ мероморфна ф.
 с потточка $z_1, \dots, z_n \rightarrow \infty$ и

съответни главни части $g_1, g_2, \dots, g_n$
 Тогава $\exists$ функция $h(z)$ и цяла

функция $h(z)$: $f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) - P_n(z)$

Д-во: $\exists f_0(z)$ - мероморфна с полюси точно
покинуте от p -часта $\{z_n\}_1^\infty$

и n -часта g_n , $n=1, \dots$
Тогата $f(z) - f_0(z) = h(z) \in \text{часта } \phi$.

$$f(z) = h(z) + \sum_1^\infty (g_n(z) - p_n(z))$$

С.Л. 1 (Една универсализирана задача)

Нека $\{z_n\}_1^\infty$, $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \neq z_k$, $n \neq k$,
и $\{w_n\}_1^\infty$.

$\exists$ чиста ϕ -чг $f(z) : f(z_n) = w_n$, $n=1, 2, \dots$

Д-во: От Т. Ваитершугас $\exists$ f -чг ϕ , с
прости нули в $\{z_n\}_1^\infty$

Т.е. $f(z_n) = 0$, $f'(z_n) \neq 0$.

От (Т.М-Редф) $\Rightarrow \exists$ мероморфна ϕ .

$g(z)$ с прости полюси $\{z_n\}_1^\infty$ и съответни
табелни части A_n ($A_n = ?$)
 $z - z_n$

Тогата $F(z) = f(z) \cdot g(z) \in \text{чгта } \phi\text{-чгта}$

$$F(z_n) = \lim_{z \rightarrow z_n} \left[\frac{A_{n+1} - f(z_n)}{z - z_n} \cdot (z - z_n) g(z) \right] =$$

$$= f'(z_n) \cdot A_n \stackrel{?}{=} w_n$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{w_n}{f'(z_n)}$$