

07.04.2014г.

КА - кер.

$$\gamma: z = \gamma(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \in C(\gamma^*)$$

$$\int_{\gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{A^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} \quad A = \gamma(a), B = \gamma(b).$$

При какви условия интегралът от f не зависи от кривата, @ свързва началния и края?

Примитивна. Теорема на Коши - Гoursat.

Зв.: Нека γ - гладка крива $[a; b] \rightarrow \mathbb{C}$,
 $f = u + i \cdot v \in C(\gamma^*)$

Тогавна $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy.$

До-во: $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + i \cdot v) (dx + i dy) =$

$$= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx$$

Д.1 Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ е

непр. ф-ция.

К. те ф-цията $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ е примитивна на f , ако F е холоморфна в D и навсякъде в D $F'(z) = f(z)$, $z \in D$.

Формула на Лагранж-Коттон:

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ е непр. ф.

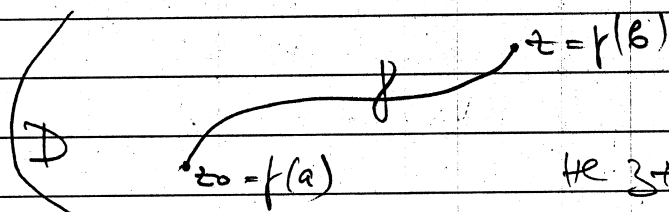
Ако f има примитивна F в D , то за $\forall z_0, z \in D$ и всяка крива (пътя кр.) $\gamma \subset D$, @ ни добързва:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0).$$

Д-во: Укаже, че $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$

black and white
ideas-notes-planes

$$= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b dF(\gamma(t)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z) - F(z_0)$$



не зависи от кривата;

Г.1 (Лагранж-Коттон)

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ е непр. ф-ция.

Следните твърдения са еквивалентни:

(1) f има примитивна в D ;

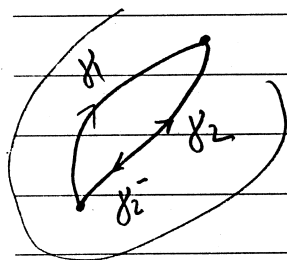
(2) $\int_{\gamma} f = 0$ за $\forall$ затворена крива $\gamma \subset D$;

(3) $\int_{\gamma} f$ не зависи от γ , т.е. ако 2 криви

γ_1 и γ_2 са криви в D с общо начало и общ край, то $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Доказ: (1) $\Rightarrow$ (2) | следва от ф-мата на Л-т

(2) $\Rightarrow$ (3): | Нека $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ са криви с общо начало и край. Тогава $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-}$ е затворена крива и



$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^{-}} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^{-}} f =$$

$$= \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f \Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

black and white
ideas notes page

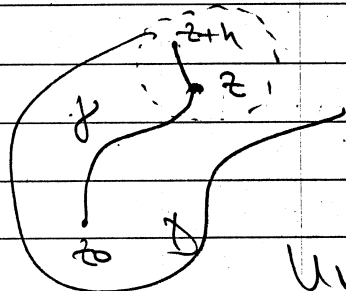
(3) $\Rightarrow$ (1): | Нека $z_0 \in D$ е фикс. и $z \in D$ е произволна.

в $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Дефиниране $F(z) := \int_{z_0}^z f(z) dz.$

Ще докажем, че F е примитивна на f в D .



Нека $h \in \mathbb{C}$ е т.ч. $z+h \in D$ и отсечката $[z, z+h] \subset D$.

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_z^{z+h} f - \int_{z_0}^z f \right] =$$

$$= \frac{1}{h} \left[\int_{\gamma(z, z+h)} f - \int_{\gamma} f \right] =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz$$

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz \quad \text{Тогда}$$

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} f(z) dz - \int_z^{z+h} f(z) dz \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} [f(z) - f(z)] dz \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(z) - f(z)| |dz| \quad (*)$$

Доказ. Пусть $\varepsilon > 0$. Т.к. f непрерывна в D , $\exists \delta > 0$, т.е. $|f(z) - f(z)| < \varepsilon$, $\forall z: |z - z| < \delta, z \in D$.

Из условия h , т.е. $|h| < \delta$. Тогда $\forall z \in [z, z+h] \Rightarrow |z - z| \leq |h| < \delta$ и

$$(*) \leq \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon.$$

$\Rightarrow F \in \text{holomorphic в } D \text{ и } F'(z) = f(z), z \in D.$

Сл. 1.1. Если F holomorphic в области $D \subseteq \mathbb{C}$ и $F'(z) = 0, z \in D$, то $F(z) \equiv \text{const}$ в D .

Доказ. По у.ч. $F'(z) = 0 \Rightarrow F$ примитивна на D и $f \equiv 0$ в D .

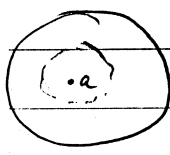
Тогда, ако $z_0 \in D$ — фикс.

$$\forall z \in D \Rightarrow F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^z 0 \cdot dz = 0.$$

$$\Rightarrow F(z) = F(z_0), \forall z \in D.$$

Ср. 2: Ако $F \in$ примитивна на $\mathbb{C} \setminus D$,
то $\forall$ -те примитивна на $\mathbb{C} \setminus D$
са $F + \text{const}$.

? $\frac{1}{z-a}, D = \mathbb{C} \setminus \{a\}$

 $\frac{1}{z-a}$ не е примитивна в D ,
защото $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \neq 0$
 $\gamma = C(a, r)$

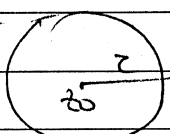
? $\exists$ кои области $D \subset \mathbb{C}$,

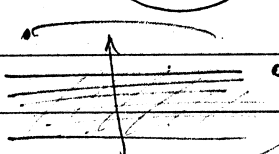
$\int_{\gamma} F = 0$ за всяка γ - контура в D
и за $\forall \gamma \subset D$, затворена?

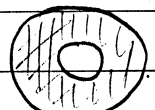
Основна теорема на Коши

Т. 1: Областта $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана,
ако $\mathbb{C} \setminus D$ е свързано нс.

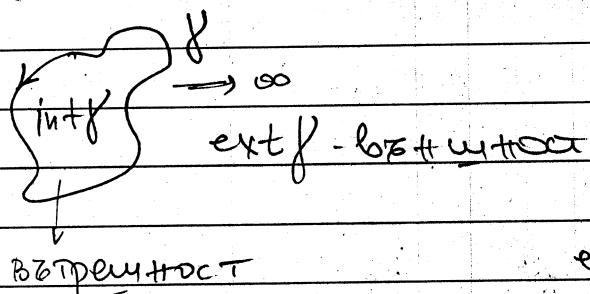
Примери:

1)  едносв. област

2)  ∞ Е едносв. и затв. имае $\mathbb{C} \setminus D$.

3)  $\notin$ Е едносв.

Лема на Гордън: В сека замкнута



Гордънова крива
разделя $\mathbb{C}$ на 2
отделителни
области,

едната от които е
ограничена.

$$\bar{D} = \text{int } \gamma \cup \gamma \cup \text{ext } \gamma \quad (\infty \in \text{ext } \gamma)$$

Тб.1 $D \subset \mathbb{C}$ е едн. обл. $\Leftrightarrow$ за $\forall$ затворена Гордънова
крива γ , от това, че $\gamma \subset D \Rightarrow \text{int } \gamma \subset D$.

Формула на Грийн:
затв.

Нека $\gamma \in$ Гордънова крива,
 P, Q са реалнозначни функции
дифинирани и с непрер. частни производни
от I реал в околност на $\gamma \cup \text{int } \gamma$.

Това

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\text{int } \gamma} (Q_x - P_y) dx dy$$

u, v, u, v са $\mathbb{R}$ значущи.

Нека $f = u + iv$ е холоморфна в околност на
 $\gamma \cup \text{int } \gamma$ с Δ' - непрекъснатост

Това

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy =$$

Грийн

$$= \iint_{\text{int } \gamma} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\text{int } \gamma} (u_x - v_y) dx dy =$$

Л. 7. $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$$= \iint_{int \gamma} 0 dx dy + i \iint_{int \gamma} 0 dx dy = 0$$

Това даваме "Л-во" за осн.-т-на на Коши.

Т (Коши - първоначален вариант)

Нека $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област,

$$\int_{\gamma} f = 0 \text{ за } \forall \text{ затворена хорджанова крива } \gamma \subset D$$

$$(\Rightarrow \int_{int \gamma} f \subset D)$$

и за $\forall$ холоморфна в D , с непрекъснатата производна функция f

Т (Коши - Гурса)!

black and white
ideas notes planes

Ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област, то

$$\int_{\gamma} f = 0 \text{ за } \forall \text{ } \gamma \text{-затворена крива}$$

и за $\forall$ холоморфна в D ф-ция f .

/ $\rightarrow$ БЕЗ ДОКАЗАТЕЛСТВО /

Еквивалентни формулировки:

Т₁ (Коши)! Ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносв. област

и $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ са криви с общо начало и край, то $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ за $\forall$ f -холоморфна в D .

Т2.1) $\forall$ холоморфна ф-ция в едно-
област има примитивна.

Следствие: 1) Във всяка едносвързана
област, която не съдържа 0,
имаме да се отиде еднозначен
конт на $\log z$.

р-во: Нека $D \neq \emptyset$ е еднооб. област.

ф-цията $z(z) = \frac{1}{z}$ е

холоморфна в D и (T_2) има
примитивна $F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{z}$.

ф-цията $z \cdot e^{-F(z)}$ е холоморфна в D и
 $(z \cdot e^{-F(z)})' = e^{-F(z)} - F'(z) \cdot z \cdot e^{-F(z)} =$

black and white
ideas-notes-planes

$= e^{-F(z)} - e^{-F(z)} = 0, z \in D.$

$\Rightarrow z \cdot e^{-F(z)} \equiv \text{const} + 0 = e^c.$

$\Rightarrow e^{F(z)+c} = z$

$\Rightarrow F(z)+c \in \text{однозначен конт на } \log z.$

т.е. имаме, че $\int_{z_0}^z \frac{dz}{z} = \log z - \log z_0, z \in D.$

Вариант на Т. Коши!

Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област. Тогава

$\int_{\gamma} f = 0$ за $\forall$ замкнута ориентирана крива
 $\gamma: i \cup \gamma \subset D$

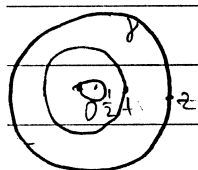
γ и $\forall$ холоморфна в D ф-ция f .

$T(\text{кошн})$ не е всршна ако D не е едносвързана обл.

пр.: $D = \{ \frac{1}{2} < |z| < 2 \}$ $\gamma = \{ |z| = 1 \}$

вещу

$$f(z) = \frac{1}{z}$$



$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i + 0.$$

08.04.2014г.

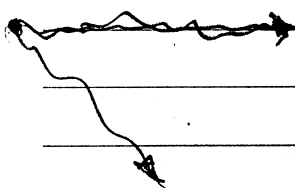
ЗАД. Да се док., че ако $D \subset \mathbb{C}$ е

едносв. област и $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ е

хармонична в D , то

$\exists$ f -конформна в D , т.е.

$$\operatorname{Re} f = u.$$



black and white
ideas-notes-planes